

## Διεθνές Συνέδριο για την Ανοικτή & εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση

Τόμ. 9, Αρ. 5Α (2017)

Ο Σχεδιασμός της Μάθησης

**Τόμος 5, Μέρος Α**

### Πρακτικά

9<sup>ο</sup> Διεθνές Συνέδριο για την Ανοικτή  
& εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση

Αθήνα, 23 – 26 Νοεμβρίου 2017

### Ο Σχεδιασμός της Μάθησης

Επιμέλεια  
Αντώνης Λιοναράκης  
Σύλβη Ιωακειμίδου  
Μαρία Νιάρη  
Γκέλη Μανούσου  
Τόνια Χαρτοφύλακα  
Σοφία Παπαδημητρίου  
Άννα Αποστολίδου

ISBN 978-618-5335-00-7  
ISBN SET 978-618-82258-5-5



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο  
Ελληνικό Δίκτυο Ανοικτής & εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης

Σχεδιασμός Μαθηματικών Μονοπατιών για την  
αξιοποίηση m-learning στην Ρεαλιστική  
Μαθηματική Εκπαίδευση

Πασχαλίνα Γεώργιος Κάρτα, Γεώργιος Νικόλαος  
Φεσάκης

doi: [10.12681/icodl.1073](https://doi.org/10.12681/icodl.1073)

## Σχεδιασμός Μαθηματικών Μονοπατιών για την αξιοποίηση m-learning στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

### Math Trails for M-Learning Enhanced Realistic Mathematics Education

Φεσάκης Γεώργιος  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
[gfsakis@aegean.gr](mailto:gfsakis@aegean.gr)

Κάρτα Πασχαλίνα  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου/ΠΜΣ ΔΙΘΕ&ΤΠΕ  
Εκπαιδευτικός  
[psemdt14016@aegean.gr](mailto:psemdt14016@aegean.gr)

#### Abstract

Seeking a systematic integration of the pedagogical model of m-learning (mobile learning) with the Realistic Mathematics Education (RME) approach, this study suggests the use of math trail as a learning activity model that can take the advantages of mobile computing devices for the design of effective learning experiences in an authentic context. The paper presents the design and the application of the first pilot implementation of a math trail, using mobile devices for primary school students. In this math trail, the students are guided, through a digital map, to a sequence of preselected sites of a park where they solve specially designed math problems using data from the environmental context. The students measure real objects' dimensions either with conventional instruments or by measurement applications of their tablet. According to the findings of the study, students solved the puzzles by applying mathematical knowledge, discussion and collaboration. The students applied and reinforced their knowledge through an effective and engaging learning activity. Moreover, the students were puzzled about the differences of the measurements by conventional and digital instruments and this confusion triggered social negotiation. Finally, many teachers and researchers may be interested in this study as it contributes to the effort of a grounded theory development concerning m-learning design for RME.

**Keywords:** *Learning design, m-learning, Realistic Mathematics Education, Math Trails*

#### Περίληψη

Αναζητώντας τρόπους συστηματικού συνδυασμού του παιδαγωγικού μοντέλου της μάθησης μέσω φορητών συσκευών με την προσέγγιση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (PME), η παρούσα μελέτη περίπτωσης προτείνει το μαθηματικό μονοπάτι, ως μοντέλο μαθησιακής δραστηριότητας που μπορεί να αξιοποιήσει τα πλεονεκτήματα των φορητών υπολογιστικών συσκευών για τον σχεδιασμό αποτελεσματικών μαθησιακών εμπειριών εφαρμογής μαθηματικών σε αυθεντικό πλαίσιο. Στο άρθρο παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η πρώτη πιλοτική εφαρμογή ενός μαθηματικού μονοπατιού, ενισχυμένου με φορητές συσκευές, για μαθητές δημοτικού σχολείου. Στο μαθηματικό μονοπάτι, οι μαθητές οδηγούνται, μέσω ενός ψηφιακού χάρτη, σε μια σειρά προεπιλεγμένων τοποθεσιών ενός πάρκου όπου επιλύουν ειδικά σχεδιασμένα μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας πληροφορίες από το περιβάλλον. Ειδικότερα, οι μαθητές μετρούν τις διαστάσεις

πραγματικών αντικειμένων είτε με συμβατικά όργανα είτε με εφαρμογές μέτρησης σε ταμπλέτα. Σύμφωνα με τα ερευνητικά ευρήματα, οι μαθητές έλυσαν συνεργατικά τους γρίφους εφαρμόζοντας και ενισχύοντας τις μαθηματικές τους γνώσεις στο πλαίσιο μιας αποτελεσματικής και ελκυστικής μαθησιακής δραστηριότητας. Επιπλέον, οι μαθητές προβληματίστηκαν σχετικά με τις διαφορές των μετρήσεων των συμβατικών και των ψηφιακών εργαλείων και αυτή η σύγκριση προκάλεσε κοινωνική διαπραγμάτευση. Η παρούσα έρευνα ενδιαφέρει μαχόμενους εκπαιδευτικούς και ερευνητές επειδή συνεισφέρει στην προσπάθεια ανάπτυξης μιας θεμελιωμένης θεωρίας σχετικά με τον σχεδιασμό m-learning για PME.

**Λέξεις-κλειδιά:** *Μαθησιακός σχεδιασμός, Φορητή μάθηση, Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Μαθηματικά μονοπάτια*

## 1. Εισαγωγή

Η ευρεία εξάπλωση της χρήσης διαφόρων ειδών φορητών συσκευών (π.χ. TabletPC, Smartphone, iPad) και η ενσωμάτωση τους στην καθημερινή ζωή των παιδιών έχει δημιουργήσει νέα δεδομένα στις δυνατότητες εφαρμογής του παιδαγωγικού μοντέλου της φορητής μάθησης (ή μάθησης μέσω φορητών συσκευών – mobile learning / m-learning). Όλο και περισσότεροι μαθητές διαθέτουν προσωπική φορητή συσκευή, στην οποία αφιερώνουν πολλές ώρες προσήλωσης και την οποία πολλές φορές φέρουν και στο σχολείο. Λόγω της εκτεταμένης χρήσης της τεχνολογίας εντός και εκτός σχολικού πλαισίου, τα σημερινά παιδιά χαρακτηρίζονται ως “i-generation students” (Bouck, Flanagan, Miller & Bassette, 2012). Η εξάπλωση των φορητών συσκευών στις μικρότερες ηλικίες θέτει νέες προκλήσεις για τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό καθώς, σύμφωνα με την άποψη των συγγραφέων, υπάρχει ανάγκη για την ανάπτυξη ποιοτικών εφαρμογών φορητής μάθησης για νεαρότερες ηλικίες ενώ η εφαρμογή τους στα πραγματικά σχολεία προβάλλει πλέον ως εφικτή. Στην εργασία αυτή εστιάζουμε στον μαθησιακό σχεδιασμό εφαρμογών της φορητής μάθησης για τα μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο. Το ενδιαφέρον των συγγραφέων στηρίζεται στην άποψη ότι η φορητή μάθηση συνάδει με τις αρχές των ρεαλιστικών μαθηματικών και μπορεί να βελτιώσει τις εφαρμογές τους στην εκπαίδευση. Ειδικότερα, σύμφωνα με τις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (PME), τα μαθηματικά αποτελούν ανθρώπινη δραστηριότητα και προτείνεται για τη διδασκαλία τους η εστίαση σε δραστηριότητες αυθεντικές, στο πλαίσιο των οποίων τα παιδιά κάνουν μαθηματικά και σταδιακά οδηγούνται στη μαθηματοποίηση (Freudenthal, 1983; Κολέζα, 2000). Αν και η φορητή μάθηση φαίνεται να μπορεί να υποστηρίξει την PME, η βιβλιογραφική ανασκόπηση, μέχρι στιγμής, αποδίδει λίγες δημοσιευμένες εργασίες που να συνδυάζουν φορητή μάθηση και ρεαλιστικά μαθηματικά. Επίσης, η αναζήτηση εκπαιδευτικών μαθηματικών εφαρμογών για φορητές συσκευές αποδίδει ελάχιστες εφαρμογές, οι οποίες να υιοθετούν τη ρεαλιστική προσέγγιση ή/και να αξιοποιούν τα πλεονεκτήματα των φορητών συσκευών, όπως την ελευθερία κίνησης και την επαυξημένη αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Είναι προφανές η τρέχουσα ανάγκη για σχεδιασμό περισσότερων εφαρμογών φορητής μάθησης για τη ρεαλιστική προσέγγιση των μαθηματικών. Αναζητώντας έναν συστηματικό τρόπο μαθησιακού σχεδιασμού φορητής μάθησης για τη μαθηματική εκπαίδευση στην παρούσα εργασία προτείνεται η αξιοποίηση του μαθηματικού μονοπατιού (math trail) (Cross, 1997) ως μοντέλο μαθησιακής δραστηριότητας που μπορεί να υποστηρίξει να αξιοποιήσει τα πλεονεκτήματα των φορητών συσκευών σε συνδυασμό με την προσέγγιση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Ειδικότερα, στην εργασία παρουσιάζεται ο

σχεδιασμός και η μελέτη της πρώτης εφαρμογής ενός μαθηματικού μονοπατιού για μαθητές δημοτικού σχολείου. Στο μαθηματικό μονοπάτι οι μαθητές οδηγούνται μέσω ψηφιακού χάρτη (Google Maps) σε μια σειρά από προεπιλεγμένες τοποθεσίες και καλούνται να λύσουν μαθηματικά προβλήματα, ειδικά σχεδιασμένα για τον συγκεκριμένο χώρο, εφαρμόζοντας μαθηματικές γνώσεις και μετρώντας διαστάσεις στον πραγματικό κόσμο, είτε με συμβατικά όργανα, όπως η μεζούρα, είτε με ειδικές μικρό-εφαρμογές μέτρησης (Object Height), μέσω της κάμερας των συσκευών. Σύμφωνα με το σχεδιασμό, οι μαθητές που θα υλοποιήσουν το μαθησιακό σενάριο θα λύσουν συνεργατικά τους μαθηματικούς γρίφους, εφαρμόζοντας μαθηματικές γνώσεις στην πράξη και θα προβληματιστούν σχετικά με τις διαφορετικές τιμές στις μετρήσεις από τη μεζούρα και τη φορητή συσκευή. Στις υπόλοιπες ενότητες της εργασίας γίνεται αρχικά σύντομη εισαγωγή στη φορητή μάθηση και τα μαθηματικά μονοπάτια και στη συνέχεια παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η ανάλυση της μελέτης περίπτωσης του μαθηματικού μονοπατιού που αναπτύχθηκε για την εργασία.

## 2. Θεωρητικό πλαίσιο

### 2.1 Φορητή μάθηση

Στο ερώτημα τι είναι η φορητή μάθηση δεν υπάρχει μια μοναδική απάντηση, καθώς είναι πολλοί οι ορισμοί που έχουν προταθεί έως σήμερα. Ένας αρκετά γενικός ορισμός αναγνωρίζει ως φορητή μάθηση κάθε παροχή εκπαίδευσης, όπου κυρίαρχες είναι οι φορητές τεχνολογίες και οι επιταλάμιες συσκευές (Traxler, 2005). Οι Martin και Ertzberger (2013) αναφέρουν ότι η φορητή μάθηση παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να βρίσκονται στο ίδιο το πλαίσιο εφαρμογής της γνώσης που οικοδομούν και να έχουν πρόσβαση σε πληροφορίες που σχετίζονται με αυτά που βλέπουν και βιώνουν τη συγκεκριμένη στιγμή. Ενώ ως κυριότερα χαρακτηριστικά της φορητής μάθησης σημειώνουν: *την ενεργή εμπλοκή των μαθητών, τις αυθεντικές δραστηριότητες και την άτυπη μάθηση* (Martin & Ertzberger, 2013). Χαρακτηριστικό είναι αυτό που υποστηρίζει η Kraut (2013) για τη φορητή μάθηση, ότι δηλαδή οι φορητές συσκευές δίνουν κυριολεκτική σημασία στην αρχή ότι ο «*κόσμος είναι μια τάξη/ the world is a classroom*» (Kraut, 2013). Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η φορητή μάθηση αποτελεί, σχετικά νέο, παιδαγωγικό μοντέλο στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν καθώς κινούνται, αλληλοεπιδρώντας μεταξύ τους και με το περιβάλλον, με τη διαμεσολάβηση εφαρμογών που εκτελούνται σε, διαφόρων ειδών, φορητές ψηφιακές συσκευές (Kukulska-Hulme & Traxler, 2005). Οι φορητές συσκευές φέρουν πληθώρα αισθητήρων και εφαρμογών οι οποίες μπορούν να αξιοποιηθούν διαμεσολαβητικά για να βελτιώσουν την αλληλεπίδραση του χρήστη με το περιβάλλον. Για παράδειγμα, με την αξιοποίηση της αντίληψης της θέσης του χρήστη από τον αισθητήρα GPS μπορεί μια εφαρμογή να προτείνει κατάλληλες πληροφορίες στον χρήστη λαμβάνοντας υπόψη και άλλους παράγοντες του «περιβάλλοντος» (context sensitive) όπως η ώρα, η θερμοκρασία, η κίνηση του χρήστη κ.α. Επομένως, η απλή μεταφορά εφαρμογών από τους Η/Υ στις φορητές συσκευές χωρίς να γίνεται αξιοποίηση της δυνατότητας διαμεσολάβησης των συσκευών στην αλληλεπίδραση του μαθητή με το περιβάλλον δεν θεωρούμε ότι εντάσσεται ευκρινώς στο παιδαγωγικό μοντέλο της φορητής μάθησης. Μέχρι σχετικά πρόσφατα η χωροευσίσθητη φορητή μάθηση έβρισκε εφαρμογές κυρίως στην άτυπη μάθηση λόγω του κόστους χρήσης των συσκευών και της απαίτησης για κίνηση σε εξωσχολικό περιβάλλον (Markouzis & Fessakis, 2015). Με την εξάπλωση των συσκευών και της ασύρματης πρόσβασης στο διαδίκτυο η φορητή μάθηση λειτουργεί όλο και περισσότερο ως γέφυρα ανάμεσα στην τυπική και στην άτυπη μάθηση (Kukulska-Hulme & Traxler, 2005).

## 2.2 Φορητή μάθηση και Ρεαλιστικά Μαθηματικά

Ο Freudenthal πρωτοπόρος του κινήματος των ρεαλιστικών μαθηματικών υποστήριζε ότι τα μαθηματικά είναι προτιμότερο να διδάσκονται έτσι ώστε να είναι χρήσιμα για την επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής (Freudenthal, 1968). Ο ίδιος ήταν θερμός υποστηρικτής των «Μαθηματικών για όλους» και προσπάθησε να κάνει τα Μαθηματικά προσιτά σε όλους, θέτοντας ως προτεραιότητα για τη μαθηματική εκπαίδευση την προσέγγιση της επίλυσης προβλήματος που να έχει αυθεντικό ενδιαφέρον και να εντάσσεται στη σφαίρα των εμπειριών των παιδιών (Gravemeijer & Terwel, 2000). Στη ρεαλιστική προσέγγιση των μαθηματικών είναι σημαντικό οι μαθητές να προσεγγίσουν τις έννοιες ως εργαλεία επίλυσης προβλημάτων και να τις ανακαλύπτουν μέσα από την εφαρμογή τους σε αυθεντικά πλαίσια (Κολέζα, 2000). Η περιήγηση στο φυσικό και το δομημένο περιβάλλον παρέχει πολλές ευκαιρίες και διαφορετικά πλαίσια για την ανακάλυψη καθημερινών αυθεντικών προβλημάτων και την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών στην επίλυση τους. Επομένως, το μοντέλο τη φορητής μάθησης φαίνεται να συνάδει με τα ρεαλιστικά μαθηματικά. Η φορητή μάθηση λόγω της ιδιότητας της να αξιοποιεί το ίδιο το πλαίσιο της μάθησης (context) μπορεί συνδυαστεί με τη PME, καθώς οι μαθητές με τη βοήθεια των φορητών συσκευών θα μπορούν να ασχοληθούν με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

## 2.3 Ανασκόπηση ερευνών για φορητή μάθηση και Ρεαλιστικά Μαθηματικά

Σε συστηματική βιβλιογραφική ανασκόπηση των ερευνών για εφαρμογές της φορητής μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση, που επιχείρησαν οι συγγραφείς, εντοπίστηκε σχετικά μικρός αριθμός ερευνών με μικτά αποτελέσματα αναφορικά με την αποτελεσματικότητα και την επίδραση της φορητής μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Τον μικρό αριθμό των ερευνών φορητής μάθησης για τα μαθηματικά επιβεβαιώνουν και οι Soykan & Uzunboyu (2015), καθώς η ανασκόπηση τους έδειξε ότι μόνο το 1,9% των ερευνών που δημοσιεύτηκαν από το 2009 έως και το 2014 είχαν ως αντικείμενο των ερευνών τη φορητή μάθηση για τα μαθηματικά. Όπως είναι φυσικό, ακόμα λιγότερες είναι οι διαθέσιμες έρευνες για τα ρεαλιστικά μαθηματικά και τη φορητή μάθηση. Χαρακτηριστικές είναι οι έρευνες (Ζαράνης & Τσάρα, 2008), (Ζαράνης, 2014) και (Zaranis, Baralis & Scordialos, 2015) οι οποίες εξετάζουν αν εκπαιδευτικές φορητές εφαρμογές, συμβατές με τη PME, βοηθούν μαθητές Νηπιαγωγείου και Α' τάξης Δημοτικού στη βελτίωση των επιδόσεων τους σε βασικές μαθηματικές έννοιες και στις αριθμητικές πράξεις. Εξάλλου, οι Μπουζιώτη & Πανούτσου (2014) διερεύνησαν την επίδραση της εφαρμογής φορητών συσκευών στη βελτίωση των μαθηματικών δεξιοτήτων καθώς και των εσωτερικών κινήτρων των μαθητών δημοτικού με θετικά αποτελέσματα. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ενδεικτικές είναι οι έρευνες των Bray, Oldham & Tangney (2015) σε Ιρλανδούς μαθητές ηλικίας 15-17 ετών, στις οποίες μελέτησαν την επίδραση των φορητών συσκευών στην εμπλοκή (engagement) και την αυτοπεποίθηση (confidence) των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες. Τέλος, οι Widjaja & Heck (2003) μελέτησαν σε μαθητές γυμνασίου στην Ινδονησία τον συνδυασμό φορητών συσκευών με PME για τη διδασκαλία των γραφημάτων και ειδικότερα της ενότητας «Χρόνος, Απόσταση και Ταχύτητα» του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών. Οι λιγότερες έρευνες σχετικά με τον συνδυασμό των φορητών συσκευών με την PME δεν περιλαμβάνουν βασικά χαρακτηριστικά του παιδαγωγικού μοντέλου της φορητής μάθησης, όπως η κίνηση και η αλληλεπίδραση με το φυσικό περιβάλλον. Αντίθετα, αφορούν κυρίως τη χρήση φορητών συσκευών ως πιο ευέλικτων Η/Υ. Επομένως, διαπιστώνεται ερευνητικό κενό στην εφαρμογή της φορητής μάθησης σε συνδυασμό με τη ρεαλιστική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση. Επιπλέον, η αναζήτηση



εκπαιδευτικών μαθηματικών εφαρμογών για φορητές συσκευές για παιδιά δημοτικού, (σε υπηρεσίες όπως το appstore) έδειξε πως οι διαθέσιμες εφαρμογές, όπως και οι έρευνες, δεν αξιοποιούν τα πλεονεκτήματα των φορητών συσκευών και της φορητής μάθησης, ενώ ελάχιστα στηρίζονταν στις αρχές της PME. Οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν σε εξάσκηση και πρακτική στις αριθμητικές πράξεις μέσα από παιγνιώδεις δραστηριότητες κλειστού και συμπεριφοριστικού τύπου, οι οποίες θα μπορούσαν κάλλιστα να χρησιμοποιηθούν τόσο σε έναν Η/Υ όσο και σε μια φορητή συσκευή εφόσον δεν απαιτούν μετακίνηση στον χώρο και δεν αξιοποιούν τους αισθητήρες των φορητών συσκευών. Αυτό είναι λογικό, εφόσον η ανάπτυξη και η εμπορική αξιοποίηση των χώρο-ευαίσθητων (location depended) εφαρμογών είναι δυσκολότερη σε σχέση με τις απλές και επομένως δεν αποτελούν προτεραιότητα για τους παραγωγούς.

#### **2.4 Φορητή Μάθηση, Ρεαλιστικά Μαθηματικά και Μαθηματικά Μονοπάτια**

Για τον μαθησιακό σχεδιασμό αποτελεί πλέον σύγχρονη πρόκληση η ανάπτυξη εφαρμογών της φορητής μάθησης για μικρές ηλικίες και για χρήση τους σε τυπικό μαθησιακό περιβάλλον. Στο πλαίσιο της αναζήτησης μοντέλων για την αξιοποίηση των χώρο-ευαίσθητων εφαρμογών των φορητών συσκευών στον μαθησιακό σχεδιασμό γενικά και ειδικότερα, στη διδασκαλία των μαθηματικών οι συγγραφείς εξετάζουν διαφορετικά μοντέλα δραστηριοτήτων όπως τα παιχνίδια (Fessakis, Bekri & Konstantopoulou, 2016) και τα μαθηματικά μονοπάτια. Σύμφωνα με τους Shoaf, Pollak & Schneider (2004), τα μαθηματικά μονοπάτια είναι ένας περίπατος για την ανακάλυψη των μαθηματικών. Πιο τυπικά, το μαθηματικό μονοπάτι περιλαμβάνει μια προσχεδιασμένη διαδρομή, η οποία ορίζεται από μια ακολουθία στάσεων στις οποίες οι μαθητές εξετάζουν μαθηματικά στο περιβάλλον (Cross, 1997). Μια αξιολογή συλλογή μαθηματικών μονοπατιών διατίθεται από το Mathcitymap project του πανεπιστημίου της Φρανκφούρτης (<https://mathcitymap.eu>). Το μαθηματικό μονοπάτι αποτελεί μοντέλο μαθησιακής δραστηριότητας το οποίο συνδυάζει επίλυση προβλήματος, δημιουργία συνδέσεων της σχολικής γνώσης με τον πραγματικό κόσμο και άλλα γνωστικά αντικείμενα, επικοινωνία, πρακτική εφαρμογή γνώσεων και δεξιοτήτων σε νοηματικό περιβάλλον και φυσική κίνηση (Richardson, 2004). Στα πλεονεκτήματα του μαθηματικού μονοπατιού η Richardson (2004) αναφέρει ότι: επειδή υλοποιούνται εκτός της σχολικής τάξης δημιουργούν μια ατμόσφαιρα περιπέτειας και εξερεύνησης. Η κοινή αίσθηση της προσδοκίας και της ανακάλυψης που αναπτύσσεται οδηγεί φυσικά σε επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών στις οποίες εστιάζει το μονοπάτι. Οι μαθητές παρατηρούν, μετρούν, συλλέγουν και καταγράφουν δεδομένα για να τα επεξεργαστούν και να τα ερμηνεύσουν στην τάξη. Καθώς ολοκληρώνουν δραστηριότητες στο μονοπάτι οι μαθητές χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες που διδάχθηκαν στην τάξη και ανακαλύπτουν διάφορες χρήσεις των εννοιών αυτών στην καθημερινή ζωή.

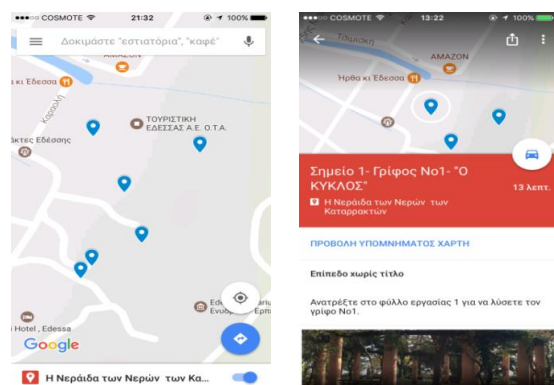
#### **3. Το σκεπτικό της έρευνας**

Η εναρμόνιση των χαρακτηριστικών των μαθηματικών μονοπατιών με τις αρχές της PME είναι ευδιάκριτη. Επιπλέον, οι παρεχόμενες δυνατότητες των φορητών συσκευών για προηγμένη διαμεσολάβηση στην αλληλεπίδραση του χρήστη με το περιβάλλον καθιστούν εμφανή τη σκοπιμότητα διερεύνησης της δυνατότητας εφαρμογής της φορητής μάθησης για τη βελτίωση τόσο των μαθηματικών μονοπατιών όσο των ρεαλιστικών μαθηματικών. Στην κατεύθυνση αυτή στην παρούσα εργασία μελετάται ο σχεδιασμός και η πρώτη υλοποίηση ενός μαθηματικού μονοπατιού επαυξημένου με φορητή μάθηση για τη ρεαλιστική προσέγγιση

μαθηματικών από μαθητές του δημοτικού σχολείου. Μαθησιακά, το συγκεκριμένο μαθηματικό μονοπάτι εστιάζει στις έννοιες: *χάρτης, μήκος, περίμετρος, εμβαδόν, και μέτρηση*. Σκοπός της εργασίας είναι να εξεταστεί κατά πόσο το μαθηματικό μονοπάτι αποτελεί ένα μοντέλο μαθησιακής δραστηριότητας το οποίο διευκολύνει τον μαθησιακό σχεδιασμό εφαρμογών της φορητής μάθησης που θα αξιοποιούνται τα διακριτικά πλεονεκτήματα των φορητών συσκευών που σχετίζονται με τη δυνατότητα κίνησης και τη διαμεσολαβούμενη επαυξημένη αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζεται αναλυτικά ο σχεδιασμός και η πειραματική εφαρμογή της του μαθηματικού μονοπατιού.

#### 4. Το μαθηματικό μονοπάτι «*Η Νεράιδα των καταρρακτών*»

Για τις ανάγκες της έρευνας σχεδιάστηκε ένα μαθηματικό μονοπάτι, το οποίο ονομάστηκε η «*Η Νεράιδα των καταρρακτών*». Ο χώρος που επιλέχτηκε είναι το πάρκο των καταρρακτών της Έδεσσας, ενώ η εκτιμώμενη διάρκεια του μονοπατιού ήταν από 1-3 ώρες. Για να γίνει πιο ελκυστικό το μονοπάτι εντάχθηκε σε ένα σενάριο σύμφωνα με το οποίο στο πάρκο κάνει την εμφάνιση της κατά τις βραδινές ώρες η Νεράιδα των καταρρακτών, η οποία ζητά από τους μαθητές να λύσουν μια σειρά από μαθηματικούς γρίφους έτσι ώστε να μπορεί να συνεχίσει να κάνει τις βραδινές περιπλανήσεις στο πάρκο και να τους εμφανισθεί. Κάθε φορά που οι μαθητές θα λύσουν σωστά έναν γρίφο θα κερδίζουν και από κάποια κομμάτια του πάζλ της Νεράιδας και στο τέλος, αφού απαντήσουν σωστά σε όλα τα ερωτήματα των γρίφων και συγκεντρώσουν τα κομμάτια του πάζλ, μπορούν να συναρμολογήσουν το πάζλ και να δουν τελικά τη μορφή της διάσημης νεράιδας. Οι γρίφοι του μονοπατιού ορίζονται σε έξι συγκεκριμένα σημεία-στάσεις στον χώρο του πάρκου. Για να προηγηθούν τα παιδιά στις στάσεις εφοδιάστηκαν με χάρτη (Εικόνα 1) που ετοιμάστηκε στο Google Maps ειδικά για το συγκεκριμένο μαθηματικό μονοπάτι. Ο χάρτης είναι διαθέσιμος στην δ/νση: [goo.gl/iMeu53](https://goo.gl/iMeu53)





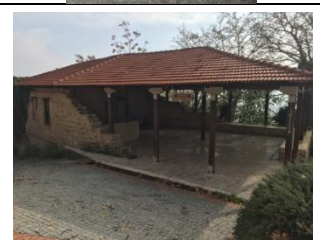


Εικόνα 1. Ο χάρτης με τις στάσεις του μονοπατιού στο Google maps

Όπως φαίνεται στην εικόνα 1, για κάθε στάση του μονοπατιού υπάρχει αντίστοιχη επισήμανση στον χάρτη. Φτάνοντας σε κάθε στάση του μονοπατιού, οι μαθητές βλέπουν μια φωτογραφία του χώρου για να μπορούν να είναι σίγουροι ότι έχουν φτάσει στο σωστό σημείο καθώς και αντίστοιχο κείμενο με οδηγίες για τον γρίφο-πρόβλημα. Η χρήση του Google Maps διευκολύνει στην υλοποίηση των μαθηματικών μονοπατιών επειδή με τη χρήση του GPS και της επισήμανσης της τρέχουσας θέσης της ταμπλέτας μπορούν να βρίσκουν ευκολότερα τις στάσεις. Σε κάθε στάση οι μαθητές καλούνται να λύσουν τα προβλήματα του πίνακα 1. Για τις απαραίτητες μετρήσεις εφοδιάζονται με συμβατική μεζούρα καθώς και με την εφαρμογή

μετρήσεων Object Height (Εικόνα 2). Η επιλογή της εφαρμογής έγινε μετά από ενδελεχή αναζήτηση στην πληθώρα παρόμοιων εφαρμογών που είναι διαθέσιμες δωρεάν για ταμπλέτες με λογισμικό IOS. Η συγκεκριμένη εφαρμογή κρίθηκε αρκετά εύχρηστη και κυρίως ανεκτής ακρίβειας δεδομένου ότι οι διαθέσιμες εφαρμογές του είδους είναι ευαίσθητες στη χρήση της συσκευής και διαφέρουν σημαντικά στην ακρίβεια των μετρήσεων. Οι εφαρμογές της κατηγορίας του Object Height απαιτούν αρχικά να εισαχθεί το ύψος του χρήστη και επιτρέπουν τη μέτρηση της απόστασης του χρήστη από συγκεκριμένο σημείο στόχευσης στην κάμερα της συσκευής, καθώς και το ύψος αντικειμένων, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα για δεδομένη γωνία κλίσης, την οποία μετράνε με τη βοήθεια του κλισίμετρου της συσκευής.

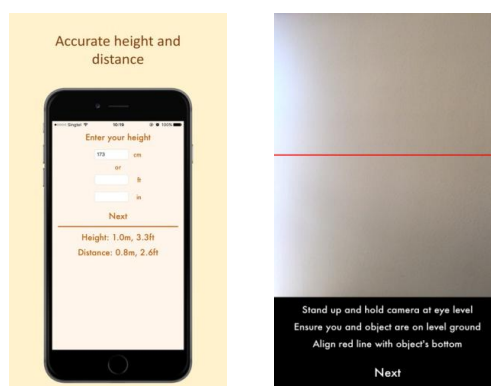
**Πίνακας 1:** Οι στάσεις και οι γρίφοι του μαθηματικού μονοπατιού

A/A	ΣΤΑΣΗ	ΓΡΙΦΟΣ
Στάση 1 «Ο κύκλος»		Υπολογίστε την περίμετρο της κυκλικής πλατείας: α) με τις εφαρμογές της ταμπλέτας και β) με τη μεζούρα (εργασία σε 2 ομάδες).
Στάση 2 «Η εκκλησία»		1. Υπολογίστε το ύψος της εκκλησίας 2. Υπολογίστε το ύψος της πόρτας της εκκλησίας. 3. Υπολογίστε το εμβαδόν της πόρτας (εργασία σε 1 ομάδα)
Στάση 3 «Ο νερόμυλος»		1. Υπολογίστε της ακτίνα της κυκλικής τροχαλίας, 2. Υπολογίστε τη διάμετρο της τροχαλίας, 3. Υπολογίστε τη γωνία του κάθε τμήματος της τροχαλίας σε μοίρες. (εργασία σε 1 ομάδα)
Στάση 4 «Η σκάλα»		1. Υπολογίστε το ύψος της σκάλας, 2. Υπολογίστε το ύψος κάθε σκαλοπατιού, 3. Ο Υπολογίστε τα βήματα ανεβαίνοντας ανά 2 τα σκαλιά. (εργασία σε 1 ομάδα)
Στάση 5 «Το σκέπαστρο»		1. Υπολογίστε το εμβαδόν της ορθογώνιας σκεπασμένης πλατείας με τη μεζούρα, 2. Υπολογίστε το ίδιο εμβαδόν με την εφαρμογή Object Height. (εργασία σε 2 ομάδες)



<p>Στάση 6 «Ο καταρράκτης»</p>		<p>Ανοικτό πρόβλημα. Προτείνετε τρόπους για τον υπολογισμό του ύψους του καταρράκτη Κάρανου.</p>
------------------------------------	---	--

Πιο συγκεκριμένα, η εφαρμογή Object Height αποτελεί μια εφαρμογή τόσο για τη μέτρηση ύψους όσο και μήκους. Για τη μέτρηση, ο χρήστης καλείται να κάνει 3 βήματα: **B1.** να εισάγει το ύψος του, **B2.** να βγάλει μια φωτογραφία έτσι ώστε η κόκκινη γραμμή που εμφανίζεται στην κάμερα να βρίσκεται στη βάση του προς μέτρηση αντικειμένου και **B3.** να βγάλει μια φωτογραφία έτσι η κόκκινη γραμμή της κάμερας να βρίσκεται στην κορυφή του αντικειμένου. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση του ύψους του αντικειμένου αλλά και της απόστασης του χρήστη από το αντικείμενο.



Εικόνα 2. Η διεπαφή χρήστη της εφαρμογής Object Height.

Η εφαρμογή λειτουργεί ως ένα βαθμό με τις αρχές του τοπογραφικού Θεοδόλιχου, ή των σύγχρονων γεωδαιτικών σταθμών. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν να χρησιμοποιούν την εφαρμογή για να κάνουν μετρήσεις χωρίς να κατανοούν πλήρως πως ακριβώς γίνεται ο υπολογισμός τους από τη συσκευή. Χρησιμοποιούν την εφαρμογή δηλαδή ως όργανο μετρήσεων, η λειτουργία του οποίου αποτελεί ένα μαύρο κουτί (είναι αδιαφανής) για τα ίδια. Η διαδικασία της μέτρησης, ενώ θεωρητικά είναι τεκμηριωμένη, πρακτικά είναι ευαίσθητη στην ακρίβεια του κλισιμέτρου της συσκευής, στο ύψος που κρατείται η ταμπλέτα σε σχέση με αυτό που δηλώθηκε στην εφαρμογή, στην ευθυγράμμιση-στόχευση της κόκκινης γραμμής οδηγό που εμφανίζει η εφαρμογή στην κάμερα με τα άκρα των προς μέτρηση αντικειμένων καθώς και με την κλίση της στάσης του χρήστη. Για την παραγωγή μετρήσεων μεγαλύτερης ακρίβειας η ταμπλέτα μπορεί να τοποθετηθεί σε φωτογραφικό τρίποδο με αλφάδια. Όπως και να έχει όμως, οι μετρήσεις θα διαφέρουν από ομάδα σε ομάδα καθώς και από αυτές που θα γίνουν με τη μεζούρα. Ακριβώς πάνω σε αυτό το χαρακτηριστικό στηρίχθηκε η μαθησιακή αξία της επαύξησης του μονοπατιού με τη φορητή εφαρμογή. Εκτός δηλαδή από την χρήση του χάρτη, η χρήση της φορητής τεχνολογίας στο πλαίσιο του μονοπατιού στοχεύει στον προβληματισμό σχετικά με τις μετρήσεις και τα σφάλματα για τον υπολογισμό μηκών, περιφερειών, εμβαδών και του ύψους διαφόρων αντικειμένων.

## 5. Ερευνητικό μέρος

### 5.1 Ερευνητικά ερωτήματα, μεθοδολογία και ερευνητικές συνθήκες

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στο πλαίσιο της έρευνας έχουν ως εξής:

**ΕΕ1:** Μπορούν τα μαθηματικά μονοπάτια, επαυξημένα με τις ψηφιακές φορητές τεχνολογίες, να βοηθήσουν τους μαθητές του δημοτικού σχολείου στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών, όπως αυτές του μήκους, της περιμέτρου, του εμβαδού, και της μέτρησης αυτών;

**ΕΕ2:** Κατά πόσο τα μαθηματικά μονοπάτια επαυξημένα με ψηφιακές φορητές τεχνολογίες είναι αποτελεσματικά, ελκυστικά και εφαρμόσιμα;

Η μεθοδολογία που επιλέχθηκε είναι συνδυασμός του σχεδιαστικού πειράματος (Design Experiment) (Cobb et. al, 2003) και της εξερευνητικής μελέτης περίπτωσης (Yin, 2014). Για τη συλλογή ερευνητικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια, τα φύλλα εργασίας των μαθητών, η συνέντευξη και το ημερολόγιο παρατήρησης του ερευνητή, ο οποίος συμμετείχε και στην υλοποίηση του μονοπατιού ως εκπαιδευτικός.

**Πίνακας 2:** Οι συμμετέχοντες της έρευνας

A/A	Ψευδ/μο	Φύλο	Ηλικία	Διαθέτει προσωπική Ταμπλέτα
1	Π.Α.	A	12	Ναι
2	E.K.	K	12	Ναι
3	X.A.	A	12	Ναι
4	Λ.Κ.	K	12	Όχι

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 4 παιδιά της έκτης τάξης του Δημοτικού. Το δείγμα της παρούσας έρευνας ήταν ευκαιριακό από το κοινωνικό περιβάλλον της ερευνήτριας, τα στοιχεία των οποίων φαίνονται στον πίνακα 2. Το δείγμα της παρούσας μελέτης ήταν ευκαιριακό. Για τη συμμετοχή τηρήθηκαν οι κανόνες ερευνητικής δεοντολογίας και εξασφαλίστηκε η συγκατάθεση των παιδιών και των κηδεμόνων τους κατόπιν ενημέρωσης σχετικά με τον σκοπό και την διαδικασία της έρευνας. Όλα τα παιδιά ήξεραν να χειρίζονται ταμπλέτα ενώ τα παιδιά που είχαν προσωπική ταμπλέτα δήλωσαν ότι την χρησιμοποιούν από 1 έως 3 ώρες καθημερινά για παιχνίδια και περιήγηση στο διαδίκτυο. Τα παιδιά υλοποίησαν το μαθηματικό μονοπάτι την Κυριακή, 18/12/2016 και η συνολική διάρκεια ήταν 75 λεπτά. Για την προετοιμασία των παιδιών προηγήθηκε τρίωρη συνάντηση στην οποία εξοικειώθηκαν με τη χρήση της ταμπλέτας και της μεζούρας ενώ έγινε διερεύνηση των γνώσεων των μαθητών για τις έννοιες του μονοπατιού και επαναληπτικές ασκήσεις με χαρτί και μολύβι, σχετικές με τους γρίφους του μονοπατιού.

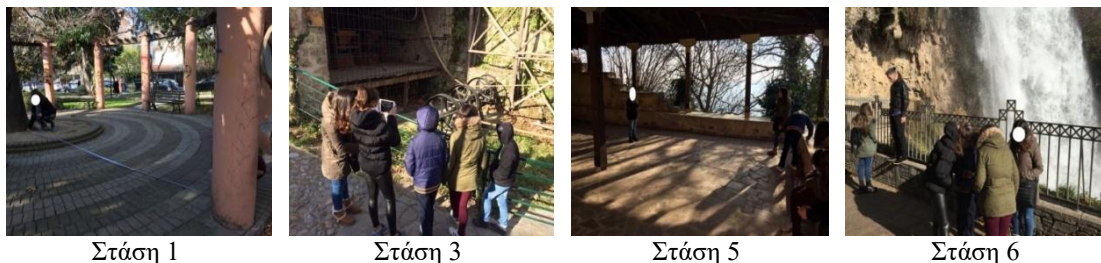
## 5.2 Ερευνητικά αποτελέσματα

Από την αρχική διερεύνηση των γνώσεων των παιδιών και τις απαντήσεις τους στα ερωτηματολόγια σχετικά με τις έννοιες μήκος, περίμετρος, εμβαδό και τη μέτρηση αυτών φάνηκε ότι θυμόντουσαν τους τύπους για τα ορθογώνια ενώ αντιμετώπιζαν πρόβλημα κυρίως στους τύπους του κύκλου. Ειδικότερα, κανένας μαθητής δεν θυμόταν τον τύπο υπολογισμού της περιμέτρου του κύκλου, ενώ παρατηρήθηκε πως οι περισσότεροι μαθητές μπερδευαν την διάμετρο με την ακτίνα του κύκλου. Κατά την εκπαιδευτική προετοιμασία των μαθητών, έγινε επανάληψη των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών και λύθηκαν ενδεχόμενες απορίες και παρανοήσεις τους. Όσον αφορά τις ταμπλέτες, γνώριζαν ήδη να τις χρησιμοποιούν και έμαθαν γρήγορα την χρήση του χάρτη Google Maps καθώς και της εφαρμογής Object Height και ανυπομονούσαν να υλοποιήσουν το μονοπάτι.

## Παρατηρήσεις από την υλοποίηση

Οι μαθητές ολοκλήρωσαν το μονοπάτι λύνοντας τα προβλήματα και των έξι στάσεων, επιπλέον διατήρησαν το ενδιαφέρον τους και τον ενθουσιασμό τους σε όλη

τη διάρκεια της δραστηριότητας. Οι μαθητές δούλεψαν ομαδικά (είτε σε ομάδα των 2 είτε των 4 ατόμων), συνεργάστηκαν, μοίρασαν τους ρόλους, συζήτησαν και πήραν από κοινού αποφάσεις και πρωτοβουλίες. Όλοι οι μαθητές χρησιμοποίησαν την ταμπλέτα χρησιμοποιώντας και την εφαρμογή Google Maps αλλά και την εφαρμογή Object Height. Στην εικόνα 3 εμφανίζονται φωτογραφίες χαρακτηριστικές από την δράση των παιδιών κατά την υλοποίηση σε διάφορες στάσεις του μονοπατιού.



Στάση 1

Στάση 3

Στάση 5

Στάση 6

Εικόνα 3. Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από την υλοποίηση του μονοπατιού

Κατά τη λύση των προβλημάτων εμφανίστηκαν αναμενόμενες δυσκολίες σε σχέση με τα απαιτούμενα μαθηματικά οι οποίες ξεπεράστηκαν μέσα από τη συνεργασία των παιδιών. Ειδικότερα, τα παιδιά μπέρδευαν την ακτίνα με τη διάμετρο στους υπολογισμούς σε σχέση με τον κύκλο (στάσεις 1 και 3) αλλά με τη συζήτηση μεταξύ τους και ανατρέχοντας στο υλικό της προετοιμασίας εύρισκαν τη λύση. Αυτό δείχνει ότι είχαν την ευκαιρία να εφαρμόσουν και να ενισχύσουν τις σχετικές γνώσεις.

### Ευρήματα σε σχέση με το Google Maps

Οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι με το πάρκο των καταρρακτών και ορισμένες στάσεις τις εύρισκαν χωρίς να χρειάζονται τον χάρτη. Το πάρκο όμως είναι αρκετά μεγάλο ώστε κάποιες στάσεις (π.χ. Νο3 και Νο4) να μην είναι γνωστές στα παιδιά. Στις περιπτώσεις αυτές τα παιδιά χρησιμοποιούσαν τον χάρτη και το στίγμα της θέσης τους ώστε να πλοηγηθούν στο σημείο. Η αυτόματη πλοήγηση της Google δεν χρησιμοποιήθηκε. Οι μαθητές παρατήρησαν τις αποκλίσεις της απεικόνισης του στίγματος του GPS στον χάρτη, όταν η σύνδεση στο διαδίκτυο δεν ήταν ισχυρή και τις ερμήνευαν κριτικά με βάση της θέση γνωστών χωρόσημων. Χαρακτηριστικό είναι το απόσπασμα διαλόγων από την στάση 4 («Η σκάλα»): **Α.Κ.:** «Κυρία, αυτό στον χάρτη δείχνει το στίγμα μας να μετακινείται, δεν λέει ακριβώς το πού είμαστε.» και **Α.Κ.:** «Κυρία, εμείς είμαστε εδώ ενώ το σημείο στο χάρτη λέει πως η στάση Νο4 είναι πιο μακριά». Η δυνατότητα ενσωμάτωσης πολυμεσικών πληροφοριών και οδηγιών για κάθε στάση στον χάρτη είναι μια σαφής βελτίωση σε σχέση με τα συμβατικά μαθηματικά μονοπάτια όπου χρησιμοποιείται έντυπος χάρτης. Ο ψηφιακός χάρτης βελτιώνει σημαντικά το μαθηματικό μονοπάτι, επιτρέπει επιπλέον της ευκολότερης πλοήγησης και της παροχής πληροφοριών, την επικοινωνία και συνεργασία μεταξύ διαφορετικών ομάδων οι οποίες εργάζονται σύγχρονα ή ασύγχρονα. Οι ομάδες μπορούν να αφήνουν ίχνη και αποτελέσματα στον χάρτη και να κάνουν τη συμμετοχή πιο διασκεδαστική.

### Ευρήματα σχετικά με τις μετρήσεις

Όπως ήταν αναμενόμενο, οι μαθητές εύρισκαν διαφορετικά αποτελέσματα στις μετρήσεις με τη μεζούρα και με την εφαρμογή Object Height. Στον πίνακα 3 φαίνονται χαρακτηριστικά σχόλια των μαθητών για τις διαφορές στις μετρήσεις σε διάφορες στάσεις. Γενικά, οι μαθητές εμπιστεύτηκαν αυθόρμητα τις μετρήσεις με τη μεζούρα και μπήκαν σε μια διαδικασία να εξετάζουν την ορθότητα των μετρήσεων με

την ταμπλέτα με βάση τις τιμές που λάμβαναν με τη μεζούρα. Ίσως γιατί δεν μπορούσαν να εμπιστευτούν τις τιμές από την αδιαφανή διαδικασία μέτρησης της ταμπλέτας που αποτελεί για αυτά μαύρο κουτί. Σε περίπτωση αποκλίσεων προσπαθούσαν να ξανάμετρήσουν ώστε οι τιμές της ταμπλέτας να προσεγγίζουν τις τιμές της μεζούρας. Η διαδικασία αυτή βοήθησε τα παιδιά να κατανοήσουν τους παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια της μέτρησης με την εφαρμογή (αρχικό ύψος, στόχευση). Επίσης, έδειξαν ανοχή στη διαφορά στις τιμές των μετρήσεων, όπως δείχνει η στήλη «απαντήσεις» του πίνακα 3. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις των στάσεων 3 και 6 όπου δεν ήταν δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η μεζούρα παρά μόνο η ταμπλέτα. Στην περίπτωση της στάσης 3, οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν τη διάμετρο μιας κυκλικής μεταλλικής κατασκευής από απόσταση. Η πρώτη μέτρηση είναι 3m και απορρίπτεται ως λανθασμένη από τα παιδιά επειδή εμπειρικά κρίνουν ότι είναι πολύ μεγάλη. Επίσης, στην περίπτωση της στάσης 6 οι μαθητές καταλήγουν ότι με τη μεζούρα δεν μπορούν να μετρήσουν το ύψος του καταρράκτη και μόνο να εκτιμήσουν ένα μέρος του με την ταμπλέτα. Οι μαθητές αποκτούν έτσι εμπειρίες σημαντικές για να οικοδομήσουν έννοιες σε σχέση με την προσέγγιση, το σφάλμα και τη μέτρηση ύψους και αποστάσεων με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος ή της χρήσης αναλογιών σε φωτογραφίες.

**Πίνακας 3:** Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα από τις μετρήσεις των μαθητών

Πίνακας 5: Παρατηρήσεις σχετικά με τα αποτελέσματα των μετρήσεων των μαθητών										
ΣΤΑΣΗ	ΣΧΟΛΙΑ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ								
No1 «Ο κύκλος»	<b>Π.Α. (ομάδα Β):</b> «Κυρία εμείς γιατί βρήκαμε 5,10μ και η ομάδα των κοριτσιών (ομάδα Α) βρήκε 4,77μ; Μήπως δεν μετρήσαμε σωστά;» <b>Χ.Α. (ομάδα Β):</b> «Κυρία αν είναι να το ξανά μετρήσουμε για να είμαστε σίγουροι.»	<table><tr><td>Ομάδα Α</td><td>Ομάδα Β</td></tr><tr><td><math>\alpha=4,77\mu.</math></td><td><math>\alpha=5,10\mu.</math></td></tr><tr><td><math>\pi=29,96\mu.</math></td><td><math>\pi=31,40\mu.</math></td></tr></table>	Ομάδα Α	Ομάδα Β	$\alpha=4,77\mu.$	$\alpha=5,10\mu.$	$\pi=29,96\mu.$	$\pi=31,40\mu.$		
Ομάδα Α	Ομάδα Β									
$\alpha=4,77\mu.$	$\alpha=5,10\mu.$									
$\pi=29,96\mu.$	$\pi=31,40\mu.$									
No3 «Ο νερόμυλος»	<b>Π.Α.:</b> «Κυρία αποκλείεται αυτό να είναι 3μ., φαίνεται πως είναι πολύ λιγότερο».	α) κύκλος β) διάμετρος= 1,10μ. γ) ακτίνα= 0,55μ. δ) 6 τμήματα ε) $360^{\circ}:6= 60^{\circ}$								
No5 «Το σκέπαστρο»	<b>Ε.Κ.:</b> «Κυρία βγάζει ένα μείον μπροστά στο αποτέλεσμα της μέτρησης, μήπως επειδή είναι σκοτεινά εδώ δεν το μετρήσε καλά; Να το ξανά κάνουμε. <b>Ε.Κ.:</b> «Τώρα έβγαλε κοντά στο αποτέλεσμα της άλλης ομάδας, άρα οκ.»	<table><tr><td>Ομάδα Α</td><td>Ομάδα Β</td></tr><tr><td><math>\alpha=11,7\mu.</math></td><td><math>\alpha=11\mu.</math></td></tr><tr><td><math>\beta=8,70\mu.</math></td><td><math>\beta=8,90\mu.</math></td></tr><tr><td><math>E=101,70 \tau.\mu.</math></td><td><math>E=97,9 \tau.\mu.</math></td></tr></table>	Ομάδα Α	Ομάδα Β	$\alpha=11,7\mu.$	$\alpha=11\mu.$	$\beta=8,70\mu.$	$\beta=8,90\mu.$	$E=101,70 \tau.\mu.$	$E=97,9 \tau.\mu.$
Ομάδα Α	Ομάδα Β									
$\alpha=11,7\mu.$	$\alpha=11\mu.$									
$\beta=8,70\mu.$	$\beta=8,90\mu.$									
$E=101,70 \tau.\mu.$	$E=97,9 \tau.\mu.$									
No6 «Καταρράκτης»	<b>Π.Α:</b> «Ίσως μπορούσαμε να μετρήσουμε μόνο το σημείο που ξεκινά ο καταρράκτης μέχρι το σημείο που βρισκόμαστε.» <b>Ε.Κ:</b> «Ούτε και με τη μεζούρα μπορούμε.»	Συμπέραναν πως α) δεν γινόταν να μετρηθεί το ύψος με τη μεζούρα, β) μόνο ένα μέρος του με την εφαρμογή της ταμπλέτας για τη μέτρηση του ύψους και γ) ίσως να γίνεται με άλλα ειδικά όργανα που δεν τα γνωρίζουν.								

Οι δραστηριότητες αυτές για τις μετρήσεις με εναλλακτικές μεθόδους θα μπορούσαν να αποτελούν επέκταση του μονοπατιού μέσα στην τάξη. Τέλος, οι μαθητές απομυθοποιούν τις ηλεκτρονικές συσκευές ως μηχανές απόλυτης ακρίβειας όταν έχουν να κάνουν με μέτρηση μεγεθών του πραγματικού κόσμου θέτοντας έτσι βάσεις



για οικοδόμηση εννοιών της υπολογιστικής σκέψης. Σε μεγαλύτερες τάξεις οι μαθητές μπορούν να προβληματιστούν για τους αλγορίθμους και τα θεωρήματα που εφαρμόζουν οι εφαρμογές τύπου Object Height, ακόμη και να προσπαθήσουν να κατασκευάσουν δικές τους εφαρμογές αναπτύσσοντας έτσι δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης.

### 5.3 Σύνοψη των ερευνητικών αποτελεσμάτων

Στην ενότητα αυτή δίνονται απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα με βάση τα ευρήματα.

**EE1: Μπορούν τα μαθηματικά μονοπάτια, επαυξημένα με τις ψηφιακές φορητές τεχνολογίες, να βοηθήσουν τους μαθητές του δημοτικού σχολείου στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών, όπως αυτές του μήκους, της περιμέτρου, του εμβαδού, και της μέτρησης αυτών;**

Το μαθηματικό μονοπάτι που μελετήθηκε και η χρήση της ταμπλέτας φάνηκε να συμβάλουν στην ενίσχυση των γνώσεων μαθηματικών εννοιών που επιλέχθηκαν μέσα από την εφαρμογή τους σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Ειδικότερα, οι μαθητές εξασκήθηκαν στη μέτρηση μήκους, τη διάκριση της ακτίνας από τη διάμετρο και της περιμέτρου από το εμβαδόν, καθώς και στον υπολογισμό εμβαδού παραλληλόγραμμου και κύκλου μεταφέροντας τις σχολικές γνώσεις σε ρεαλιστικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής στον φυσικό χώρο. Επιπλέον, οι μαθητές ευαισθητοποιήθηκαν στο ζήτημα της ακρίβειας και των σφαλμάτων των μετρήσεων ενώ κατανόησαν τα όρια της χρησιμότητας των σχολικών γνώσεων σε πραγματικές καταστάσεις στην καθημερινή ζωή. Με τη χρήση του ψηφιακού χάρτη οι μαθητές εξασκήθηκαν στην ανάγνωση του χάρτη και τη χρήση του για την πλοήγηση στον χώρο. Συνεκτιμώντας τις παρατηρήσεις από την εφαρμογή του μαθηματικού μονοπατιού θεωρούμε ότι τα μαθηματικά μονοπάτια επαυξημένα με τις φορητές τεχνολογίες είναι μαθησιακά πλουσιότερα για τις συγκεκριμένες έννοιες σε σχέση με τα συμβατικά.

**EE2: Κατά πόσο τα μαθηματικά μονοπάτια επαυξημένα με ψηφιακές φορητές τεχνολογίες είναι αποτελεσματικά, ελκυστικά και εφαρμόσιμα;**

Ως προς την **αποτελεσματικότητα** των μαθηματικών μονοπατιών τα αποτελέσματα είναι θετικά καθώς επιτεύχθηκαν οι μαθησιακοί στόχοι του μαθηματικού μονοπατιού, όπως η χρήση των μαθηματικών εννοιών σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, η χρήση της ταμπλέτας ως εργαλείο μάθησης, η χρήση των εφαρμογών Google Maps και Object Height, ο διαχωρισμός της ακτίνας με τη διάμετρο, η σύγκριση της μεζούρας και της εφαρμογής Object Height ως εργαλείο μέτρησης αλλά και η συνεργασία και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών παρατηρήθηκαν σε όλους τους μαθητές σε ικανοποιητικό βαθμό. Επιπλέον, οι μαθητές, μέσα από τη συνειδητοποίηση των ορίων των δυνατοτήτων τους στις μετρήσεις και στην ακρίβεια των υπολογισμών, απέκτησαν εμπειρίες σημαντικές για την οικοδόμηση νέων γνώσεων μαθηματικών και υπολογιστικής σκέψης.

Ως προς την **εφαρμοσιμότητα** του μαθηματικού μονοπατιού, αυτή φαίνεται πως είναι εφικτή και αξίζει τον επιπλέον κόπο και χρόνο εξαιτίας όχι μόνο της αποτελεσματικότητας αλλά και της επίδρασης στην ποιότητα της αλληλεπίδρασης και της διάθεσης των μαθητών. Η εφαρμογή των μαθηματικών μονοπατιών χρειάζεται προετοιμασία και εξάσκηση στην κατάλληλη ενορχήστρωση και διδακτική διαχείριση από τον εκπαιδευτικό. Η προσεκτική επιλογή του χώρου και των στάσεων σε συνδυασμό με τον αριθμό των συμμετεχόντων μπορεί να αποτρέψει αρκετά ανεπιθύμητα ζητήματα και να μειώσει τους κινδύνους. Η ανάπτυξη και η τεκμηρίωση μιας κοινόχρηστης συλλογής μαθηματικών μονοπατιών σε κάθε περιοχή μπορεί να

βελτιώσει την εφαρμοσιμότητα τους σε τυπικό ή άτυπο πλαίσιο (γονείς, σύλλογοι, εκπαιδευτικοί περίπατοι). Ο χαλαρός εμπλουτισμός με την τεχνολογία ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν τα μονοπάτια και χωρίς αυτήν θα μπορούσε να αποτελεί ένα μέτρο αύξησης της εφαρμοσιμότητας τους και της σταδιακής μετάβασης σε μονοπάτια επαυξημένης πραγματικότητας οποία είναι πιο ελκυστικά και μαθησιακά πλούσια για τους μαθητές.

Τέλος, ως προς την **ελκυστικότητα**, το μαθηματικό μονοπάτι που εφαρμόστηκε φάνηκε να αρέσει ιδιαίτερα στους μαθητές καθώς είχαν τη δυνατότητα να περιηγηθούν και να περιπλανηθούν στον χώρο, να πειραματιστούν και κάθε φορά είχαν την αγωνία να εντοπίσουν το σημείο όπου κρύβεται ο επόμενος μαθηματικός γρίφος. Στην ερώτηση της ερευνήτριας σχετικά με το πώς θα χαρακτήριζαν το μαθηματικό μονοπάτι που μόλις ολοκλήρωσαν μερικά επίθετα από τις απαντήσεις είναι: «καλό, διασκεδαστικό, φανταστικό, διαφορετικό». Για τους μικρούς μαθητές αποτελούν μια ευχάριστη περιπέτεια καθώς έχει παιγνιώδη μορφή και καλούνται να περιπλανηθούν σε χώρους εκτός του σχολικού πλαισίου, σε χώρους ευχάριστους, όπως το πάρκο των καταρρακτών στην προκειμένη περίπτωση, δίνοντας έτσι στη μάθηση μια άλλη διάσταση, πιο ευχάριστη και πιο διασκεδαστική. Τέλος, οι θετικές εντυπώσεις των μαθητών έγιναν εμφανείς και από το γεγονός πως θα ήθελαν να ξανά συμμετάσχουν σε κάποιο ανάλογο μαθηματικό μονοπάτι μελλοντικά: «κυρία αν ξανά κάνετε και άλλο τέτοιο πείραμα, σας παρακαλούμε να μας ξανάεπιλέξετε να το κάνουμε μαζί!».

## 6. Σύνοψη-συζήτηση

Η φορητή μάθηση αποτελεί ένα σύγχρονο παιδαγωγικό μοντέλο το οποίο μπορεί να καταστήσει πιο ευχάριστη και αποτελεσματική τη μάθηση για τα παιδιά καθώς αξιοποιεί τις φορητές συσκευές που είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς σε όλες τις ηλικίες. Η φορητή μάθηση εναρμονίζει την εκπαιδευτική διαδικασία με τη σύγχρονη τεχνολογική πραγματικότητα των παιδιών. Λόγω του ιδιαίτερου χαρακτηριστικού της φορητότητας, η μάθηση μπορεί να συμβεί σε οποιοδήποτε πλαίσιο, ακόμη και εκτός σχολείου και συγχρόνως να υποστηρίξει την οικοδόμηση της γνώσης στον χώρο εφαρμογής της. Οι ιδιότητες αυτές καθιστούν συμβατή τη φορητή μάθηση με τη PME. Παρά το γεγονός αυτό, οι εφαρμογές των φορητών τεχνολογιών στη PME είναι ελάχιστες και δεν αξιοποιούν πλήρως το μοντέλο της φορητής μάθησης. Για τη διευκόλυνση του μαθησιακού σχεδιασμού εφαρμογής της φορητής μάθησης στη ρεαλιστική εκπαίδευση διερευνήθηκε η δυνατότητα εμπλουτισμού του μοντέλου των μαθηματικών μονοπατιών με φορητές τεχνολογίες. Το μαθηματικό μονοπάτι που σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε πειραματικά στο πλαίσιο αυτό για μαθητές δημοτικού φάνηκε να έχει θετικά αποτελέσματα για τους μαθητές και να συμβάλει στη μεταφορά των σχολικών γνώσεων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Η φορητή μάθηση κάνει το μαθηματικό μονοπάτι πιο εύκολο στην εφαρμογή, πιο αποτελεσματικό και πιο ελκυστικό. Οι μαθητές εφάρμοσαν και βελτίωσαν δεξιότητες χρήσης χάρτη με την υποστήριξη του GPS και της εφαρμογής Google Maps. Επιπλέον, συγκρίνοντας τις μετρήσεις με μεζούρα σε σχέση με αυτές της εφαρμογής Objegt Height ευαισθητοποιήθηκαν ως προς την ακρίβεια των μετρήσεων και τις έννοιες του σφάλματος και της προσέγγισης. Φτάνοντας στα όρια τις δυνατότητες πρακτικών εφαρμογών της μέτρησης με μεζούρα και την ταμπλέτα οι μαθητές θέτουν τις βάσεις για οικοδόμηση νέων γνώσεων όπως τις εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος και τις μετρήσεις μέσω αναλογιών σε φωτογραφίες. Επίσης, θέτουν τις βάσεις για οικοδόμηση εννοιών της υπολογιστικής σκέψης όπως ο αυτοματισμός των μετρήσεων και η λειτουργία των αισθητήρων. Γενικά, η πεποίθηση των ερευνητών

είναι πως τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι η φορητή μάθηση μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση και στην ανάδειξη της PME των μαθητών του δημοτικού σχολείου. Η έρευνα μπορεί να εφαρμοστεί μελλοντικά σε μεγαλύτερη κλίμακα με περισσότερα μονοπάτια, μεγαλύτερο δείγμα παιδιών, εφαρμογή συνεργατικών σεναρίων και πιο αναλυτική καταγραφή της αλληλεπίδρασης κατά την υλοποίηση. Τέλος, θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη μια διαδικτυακής κοινότητας σχεδιασμού και διαμοιρασμού μαθηματικών μονοπατιών με φορητές τεχνολογίες όπου ο σχεδιασμός και η υλοποίηση θα γίνεται ολοκληρωμένα.

## 7. Βιβλιογραφία

- Zarānēs, N. & Tsāra, E. (2008). Εκπαιδευτικό Λογισμικό βασισμένο στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά για τα πρώτα έτη της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 70, 81-93.
- Κολέζα, Ε. (2000). *Ρεαλιστικά μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση*. Αθήνα: Leader Books
- Μπουζιώτη, Μ. & Πανούτσου, Ι. (2014). Η προπαίδεια του 2 και του 4: σχεδιασμός εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων βασισμένων στα Ρεαλιστικά Μαθηματικά με αξιοποίηση του Macromedia Flash. Στο Π. Αναστασιάδης, Ν. Ζαράνης, Β. Οικονομίδης & Μ. Καλογιαννάκης, (Επιμ.), *Πρακτικά 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Τεχνολογίες της Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση»*, (σελ. 1086-1093). Ελλάδα, Ρέθυμνο.
- Bouck, E., Flanagan, S., Miller, B., & Bassette, L. (2012). Rethinking everyday technology as assistive technology to meet students' IEP goals. *Journal of Special Education Technology*, 27 (4), 47-57.
- Bray, A., Oldham, E., & Tangney, B. (2015). Technology-mediated realistic mathematics education and the bridge21 model: A teaching experiment. In *Proceedings of CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2487-2493). Czech Republic, Prague.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1: 9 – 13.
- Cross, R. (1997). Developing Math Trails, *Mathematics Teaching*, 158, 38–39.
- Fessakis, G., Bekri, A. F., & Konstantopoulou, A. Designing a Mobile Game for Spatial and Map Abilities of Kindergarten Children. In 10th European Conference on Games Based Learning: ECGBL 2016 (p. 183).
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 1(1), 3-8.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Riedel Publishing Company.
- Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory, *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796.
- Kraut, R. (2013). Policy guidelines for mobile learning. Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.
- Kukuluska-Hulme, A., & Traxler, J. (2005). Mobile teaching and learning. In A. Kukuluska-Hulme & J. Traxler (eds). *Mobile learning. A handbook for educators and trainers* (pp. 25-44). London: Routledge.
- Markouzis, D. and Fessakis, G. (2015) "Interactive Storytelling and Mobile Augmented Reality Applications for Learning and Entertainment – A rapid prototyping perspective", In: *International Conference on Interactive Mobile Communication Technologies and Learning (IMCL)*, 2015, IEEE, pp 4-8.
- Martin, F., & Ertzberger, J. (2013). Here and now mobile learning: An experimental study on the use of mobile technology. *Computers & Education*, 68, 76-85.
- Richardson, M. (2004). Designing Math Trails for the Elementary School, *Teaching Children Mathematics*, 11(1), 8-14
- Shoaf, M. M., Pollak, H., & Schneider, J. (2004). *Math trails*. Lexington: COMAP
- Soykan, E. & Uzunboylu, H. (2015). New Trends on mobile learning area: The review of published articles on mobile learning in science direct database. *World Journal on Educational Technology*, 7(1), 31-41.
- Traxler, J. (2005). Defining mobile learning. P. Isaias, c. Borg, P. Kommers & P. Bonnano (eds) In *Proceedings of IADIS International Conference on Mobile Learning* (pp. 261-266). Qawra, Maldives: IADIS.

- Widjaja, Y. B., & Heck, A. (2003). How a realistic mathematics education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian junior high school. *Journal of science and mathematics Education in Southeast Asia*, 26(2), 1-51.
- Yin, R. (2014). Case study Research. Design and methods. Fifth edition Sage Publications.
- Zaranis, N. (2014). The use of ICT in the first grade of primary school for teaching circles, triangles, rectangles and squares. *In Proceedings of the 2014 Workshop on Interaction Design in Educational Environments (IDEE '14) (pp. 81-88)*. USA, New York.
- Zaranis, N., Baralis, G., Skordialos, E., (2015). Comparing the effectiveness of using ICT in the first grade students based on Realistic Mathematics Education. *International Journal of Information Technology & Computer Science*, 19(1), 127-138.
- Zaranis, N., Baralis, G., Skordialos, E., (2015). The use of ICT in teaching subtraction to the first grade students. *In Proceedings of Fourteenth TheIHER International Conference* (pp. 99-104). France, Paris