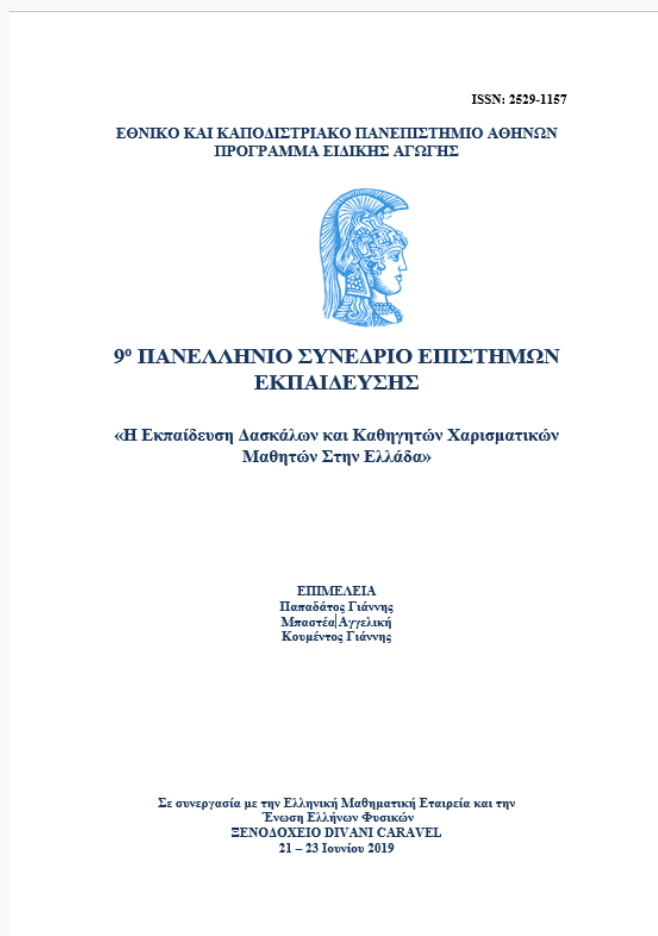


Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 9 (2019)

9ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



Εκπαίδευση Χαρισματικών Μαθητών και Επίπεδα Van Hiele

Γιάννης Νικολόπουλος

doi: [10.12681/edusc.3191](https://doi.org/10.12681/edusc.3191)

Βιβλιογραφική αναφορά:

Νικολόπουλος Γ. (2020). Εκπαίδευση Χαρισματικών Μαθητών και Επίπεδα Van Hiele. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, 9, 944–959. <https://doi.org/10.12681/edusc.3191>

Εκπαίδευση Χαρισματικών Μαθητών και Επίπεδα Van Hiele

Νικολόπουλος Γιάννης, Μαθηματικός – Ειδικός Παιδαγωγός, Υπ. Δρ. ΠΤΔΕ,
Ετήσιο πρόγραμμα Ειδικής Αγωγής-ΕΚΠΑ, e-mail: inikolop@primedu.uoa.gr

Περίληψη

Η εισήγηση έχει σαν βάση την βιβλιογραφική ανασκόπηση και την εμπειρία της μακρόχρονης διδασκαλίας, επίσης υποστηρίζεται έμμεσα από έρευνα στα πλαίσια διατριβής που εστιάζεται στον Όγκο των Στερεών και αξιοποιεί τα επίπεδα Van Hiele σε μαθητές του Γυμνασίου. Το ερώτημα που απασχολεί είναι πώς και πόσο μπορούμε να αναπτύξουμε τα Χαρισματικά παιδιά; Αλλά ας δούμε πώς ορίζουν οι 'ειδικοί' σήμερα την Χαρισματικότητα; Υπάρχουν πολλοί ορισμοί που έχουν 'ξεπεράσει' ή αλλιώς δεν αρκούνται στον Δείκτη Νοημοσύνης (Δ.Ν.) με ακραίο παράδειγμα τον Gardner που προτείνει τα οκτώ είδη Νοημοσύνης. Εμείς στηριζόμαστε σε ορισμό που διατύπωσαν οι Renzulli και Reis (1994), όπου η Χαρισματικότητα συνίσταται σε συμπεριφορές βασικών ανθρώπινων γνωρισμάτων: 1. Την Νοητική Ικανότητα, με τον Δ.Ν. άνω του Μέσου Όρου. 2. Του υψηλού βαθμού προσήλωσης στο έργο (πιθανώς λόγω παρελθόντων γνώσεων και επίσης ενδιαφέροντος) και 3. Του υψηλού βαθμού δημιουργικότητας. Για να εκπαιδύσουμε Χαρισματικούς Μαθητές πρέπει καταρχάς να επιμορφώσουμε κατάλληλα εκπαιδευτικούς και να δούμε τις ενότητες στις οποίες θα επενδύσουμε για να βελτιώσουμε τους εν λόγω μαθητές. Να σημειώσουμε ότι εκτός από τα Γλωσσικά πλεονεκτήματα που διαθέτουν οι χαρισματικοί, έχουν επίσης σπουδαίες επιδόσεις στα Μαθηματικά.

Θα στηριχθούμε στην θεωρία των Επιπέδων Van Hiele σε συνδυασμό με Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ΖΕΑ) του Vygotsky. Επίσης θα σταθούμε στον τρόπο που η σημερινή κοινωνία αντιμετωπίζει τα παιδιά που τα ονομάζουμε Χαρισματικά και τι κάνουν οι αρμόδιοι φορείς στην κατεύθυνση της μόρφωσης.

Λέξεις Κλειδιά: Χαρισματικότητα, Επίπεδα Van Hiele, Δεξιότητα, Δημιουργικότητα.

Abstract

The paper is based on the literature review and the experience of long-term teaching, is also indirectly supported by research in a dissertation that focuses on the volume of solids and utilizes Van Hiele levels in high school students. The question is how and how much can we develop Charismatic children? But let's see how 'experts' define Charisma today. There are many definitions that have 'exceeded' or otherwise are not enough in the Intelligence Index (IQ) with the extreme example of Gardner proposing the eight types of Intelligence. We rely on a definition formulated by Renzulli and Reis (1994), where Charisma consists of behaviors of basic human traits: 1. Mental Ability, with D.N. above average. 2. The high degree of dedication to the project (probably due to past knowledge and also interest) and 3. The high degree of creativity. In order to educate Charismatic Students we must first train teachers appropriately and look at the modules in which we will invest to improve these students. Note that in addition to the linguistic advantages of the gifted, they also perform well in Mathematics.

We will rely on Van Hiele Level Theory in conjunction with Vygotsky's Upcoming Development Zone (ZEA). We will also focus on the way today's society treats the children we call Charismatic and what the competent bodies do in the direction of education.

Εισαγωγή

Στόχος της εν λόγω εισήγησης είναι να προτείνει και να θεμελιώσει ένα 'πακέτο οδηγό' για την βελτίωση των ήδη ανιχνευμένων χαρισματικών παιδιών. Στηρίζουμε την προσπάθειά μας στην Μαθηματική Διδασκαλία και στην Αξιολόγηση αυτής από τα καταξιωμένα επίπεδα Van Hiele.

Να σημειώσουμε ότι δεν αποτελεί μοναδική προϋπόθεση η Υψηλότερη Νοημοσύνη δηλαδή το γνωστό IQ που συνήθως το συσχετίζουν με γενετικά χαρακτηριστικά. Θα παρατηρήσουμε στο παιδί από την αισθητικοκινητική περίοδο την τάση οπτικής, ακουστικής, απτικής αναζήτησης πέρα από την ηλικιακή του ωρίμανση. Στην επόμενη φάση είναι πολύ χαρακτηριστική η μεγάλη επιτυχία και σπριτάδα στην συναρμολόγηση παιχνιδιών και ειδικά παζλ. Στη συνέχεια και στο νηπιαγωγείο θα παρατηρήσουμε αναζήτηση ερμηνειών όπως για παράδειγμα: «Η πολική αρκούδα πέφτει σε χειμέρια νάρκη;» ή/και «γιατί το βράδυ είναι πιο δυνατό το φως του φεγγαριού;» ακόμη «πού οφείλεται ότι η θάλασσα έχει υψηλό κύμα χωρίς στην ξηρά να έχουμε δυνατό αέρα;» και άλλες απορίες. Αυτά δείχνουν ένα ανήσυχο πνεύμα που ζητά ερμηνείες και την σε βάθος κατάκτηση γνώσεων. Θα στηριχθούμε στην θεωρία των Επιπέδων Van Hiele σε συνδυασμό με Ζ.Ε.Α. (Vygotsky, 1978). Να τονίσουμε ότι η εφαρμογή των επιπέδων Van Hiele ξεκίνησε στην Επιπεδομετρία, προχώρησε στην Στερεομετρία, σήμερα εφαρμόζεται στην Αριθμητική και στην Άλγεβρα ενώ πιθανότατα αύριο γενικότερα στις Θετικές Επιστήμες.

Piaget και Van Hiele

Τι ισχυρίζονται αυτοί οι παιδαγωγοί; Έχουν τις ίδιες ή μήπως παρεμφερείς απόψεις; Εξετάζοντας τη θεωρία των van Hiele και τη θεωρία του Piaget υπό το πρίσμα της κριτικής, παρατηρείται ότι «μεγάλο μέρος της εργασίας των van Hiele έχει τις ρίζες της στη θεωρία του Piaget» (Πατσιομίτου, 2013). Αλλά στο ίδιο κείμενο λίγο πιο κάτω διαβάζουμε: «Ο Pierre van Hiele επικεντρώνοντας στις διαφορές της θεωρίας του από εκείνη του Jean Piaget, επισημαίνει μεταξύ άλλων: (α) την ανάγκη να δώσουμε ερεθίσματα στα παιδιά ώστε να μεταβούν από το ένα επίπεδο στο επόμενο· (β) τον πολύ σημαντικό ρόλο της γλώσσας στην ανάπτυξη της σκέψης· (γ) ότι η μαθησιακή διαδικασία επηρεάζεται από το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται· (δ) ότι οι δομές του ανώτερου επιπέδου είναι αποτέλεσμα της μάθησης του χαμηλότερου επιπέδου, σε αντίθεση με τον Piaget που πίστευε ότι τα παιδιά γεννιούνται έχοντας την υψηλότερη δομή». Άρα και όσοι προσπαθούν να ταυτίσουν τις θεωρίες των ανωτέρω Παιδαγωγών φτάνουν σε αδιέξοδο γιατί οι Van Hiele πλησίαζαν στον Vygotsky και όχι στον Piaget. Εμείς λοιπόν θα υιοθετήσουμε κριτικά τους Vygotsky - Van Hiele και δεν θα στηριχθούμε στην ηλικιακή ωρίμανση του Piaget; Τα «σχήματα» κατά τον Piaget (δεν προσδιορίζονται ως γεωμετρικά) όμως αποτελούν ένα είδος «μονάδων επίγνωσης και επικοινωνίας του οργανισμού με το περιβάλλον του». Τα σχήματα είναι διαφορετικά σε κάθε ηλικία. Χρονικά έως δύο ετών είναι η αισθητικοκινητική περίοδος, αντίστοιχα έως επτά ετών η περίοδος της προλογικής σκέψης, ενώ η περίοδος των συγκεκριμένων λογικών πράξεων είναι έως ένδεκα ετών και η περίοδος της αφαιρετικής σκέψης πάνω από ένδεκα ετών. Έτσι κατά την θεωρία Piaget η ηλικία είναι σημαντικότερη ως προς τον χρόνο που

χρειάζεται ο μαθητής για την ολοκλήρωση των διαδικασιών μάθησης. Αυτό είναι θέσφατο; Τότε πώς εξηγείται η αντιμετώπιση θεμάτων που αντιστοιχούν στο τέλος του γυμνασίου να λύνονται από παιδιά στη διάρκεια του δημοτικού; Γιατί αντίθετα από την θεωρία Piaget, η θεωρία των επιπέδων Van Hiele ισχυρίζεται ότι η βιολογική ωρίμανση του μαθητή δεν είναι καθοριστική για την ανάπτυξη της μαθηματικής του σκέψης. Είναι δυνατόν να εξελίσσονται τα παιδιά πέρα από την ηλικία τους αλλά εντός θετικού περιβάλλοντος της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης (Vygotsky, 1978). Ποια είναι αυτά τα Επίπεδα; Ο μαθητής αρχικά θα πρέπει να έχει κατακτήσει το 1^ο επίπεδο της αναγνώρισης των «σχημάτων» π.χ. του Ορθογωνίου, του Κυλίνδρου, της Ακεραίων, των Μοτίβων κ.τ.λ. Το 2^ο επίπεδο της ανάλυσης θα πρέπει ο μαθητής να διακρίνει τα μέρη των «σχημάτων» π.χ. στο Κύλινδρο τις βάσεις που είναι Κυκλικό Δίσκοι και η παράπλευρη επιφάνεια ορθογώνιο. Την Διαφορά των Ακεραίων και των Κλασμάτων επίσης στο 3^ο επίπεδο του υπολογισμού, πρέπει να προσδιορίζει σχέσεις όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τον Νόμο του Ohm, την Χημική Αντίδραση, την Συνισταμένη των Δυνάμεων κ.τ.λ. Έπονται το 4^ο η απαγωγή και το 5^ο η αφαίρεση.

Είναι η Χαρισματικότητα αρεστή στην Κοινωνία μας;

Είναι η Χαρισματικότητα κληρονομική; ή είναι απόρροια του περιβάλλοντος; Μήπως είναι συνδυασμός της κληρονομικότητας & του περιβάλλοντος και σε τι ποσοστό συμμετέχουν οι δύο παράγοντες; Σε τούτο το θέμα υπάρχει μια έντονη διαμάχη δύο άκρων της παραδοσιακής-συντηρητικής που ασπάζεται το γενετικό και στην ουσία το θεϊκό χάρισμα και η δήθεν προοδευτική-υλιστική που αρνείται εντελώς το γενετικό και δέχεται αποκλειστικά την επίδραση από το περιβάλλον. Γι' αυτό το λόγο η δήθεν μαρξιστική πλευρά κατηγορεί την «επίσημη επιστήμη» ότι έχει αναγκαστεί να δεχθεί, να υιοθετήσει τη μικτή θεωρία περί κάποιου βαθμού σημασίας των βιολογικών και κάποιου των περιβαλλοντικών παραγόντων που επιδρούν στην ανάπτυξη της ευφυΐας. Μια αρκετά αποδεκτή άποψη λέει ότι: Ο συσχετισμός των αποτελεσμάτων του δείκτη (g) (Spearman, 1927) για τους γονείς και τους απογόνους είναι 45%, (κληρονομικότητα) υψηλό αλλά όχι και καθοριστικό. Δηλαδή η γενετική πλευρά έχει μια συμμετοχή που πλησιάζει το ήμισυ. Άρα όσοι ισχυρίζονται, από την μεριά της κυρίαρχης αστικής ιδεολογίας, τις θεωρίες περί γενετικών παραγόντων είναι ευχαριστημένοι, ενώ ικανοποιημένοι είναι και όσοι από την άλλη όχθη κέρδισαν το 55%. Εύλογο λοιπόν το ερώτημα: Το συγκεκριμένο ποσοστό (45%) είναι καθαρά κληρονομικό των γονιών ή/και περιβαλλοντικό, δηλαδή πόσο έχουν επηρεασθεί οι γονείς από το περιβάλλον της ανάπτυξης τους; Αν λοιπόν μέσα στο 45% υπάρχει και η περιβαλλοντική επίδραση στους γονείς τότε το ποσοστό της κληρονομικότητας υπάρχει σαφέστατα αλλά μάλλον κυριαρχεί το ποσοστό του περιβάλλοντος, βέβαια η επιστήμη προχωρεί και νέα δεδομένα θα έχουμε σύντομα για να μάθουμε αλλαγή ποσοστών αλλά όχι ανατροπή της συνύπαρξης.

Πώς αντιμετωπίζουμε στην Ελλάδα τον ευφυή μαθητή; «Αυτός δεν έχει ανάγκη», «αυτός σίγουρα θα προκόψει» ας ασχοληθούμε «με τους πολλούς γιατί εμείς είμαστε άνθρωποι του λαού», «να διδάξουμε για τους μέσους μαθητές». Σήμερα όπως πάντα υπάρχουν απόψεις που επικροτούν και εκθειάζουν την Αριστεία και απόψεις που στην ουσία την απεχθάνονται. Η λεγόμενη προοδευτική, τάχα μαρξιστική άποψη, δηλώνει ότι αγαπά και επιδιώκει την Ισότητα, στην πράξη την Εξίσωση προς τα κάτω και αυτή η θέση είναι κυρίαρχη στην κοινωνία μας. Ο αντίθετος πόλος εκθειάζει τον Άριστο το αποξενώνει από την κοινωνία και τον χαρακτηρίζει ως Θείο Δώρο και ως εκ τούτου άρχοντα, ηγέτη που έχει την εντολή να μας σώσει! Οι δύο πόλοι στην ουσία αλληλοσυμπληρώνονται και ο ένας ρίχνει νερό στον μύλο του άλλου. Ας δούμε

όμως την τοποθέτηση του θεμελιωτή του μαρξισμού και όχι τι λένε οι κάθε λογής ‘ερμηνευτές’: «Ο πρωτόγονος κομμουνισμός είναι απλώς η συσσώρευση του φθόνου και της επιθυμίας για εξίσωση στη βάση ενός προοδεδικασμένου minimum (ακριβώς η εξίσωση προς τα κάτω σημείωση δικιά μας) ... Αυτός ο κομμουνισμός στο βαθμό που αρνείται την προσωπικότητα του ανθρώπου σε κάθε σφαίρα είναι απλώς η λογική έκφραση της ατομικής ιδιοκτησίας .. Ο καθολικός φθόνος θεμελιώνοντας την ύπαρξη του σαν δύναμη είναι η κρυμμένη μορφή στην οποία επιβεβαιώνεται και ικανοποιείται η πλεονεξία αλλά με έναν άλλο τρόπο. Η σκέψη που πηγάζει μέσα από τι λογική της ατομικής ιδιοκτησίας στρέφεται προς την σχετικά πλουσιότερη ατομική ιδιοκτησία με τη μορφή του φθόνου και της επιθυμίας για εξισωτισμό (Μάρξ, 1975). Αυτή την ιδιότυπη ‘ισότητα’ προωθούν στην εκπαίδευση οι τάχα συνδικαλιστές της ΟΛΜΕ και ΔΟΕ ως μια παραλλαγή του πρωτόγονου κομμουνισμού ή του αγροτικού κομμουνισμού δηλαδή της ισότητας στην αθλιότητα και στην άγνοια.

Τι εννοούμε σήμερα με την λέξη Χαρισματικό παιδί; Στο παρελθόν υπήρχε μόνο ένας παράγοντας που αποτελούσε το κριτήριο για την Χαρισματικότητα ο Δείκτης Νοημοσύνης (Δ.Ν.). Σήμερα υπάρχουν αρκετοί ορισμοί που έχουν ‘ξεπεράσει’ ή αλλιώς δεν αρκούνται στον Δ.Ν. (Δείκτη Νοημοσύνης) με ακραίο παράδειγμα τον Gardner που προτείνει οκτώ είδη Νοημοσύνης. Όπως το αναφέραμε στην περίληψη στηριζόμαστε σε ένα συνδυασμό που εκτόνησαν και εφάρμοσαν οι Renzulli και Reis (1994), όπου το χάρισμα των εν λόγω παιδιών συνίσταται σε συμπεριφορές που συσχετίζουν βασικά ανθρώπινα γνωρίσματα: 1. Την Νοητική Ικανότητα, με τον Δ.Ν. πάνω από τον Μέσο Όρο. 2. Τον γενικά υψηλό βαθμό προσήλωσης στο έργο (λόγω των προϋπαρχουσών γνώσεων ή/και του ενδιαφέροντος) και 3. Του υψηλού βαθμού δημιουργικότητας. Η επίλυση προβλημάτων στα μαθηματικά είναι ζήτημα ευφυΐας αλλά πρωτίστως επιμονής και ευελιξίας (Polya, 1981). Επίσης πώς θα ορίσουμε τη δημιουργικότητα; Η έννοια συσχετίζεται με τη δημιουργία προτάσεων και δράσεων που να είναι αφενός μεν πρωτότυπες, αφετέρου δε χρήσιμες στην ζωή μας. Στον ορισμό Mac Kinnon (1961, 1962) η δημιουργικότητα είναι μία διαδικασία που διαδραματίζεται μέσα στο χρόνο και χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία, πνεύμα προσαρμογής και την φροντίδα για μία συγκεκριμένη πραγματοποίηση. Επίσης στον ορισμό του Taylor: «Η δημιουργικότητα είναι μία νοητική διαδικασία που έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή ιδεών ταυτόχρονα καινούργιων και χρήσιμων» τονίζεται η διαδικασία και επισημαίνεται η σημασία της χρησιμότητας και καταλληλότητας των δημιουργικών αποτελεσμάτων (Ξανθάκου, 1999). Όπου ο τυπικός εκπρόσωπος της πολυπαραγοντικής μελέτης και περιγραφής της νοημοσύνης είναι ο Guilford (1950, 1967) σύμφωνα με αυτό τον ερευνητή κάθε νοητικό επίπεδο μπορεί να ταξινομηθεί σύμφωνα με: Α) Περιεχόμενο –Υλικό, Β) Νοητική λειτουργία που λαμβάνει μέρος, Γ) Το προϊόν που προκύπτει από την παραπάνω λειτουργία (Χάσκου & Παπαδάτος, 2017). Εδώ αντιλαμβανόμαστε ότι η πρωτοτυπία και η χρησιμότητα εξαρτώνται πολύ από το κοινωνικό πλαίσιο που περιβάλλει τον μαθητή ή τον επιστήμονα.

Τρόποι για την ανίχνευση των χαρισματικών παιδιών

Η προσπάθεια για εντοπισμό "τέλειων" χαρισματικών μαθητών ισοδυναμεί με κακή χρήση πόρων, επειδή δεν έχουμε "τέλειους" χαρισματικούς ενήλικες! (Plucker, 2019). Είναι γενικά δύσκολο να προσδιορίσουμε τις ακριβείς κινήσεις για τον εντοπισμό των εν λόγω μαθητών, χωρίς όμως να είναι δύσκολο να διαισθανθούμε κάποιους που θα είναι αναγκαίο στη συνέχεια να εξακριβώσουμε.

Από την νηπιακή ακόμη ηλικία δηλαδή από την αισθητικοκινητική περίοδο θα παρατηρήσουμε θέληση οπτικής, ακουστικής, απτικής αναζήτησης πέρα από την

ηλικιακή ωρίμανση. Στην επόμενη φάση είναι πολύ χαρακτηριστική η επιτυχία και η σπιρτάδα στην συναρμολόγηση παιχνιδιών και ειδικά των πάζλ. Στο νηπιαγωγείο θα παρατηρήσουν οι εκπαιδευτικοί αναζήτηση ερμηνειών για όλα τα θέματα όπως για παράδειγμα: «Η πολική αρκούδα πέφτει σε χειμέρια νάρκη;» ή «γιατί το βράδυ είναι πιο δυνατό το φως του φεγγαριού;» ή «πού οφείλεται ότι η θάλασσα έχει υψηλό κύμα χωρίς στην ξηρά να έχουμε δυνατό αέρα;». Αυτές οι ερωτήσεις δείχνουν ένα ανήσυχο πνεύμα που ζητά ερμηνείες και σε βάθος κατάκτηση γνώσεων. Δεν αποδέχονται, με λίγα λόγια, εύκολα ότι τους σερβίρουν στο περιβάλλον που ζουν, πάντα ψάχνουν και έχουν μεγάλη παρατηρητικότητα. Επίσης η ικανότητα τους να καταπιάνονται με πολλά και διαφορετικά πράγματα, που τα φέρνουν σε πέρας και όχι αρχίζουμε την μια δραστηριότητα και στις δυσκολίες πεταγόμαστε στην επόμενη, τα καθιστά χαρισματικά. Αν το παιδί έχει περιέργεια να μαθαίνει συνεχώς νέα πράγματα σίγουρα είναι σε καλό δρόμο. Αν μονίμως στα αυτιά σας ηχεί η λέξη «γιατί» όσο και αν είναι κουραστική κατά βάθος θα πρέπει να σας κάνει αρκετά ικανοποιημένους. Τα παιδιά με έντονη περιέργεια δεν επαναπαύονται μόνο στο «τι» αλλά συνεχίζουν στο «πώς», στο «γιατί» και έχουν σοβαρές πιθανότητες για λαμπρή σταδιοδρομία. Μαθαίνουν γρήγορα τις καινούργιες λέξεις, τις έννοιες ακόμα και ιστορικά γεγονότα επίσης διακρίνονται στις ξένες γλώσσες. Συνήθως ξεκινούν να μιλούν γρήγορα (εννοούμε σε μικρή ηλικία) και αναπτύσσουν γοργά πλούσιο λεξιλόγιο. Και όλα αυτά σε μικρότερη ηλικία από τα υπόλοιπα παιδιά Τυπικής Ανάπτυξης (χωρίς μαθησιακές δυσκολίες).

Βέβαια, δεν είναι εύκολη η αξιολόγηση των παιδιών. Περιορισμένη ικανότητα και έλλειμμα αντικειμενικότητας χαρακτηρίζει τους γονείς, ενώ οπωσδήποτε μεγαλύτερη ευχέρεια και αντικειμενικότητα έχουν οι δάσκαλοι, αλλά και αυτοί στερούνται των κατάλληλων εργαλείων ολοκληρωμένων-αξιόπιστων που θα δώσουν το αποτέλεσμα. Αρχική αξιολόγηση αποτελεί η εκτίμηση της μαθησιακής πορείας από τη σχολική και σπιτική φροντίδα αλλά σημαντικό ρόλο θα μας δώσει η Διαθεματική και Διαχρονική επιτυχία σε διαγωνισμούς. Οι Διαγωνισμοί της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας: Παιχνίδι και Μαθηματικά, Πυθαγόρας και οι διαχρονικοί με παγκόσμια ακτινοβολία Θαλής, Ευκλείδης, Αρχιμήδης όπου συμμετέχουν χιλιάδες μαθητές. Ο Ευρωπαϊκός Διαγωνισμός Καγκουρό και οι αναπτυχθέντες τελευταία Πανελλήνιοι Διαγωνισμοί Φυσικής, Χημείας, Ρομποτικής είναι βάσεις για αξιολόγηση. Η συμμετοχή-διάκριση μαθητών σε κάποιους από τους ανωτέρω διαγωνισμούς μπορεί να αποτελέσει ένα αρχικό συμπέρασμα μια ανίχνευση Χαρισματικών παιδιών. Είναι μια αρχή, γιατί από τον εντοπισμό/ανίχνευση μέχρι την ολοκλήρωση της οντότητας των φοιτητών και αυριανών επιστημόνων χρειάζεται μια αναγκαία και συνεχή εκπαιδευτική παρέμβαση που οφείλει να στηριχθεί θεωρητικά και πρακτικά στην Διδασκαλία της Πράξης και την STEM διδασκαλία.

Επίπεδα Van Hiele και αξιολόγηση Χαρισματικών Παιδιών

Επίσης πολύ σημαντικό για τη διαδικασία της μάθησης και της διδασκαλίας να αξιολογηθεί το στυλ μάθησης των ατόμων (Hein and Budny, 2000). Γνωρίζουμε ότι ορισμένοι μαθητές κατανοούν με μεγαλύτερη ευχέρεια τα Μοτίβα, τους τύπους στην Τριγωνομετρία, στη Φυσική και την Χημεία, ενώ άλλοι κατανοούν καλύτερα τη Γεωμετρία, την Στερεομετρία τις Γραφικές Παραστάσεις στη Άλγεβρα και στη Φυσική. Τέτοιες διαφοροποιήσεις εντοπίζονται σε όλα τα παιδιά από τα Χαρισματικά έως τα παιδιά με Μαθησιακά Ελλείμματα. Οπωσδήποτε τα Μαθηματικά είναι μάθημα που απαιτεί την ενεργοποίηση διαφόρων δεξιοτήτων που σχετίζονται με την Γλώσσα (Λεκτική), την Μνήμη (Εργασίας και την Μακροπρόθεσμη), την Οπτικοχωρική Αντίληψη, τις Λογικές και Μεταγνωστικές Δεξιότητες. Όπως

αναφέρει ο Serin (2018): Κάποιοι μαθητές, αντιλαμβάνονται τη γνώση, την πληροφορία μέσω της συγκεκριμένης εμπειρίας και την επεξεργάζονται μέσω της αντανάκλαστικής μεθόδου παρατήρησης. Είναι οι στοχαστές που εμπιστεύονται τις εμπειρίες τους. Υπάρχουν μαθητές με χρήση κοινής λογικής, αντιλαμβάνονται τη γνώση/πληροφορία μέσω μεθόδου αφηρημένης σύλληψης και την επεξεργάζονται μέσω ενεργού εμπειρίας. Ενώνουν τη θεωρία και την πράξη. Είναι οι μαθητές που κατευθύνονται από τις δεξιότητες. Επίσης οι δυναμικοί μαθητές, αντιλαμβάνονται τη γνώση/πληροφορία μέσω της συγκεκριμένης εμπειρίας και την επεξεργάζονται μέσω της ενεργού εμπειρίας. Ενώνουν την εμπειρία και την πρακτική. Σε κάθε επίπεδο τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης διαφέρουν μεταξύ τους, στο πρώτο επίπεδο τα αντικείμενα της μαθησιακής διαδικασίας (αριθμοί ή σχήματα) εμπεριέχονται στο συγκεκριμένο υλικό. Στο δεύτερο επίπεδο το αντικείμενο της έρευνάς του υποκειμένου αποτελούν οι σχέσεις μεταξύ αριθμών ή μεταξύ σχημάτων ενώ στο τρίτο επίπεδο αντικείμενο της έρευνας γίνονται οι ίδιες οι σχέσεις γεγονός που επιτρέπει τη σύνδεση τους στα πλαίσια ενός επαγωγικού συλλογισμού για τη διδασκαλία της Άλγεβρας ή της Γεωμετρίας (Streefland, 2000). Άρα αξιοποιούμε το Μοντέλο Van Hiele εκτός από την Γεωμετρία (Επίπεδα, Στερεά) και στην Άλγεβρα.

Εγκεφαλική ανατομία και λειτουργία

Η βιολογική μελέτη για τα χαρισματικά παιδιά είναι σημαντική και όποιος την αρνείται οδηγείται σε μονομέρεια και σε λαθεμένες αποφάσεις. Η επιστημονική άποψη δίνει βάρος σε δύο παράγοντες στην βιογενετική και στην περιβαλλοντική. Η επιστήμη έχει ανακαλύψει ότι υπάρχουν στον εγκέφαλο προδιαγραφές που βοηθούν στην άντληση πληροφοριών, στην συγκράτηση και στην ταυτόχρονη επεξεργασία τους. Οι βασικές ιδιότητες της Μνήμης και ειδικά της Εργαζόμενης είναι η Χωρητικότητα αυτής και η Δυναμική της Επεξεργασία. Επίσης έχει αποδειχθεί ότι οι ανωτέρω λειτουργίες/ικανότητες αναπτύσσονται μέσα από την μόρφωση και την πράξη (Παπαδάτος, 2010). Άρα εκτός από την βιογενετική υπάρχει και η κοινωνική πλευρά. Θα ξεκινήσουμε με μελέτες που στηρίζονται στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα που χρησιμοποιείται για την ανακάλυψη της βιολογικής βάσης της νοημοσύνης. Γιατί ο Εγκέφαλος εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε διαφορετικές συχνότητες που καταγράφονται σε ένα εγκεφαλογράφημα και είναι γνωστά σαν: Κύματα 'βήτα' που παράγονται όταν είμαστε σε εγρήγορση ή σε ένταση, κύματα 'άλφα' που παράγονται όταν είμαστε σε κατάσταση φυσικής & νοητικής χαλάρωσης, κύματα 'θήτα' που παράγονται όταν βρισκόμαστε σε κατάσταση υπνηλίας και τέλος κύματα 'δέλτα' που παράγονται όταν βρισκόμαστε σε βαθύ ύπνο. Επιστημονικές έρευνες έχουν αποδείξει ότι πραγματοποιείται μεγάλη ενεργοποίηση μεταξύ περισσότερων εγκεφαλικών περιοχών στη δραστηριότητα των κυμάτων άλφα. Οι επιστήμονες υποστηρίζουν ότι ο άνθρωπος παρουσιάζει μεγαλύτερη δυνατότητα μάθησης και αφομοίωσης πληροφοριών όταν είναι στην κατάσταση άλφα (Παπαδάτος, 2010).

Βέβαια μπορεί και πρέπει να ειπωθεί ότι το παιδί μέσα στο περιβάλλον που αναπτύσσεται και διαβιώνει επηρεάζεται από διαφορετικούς παράγοντες έντασης και χαλάρωσης. Κατά παρεμφερή τρόπο ο αθλητής έχει χαμηλούς καρδιακούς παλμούς (βραδυκαρδία) γιατί έχει γυμνασθεί και αντέχει σε στιγμές αθλητικής υπερδραστηριότητας. Και εδώ προκύπτει το εξής ερώτημα: Ο Αθλητής βελτιώνει το σώμα του καταρχάς μυϊκά και μάλιστα αυτό είναι 'ορατό δια γυμνού οφθαλμού' αλλά επιπλέον γυμνάζει τους αναπνευστικούς μύες (το αναπνευστικό σύστημα) και το καρδιαγγειακό σύστημα (με κυρίαρχο τον καρδιακός μυ) χωρίς να είναι ορατές αυτές οι εξελίξεις,

έτσι και ο Μαθητής μπορεί να γυμνάσει, να ασκήσει το νοητικό του σύστημα ώστε να φθάσει σε υψηλό ακαδημαϊκό επίπεδο; Αρκεί: «To fill the gap» δηλαδή να καλύψει το χάσμα γνώσεων και δεξιοτήτων. Θα αναρωτηθούν πολλοί, μα θα μετατραπεί ο ε-γκέφαλος κάποιου παιδιού που σταθμίζεται σε μέσο δείκτη νοημοσύνης, σε ευφυές παιδί; Μάλιστα σε ευφυές παιδί και σε ευφυή ενήλικα. Δεν είναι βέβαια εύκολο ούτε είναι συνηθισμένο αλλά γίνεται κατορθωτό. Το ταξίδι του Nicholas Letchford, από τον μαθητή με Ειδικές Μαθησιακές Δυσκολίες σε έναν Διδάκτορα της Οξφόρδης πάνω στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά, είναι σημαντικό και μας εμπνέει, αλλά αυτός ο μετασχηματισμός δεν είναι καθόλου πρωτόγνωρος. Στον κόσμο υπάρχουν αρκετοί άνθρωποι, που ήταν αδύναμοι Μαθητές και μάλιστα με Μαθησιακές Δυσκολίες οι οποίοι έλαβαν αρνητικά μηνύματα από τα σχολεία στα πρώτα στάδια της μαθητικής τους ζωής, αλλά πάλεψαν από κοινού με τους εκπαιδευτικούς, τους γονείς τους, με δικιά τους προσπάθεια και τα παιδιά αυτά κατάφεραν να εξελιχθούν σε μερικούς από τους σημαντικούς μαθηματικούς και επιστήμονες στην κοινωνία μας (Boaler, 2019).

Τεστ Ευφυΐας

Αναρωτιούνται κάποιοι, καλά τα Τεστ Ευφυΐας μπορούν να αξιολογήσουν, να κρίνουν μας μαθητές που είναι ευφυείς ή όχι; Καταρχάς, υπάρχουν τώρα στο διαδίκτυο πολλά αμφιβόλου επιστημονικής τεκμηρίωσης (χωρίς στατιστική εγκυρότητα) τεστ, οπότε δεν μπορούμε να τα εμπιστευθούμε την ανίχνευση και την μετέπειτα φροντίδα του Χαρισματικού παιδιού. Άλλωστε τονίσαμε από την αρχή ότι δεν μας ενδιαφέρει μοναδικά ή κυρίαρχα το IQ που συνήθως τα εν λόγω τεστ διαφημίζουν ότι αξιολογούν, αλλά ένα σύνολο στοιχείων που θα μας δώσουν την εκτίμηση.

Ιστορικά τα Τεστ Ευφυΐας προέκυψαν από την ανάγκη της σύγχρονης καπιταλιστικής κοινωνίας να κυριαρχεί και αποδείκνυαν τουλάχιστον τα πρώτα χρόνια ότι ανταποκρίνονται στην επικρατούσα ιδεολογία της υπεροχής του ενός και της υποτίμησης του άλλου. Η παραδοσιακή ιδεολογία του ταλέντου και της ευφυΐας είναι η προσπάθεια να νομιμοποιηθεί με τη βοήθεια μας βιολογίας η διαδεδομένη κοινωνική διαστρωμάτωση και τα συνδεδεμένα με αυτή πρότυπα προνομιών της (Rosemann, 1987). Αλλά ενώ έτσι ξεκίνησε στη συνέχεια και για δύο λόγους: α) Αρκετά παιδιά της αστικής τάξης, στη φάση ωρίμανσης του καπιταλισμού και του αντίστοιχου τρόπου ζωής, δεν τα ενδιέφερε η προσωπική τους ανάπτυξη αλλά περισσότερο η κατανάλωση μέχρι την κραιπάλη των πλούσιων γονικών εσόδων και β) Αρκετά παιδιά της εργατικής τάξης διακρίνονταν στα μαθήματα και στην εργασία έτσι ώστε η έξυπνη αστική τάξη ήθελε να τα αξιοποιήσει και να τα ενσωματώσει/αστικοποιήσει σε τομείς μιας παραγωγικής δραστηριότητας. Έτσι τα τεστ βελτιώθηκαν και αξιοποιήθηκαν επιπλέον σε τούτο τον τομέα, εντούτοις παρέμειναν στο να ερευνούν το IQ. Έτσι τα Τεστ Ευφυΐας εμπεριέχουν μία περιορισμένη δυνατότητα μέτρησης ‘κατανόησης της ικανότητας’ να αντιπαρατίθεται κάνεις σε ενεργητική μορφή με το περιβάλλον. Αφενός μεν μετρούν λιγότερο δημιουργικές ενεργητικές αποδόσεις αλλά και υπολείπονται επιπλέον στην καταγραφή της ‘συγκλίνουσας σκέψης’ δηλαδή εκείνης της σκέψης η οποία διατηρεί με ακρίβεια προ οφθαλμών ένα προκαθορισμένο σκοπό (Rosemann, 1987).

Θα περάσουμε από το στάδιο μας Ανίχνευσης στο στάδιο της Ανάπτυξης, γιατί ειδικά με την παραπάνω τοποθέτηση μιας τεράστιας βελτίωσης και μιας ‘μετατροπής’ των παιδιών με Μαθησιακά Ελλείμματα σε Χαρισματικούς Επιστήμονες είναι αναγκαία η

εξήγηση και ικανή να μας προσανατολίσει σε μια μέθοδο που θα οδηγήσει σε άνοδο συνολικά του μαθησιακού επιπέδου.

Η ανάπτυξη των Χαρισματικών παιδιών

Καταρχάς τι σημαίνει ανάπτυξη ευφύων μαθητών; Τους διδάσκουμε συγκεκριμένες ενότητες, κάποια ειδικά κεφάλαια, κάποια κεφάλαια των μεγαλύτερων τάξεων; Όταν συζητάμε για την ανάπτυξη χαρισματικών μαθητών στοχεύουμε στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και όχι την καλή γνώση της ενότητας του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν στα Μαθηματικά, στη Φυσική, στη Γλώσσα κ.τ.λ. ενότητες που αναπτύσσουν δεξιότητες περισσότερο από άλλες περιοχές της ύλης. Τι όμως ορίζουμε ως δεξιότητα; Σύμφωνα με την ολιστική προσέγγιση ο όρος «δεξιότητα» αναφέρεται κυρίως στην ενσωμάτωση των τριών επιπέδων της ανθρώπινης λειτουργίας, που αρχικά περιγράφηκαν ως «γνωστικός, ψυχοκινητικός και συναισθηματικός» τομέας (Bloom, 1956). Οι δεξιότητες δεν αποτελούν πάντα σταθερά χαρακτηριστικά. Αποτυπώνουν περισσότερο την επίδειξη της κατάλληλης συμπεριφοράς σε συγκεκριμένες συνθήκες και καταστάσεις. Η απόκτηση, η ανάπτυξη και η έκφρασή τους εξαρτάται, τόσο από τα προσωπικά χαρακτηριστικά, όσο και από τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ της προσωπικότητας και της γενικότερης κατάστασης (Αλιακίζογλου & Ράζου, 2019). Οι «κοινωνικές και προσωπικές δεξιότητες» συσχετίζονται με την Συναισθηματική Νοημοσύνη, γιατί αναφέρονται σε ένα σύνολο χαρακτηριστικών της προσωπικότητας όπως είναι η κοινωνικότητα, η επικοινωνία και κατ' επέκταση η γλωσσική επικοινωνία και η θετική στάση στις διαπροσωπικές σχέσεις.

Γνωστικές Δεξιότητες: Στα Μαθηματικά αλλά και στην Φυσική οι λύσεις προβλημάτων (Solving Problem) έχουν ως αναγκαιότητα την χρήση ενός αλγορίθμου δηλαδή μιας μεθοδολογίας όπου ο μαθητής φτιάχνει τα βήματα και αυτά ακριβώς τα βήματα δείχνουν και τα επίπεδα Van Hiele. Επίσης η διδασκαλία των Ερωτήσεων και ειδικά των Αυτοερωτήσεων αναπτύσσουν στον μαθητή γνωστικές δεξιότητες (Στεφανίδης, 2007). Οι Ερωτήσεις και οι Αυτοερωτήσεις βάζουν το παιδί να αξιολογήσει το επίπεδο της γνώσης του σε κάθε στάδιο της μαθησιακής πορείας. Η ονομαζόμενη ιστορικά Πρακτική Αριθμητική είναι σημαντική γιατί ο μαθητής λύνει προβλήματα της καθημερινότητας δηλαδή βιωματικά θέματα. Η αναπτυσσομένη χρήση των Αντιπαραδειγμάτων στην απόδειξη της μη ορθότητας μιας θεωρίας ή μιας θεωρητικής άσκησης είναι στην καρδιά της ανάπτυξης γνωστικών δεξιοτήτων. Ακόμη η μέθοδος της επαγωγής στην θεωρητική λύση μαθηματικών σαφέστατα έχει βηματισμό που καλλιεργεί στρατηγική αντίληψη όμως για να μην ευλογούμε τα γένια μας, στρατηγική αντίληψη καλλιεργείται και στο σκάκι όπως και σε άλλα παιχνίδια!

Θα σταθούμε στα Μαθηματικά και σε κάποιες διδακτικές ενότητες που δυστυχώς δεν διδάσκονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα οπότε οι μαθητές αγνοούν αλλά και υπολείπονται καταλλήλων θεμάτων. Σημαντικές ενότητες η Θεωρία Αριθμών, η Συνδυαστική, όπου αμφότερες αναπτύσσουν την λογική, την κριτική σκέψη και η Στερεομετρία που αναπτύσσει επιπλέον την οπτικοχωρική αντίληψη. Ευτυχώς στην Ελλάδα η Μαθηματική Εταιρεία εξετάζει με έμφαση τις ανωτέρω ενότητες από τον διαγωνισμό στο δημοτικό: «Παιχνίδι και Μαθηματικά» έως τον Θαλή, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη (Μαθηματική Ολυμπιάδα). Στην Φυσική-Χημεία έχουμε δραστηριότη-

τες στα εργαστήρια π.χ. συνδεσμολογία αντιστάσεων ή χημικών αντιδράσεων που αναπτύσσονται οι γνωστικές αλλά και οι κιναισθητικές δεξιότητες.

Για να αναπτύξουμε την κριτική σκέψη μια αξιολογη μέθοδος, όχι και η μοναδική, είναι το Μοντέλο του Λογικού Επιχειρήματος (Paul, & Elder, 2006). και συνεχίζει ότι η ανθρώπινη φύση μας οδηγεί να σκεφτόμαστε (η σκέψη διαπερνά κάθε πτυχή της ανθρώπινης ζωής). 2) Αλλά δεν είναι φυσικό για τον άνθρωπο να σκέφτεται σωστά, η ανθρώπινη σκέψη επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από προκαταλήψεις, ψευδαισθήσεις, άγνοιες κ.τ.λ. 3) Επομένως, πρέπει να είμαστε σε θέση να παρέμβουμε στη σκέψη, να την αναλύσουμε, να την αξιολογήσουμε και, όπου είναι απαραίτητο, να τη βελτιώσουμε.

Χρειαζόμαστε Παρατηρητικότητα, άρα η εξάσκηση, για παράδειγμα, σε ομοιότητες και διαφορές δύο σχεδόν όμοιων φωτογραφιών, είναι μια δεξιότητα που πρέπει να διδαχθεί και να καλλιεργηθεί. Σημαντική η ετοιμότητα για να δώσει γοργά τις απαντήσεις αλλά σημαντικότερο να δώσει γοργά τις σωστές απαντήσεις, γιατί αν η γρηγοράδα οφείλεται σε παρορμητικότητα τότε οδηγούμαστε σε λάθος μονοπάτια. Εδώ οφείλουμε να διδάξουμε την βιωματική επαλήθευση σαν αντιστάθμισμα της γρηγοράδας.

Τα Μοντέλα Διδασκαλίας οφείλουν να είναι δομημένα με βάση στρατηγικές για να επιτευχθούν συγκεκριμένοι στόχοι όπως είναι η Παρατηρητικότητα, η Μνήμη, η Λογική, η Οπτικοχωρική αντίληψη, η Κριτική σκέψη, η Δημιουργικότητα, η Συνεργασία, η Ενσυναίσθηση κ.τ.λ. Συνοδεύονται από οδηγίες και κριτήρια επίτευξης στόχων τόσο των βραχυπρόθεσμων όσο και των μακροπρόθεσμων.

Πώς υπεισέρχονται τα επίπεδα Van Hiele;

Εδώ υπάρχουν παράγοντες που οφείλουμε να αξιολογήσουμε και να αξιοποιήσουμε. Τα επίπεδα εφαρμόζονται στην Επιπεδομετρία αυτή είναι και η αφετηρία (Van Hiele, 1959), στην Στερεομετρία (η επέκταση από Gutierrez, 1992), στην Αριθμητική (η εφαρμογή από Streefland, 2000), σε Μοτίβα, σε Πολυώνυμα κ.τ.λ. και αν αποδεχούμε αυτή την επέκταση πώς και ποιός θα διαμορφώσει αυτά τα Επίπεδα; Η γνώμη μας είναι ότι τα επίπεδα αποτελούν ένα 'σχέδιο', ένα 'αλγόριθμο' που θα διαμορφώνει ο εκπαιδευτικός στις βασικές ενότητες που διδάσκει, απλά χρειάζεται επιμόρφωση των πραγματικά ενδιαφερομένων εκπαιδευτικών από 'ειδικούς επιμορφωτές' που γνωρίζουν και διαμορφώνουν τα Επίπεδα Van Hiele. Όμως "όταν ο επιμορφωτής παρουσιάζει πορίσματα ερευνών που αφορούν καινούργιες μαθηματικές δραστηριότητες ή εποπτικά υλικά ή σύγχρονες παιδαγωγικές μεθόδους, ενώ ο εκπαιδευόμενος τον ακούει δυστυχώς παθητικά πώς στη συνέχεια να εφαρμόσει ότι άκουσε στην τάξη του. "Χαρακτηριστικά ο Simon αναφέρει ότι: "τέτοια προγράμματα έδειξαν να έχουν μια πολύ περιορισμένη επίδραση, εάν όχι καμία"! Η αποτυχία των προγραμμάτων οδήγησε τους ερευνητές σε αναζήτηση των αιτιών που την προκαλούν. Η Richardson σε άρθρο της σχολιάζει τις αλλαγές που επιφέρουν τα προγράμματα εκπαίδευσης, οι οποίες οφείλονται κατά κύριο λόγο στο ότι: "Οι δάσκαλοι κάνουν κάτι καινούργιο, που κάποιοι εκπαιδευτές τους το υποδεικνύουν. Δηλαδή, ο εκπαιδευόμενος κατασκευάζει το δικό του σύνολο πρακτικών κατά τη διδασκαλία στην τάξη, βασιζόμενος στις δικές τους απόψεις και επηρεασμένος από την εκπαίδευση που έλαβε. Κάτω από το πρίσμα των παραπάνω σκέψεων πρέπει να λειτουργήσει η επιμόρφωση στα επίπεδα Van

Hiele, ... Μέσα από τον προσδιορισμό και την καταγραφή των επιπέδων Van Hiele των μαθητών, ο καθηγητής μπορεί να βεβαιωθεί για τις ικανές και αναγκαίες δραστηριότητες που θα οδηγήσουν τους μαθητές στις κατακτήσεις των Γεωμετρικών εννοιών (Ζαράνης, 2000). Όταν οι εκπαιδευτικοί βιώνουν τη συμμετοχή τους στην επιμόρφωση, μέσα από τον διττό ρόλο των εκπαιδευόμενων (συμμετέχοντας στην κατάρτιση) και των εκπαιδευτών (διδάσκοντας στις τάξεις) παρέχουν επιπλέον πολύτιμη πληροφόρηση και δεδομένα σχετικά με το σχολικό περιβάλλον (Αλιακίζογλου & Ράζου, 2019).

Σύμφωνα με τους Pierre & Dina Van Hiele αποτελούν κριτήρια για να διακρίνουμε τα Επίπεδα της Μάθησης. Σε κάθε Επίπεδο, τα αντικείμενα της σκέψης διαφέρουν μεταξύ τους και ως προς την φύση και ως προς την οργάνωση.

1ο Επίπεδο (στις πρώτες τάξεις του δημοτικού) τα μαθησιακά αντικείμενα, Αριθμοί ή Σχήματα, έρχονται σε επαφή με τον μαθητή μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων. Στο επίπεδο αυτό ζητάμε την αναγνώριση των σχημάτων είτε αναφέρονται στο επίπεδο είτε αναφέρονται στο χώρο, επίσης στην Αριθμητική στην κατανόηση των Ακεραίων
2ο Επίπεδο το αντικείμενο της μαθησιακής δραστηριότητας είναι οι δομές Αριθμών ή Σχημάτων. Τους κλασματικούς αριθμούς και τους δεκαδικούς αριθμούς, για παράδειγμα ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει ότι ο 3,47 είναι συνδυασμός μιας πρόσθεσης του ακεραίου αριθμού 3 (τρία) και του κλάσματος 47/100 (σαράντα επτά εκατοστά), επίσης αντίστοιχα στον Κύλινδρο ότι αποτελείται από τις δύο βάσεις που είναι κυκλικοί δίσκοι και από την παράπλευρη επιφάνεια που είναι ορθογώνιο.

3ο Επίπεδο το αντικείμενο της μαθησιακής δραστηριότητας είναι οι σχέσεις μεταξύ Αριθμών ή οι σχέσεις μεταξύ Σχημάτων. Εδώ εννοούμε ότι στον Κύλινδρο για να βρούμε τον Όγκο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το εμβαδόν της βάσης που είναι εν προκειμένω κυκλικός δίσκος επί το ύψος ή ότι η περίμετρος του κύκλου (των βάσεων) είναι ίση με την βάση του ορθογωνίου της παράπλευρης, ενώ το ύψος του κυλίνδρου ταυτίζεται με το ύψος του ορθογωνίου. Αντίστοιχα στην Αριθμητική να γίνουν οι τέσσερις πράξεις τόσο στους Ακεραίους όσο και στους Κλασματικούς.

Όταν ανεβαίνουμε επίπεδο 4^ο και 5^ο τα θέματα δυσκολεύουν και εδώ τα χαρισματικά παιδιά του γυμνασίου οφείλουν να διδαχθούν επαγωγικό συλλογισμό αλλά και ακρίβεια. Να το παρακάτω παράδειγμα του μοτίβου:

Ένα μοτίβο: 2, 3, 5, 8, ... μπορείτε να το συνεχίσετε;

1^η εκδοχή 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Προκύπτει από: 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, 8+13=21... δηλαδή το άθροισμα δυο διαδοχικών δίνει τον επόμενο. Όμως γιατί όχι: 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, ...

2+1=3, 3+2=5, 5+3=8, 8+4=12, 12+5=17... δηλαδή κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο συν την άθροιση της θέσης του όρου ή κάθε όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων.

Άρα στα επίπεδα: 4ο με επαγωγή-συλλογισμό και το 5^ο με αυστηρότητα-ακρίβεια πρέπει να μελετήσουμε το μοτίβο! Στην δεύτερη επιλογή όπου $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$ έχουμε επαγωγικό τύπο ακολουθίας.

Συνεχίζουμε τα παραδείγματά μας με Γεωμετρικές Κατασκευές και επίπεδα Van Hiele. Στο πρώτο στάδιο της ανάλυσης μιας γεωμετρικής κατασκευής προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις χαρακτηριστικές ιδιότητες που ανάγουν την κατασκευή στις θεμελιώδεις γεωμετρικές κατασκευές, επιδιώκουμε δηλαδή να αναγνωρίσουμε τα σχήματα Στο δεύτερο στάδιο της σύνθεσης ακολουθώντας ως οδηγό την προηγούμενη ανά-

λυση οι μαθητές περιγράφουν και σχεδιάζουν ώσπου να κατασκευάσουν τη ζητούμενη κατασκευή, αναπτύσσοντας τις λεκτικές και σχεδιαστικές ικανότητες τους. Στο τρίτο στάδιο της απόδειξης οι μαθητές συνειδητοποιούν τις ξεχωριστές ιδιότητες κάθε σχήματος και τις χρησιμοποιούν σύμφωνα με κανόνες λογικής για να κατασκευάσουν αποδείξεις. Έτσι αναπτύσσουν τις λεκτικές και κυρίως τις λογικές τους ικανότητες (Λαζαρίδης, 2006).

Ας προσπαθήσουμε και ένα παράδειγμα από την Θεωρία των Πολυωνύμων. Σαν 1^ο επίπεδο θα προσδιορίσουμε την κατανόηση της σχέσης αριθμών και γραμμάτων δηλαδή το μονώνυμο, στο 2^ο επίπεδο την δομή του πολυωνύμου για παράδειγμα το τριώνυμο που αποτελεί άθροισμα τριών μονωνύμων, στο 3^ο επίπεδο τις πράξεις μεταξύ πολυωνύμων και την προέκταση της Ευκλείδειας Διαίρεσης στο 4^ο επίπεδο την επαγωγική χρήση στις διωνυμικές επεκτάσεις και το τρίγωνο Pascal, τις λύσεις εξισώσεων-ανισώσεων πολυωνυμικής μορφής και στο 5^ο επίπεδο την πολυωνυμική συνάρτηση.

Δώσαμε αρκετά παραδείγματα και αν τα προσέξετε θα δείτε και μικρές διαφοροποιήσεις όμως αυτές οι προτάσεις/παραδείγματα μας δίνουν ένα σχέδιο στο πώς θα χρησιμοποιήσουμε τα Επίπεδα στην Τάξη.

Γλώσσα και Μαθηματικά

Τα Χαρισματικά παιδιά έχουν γλωσσικές ικανότητες. Εννοούμε ότι έχουν καλό γραπτό και προφορικό λόγο. Λόγος αποδεικτικός, συγκροτημένος που στηρίζεται στην γνώση των εννοιών και αυτά είναι τα στοιχεία τομής της Γλώσσας & των Μαθηματικών. Τρέχοντα ευρήματα δείχνουν: 1) Οι γλωσσικές ικανότητες των παιδιών έχουν ισχυρές τιμές πρόγνωσης τόσο για τις άτυπες όσο και για τις τυπικές δεξιότητες στα Μαθηματικά και 2) Οι γλωσσικές ικανότητες επηρεάζουν τις επίσημες μαθηματικές δεξιότητες εν μέρει μέσω της διαμεσολάβησης των άτυπων μαθηματικών δεξιοτήτων (Zhang, et all, 2017). Τα εν λόγω παιδιά χαρακτηρίζονται από συνοχή στον συλλογισμό τους, διατυπώνουν πρωτότυπες ιδέες και είναι ευαίσθητα σε θέματα που αφορούν την ανθρωπότητα και τις συνθήκες ζωής. Τους απασχολούν, εν ολίγοις, θέματα προβληματισμού και επιχειρηματολογούν με κοινωνικά, ηθικά και πολιτικά κριτήρια. Αναζητούν την αιτιότητα στον συλλογισμό τους, τους αρέσει ο ποιητικός λόγος, που ενεργοποιεί τη φαντασία, επίσης έχουν φιλοσοφικές και καλλιτεχνικές ενατενίσεις. Ως εκ τούτου τα άρθρα, τα δοκίμια, η πεζογραφία και η ποίηση με περιεχόμενο συναισθηματικό, κοινωνικό, πολιτικό μπορεί να τροφοδοτήσει τη σκέψη τους.

Φάσεις της Μάθησης

Οι φάσεις της Μάθησης αποτελούν προτεραιότητα για τους Εκπαιδευτικούς για όλα τα παιδιά τόσο για τα παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες όσο και για τα Ευφυή παιδιά. Παρακάτω βλέπουμε τον πίνακα των φάσεων της Μάθησης και διακρίνουμε ότι το κύριο μέρος αφορά τον εκπαιδευτικό ή και τον γονιό που ασχολείται με την μόρφωση (εγγραμματισμός) του παιδιού.

Πίνακας των φάσεων της μάθησης κατά Van Hiele	
Φάση 1	Πληροφόρηση γνώσεων μαθητή
Φάση 2	Καθοδηγούμενος προσανατολισμός
Φάση 3	Ανάλυση-Εξήγηση

Φάση 4	Ελεύθερος προσανατολισμός
Φάση 5	Αφομοίωση-Ενσωμάτωση

Στον παρακάτω δεύτερο πίνακα βλέπουμε τα επίπεδα κατανόησης που οφείλει να διανύσει ένας μαθητής για να κατακτήσει κάποιο γνωστικό αντικείμενο.

Πίνακας των επιπέδων κατανόησης κατά Van Hiele	
Επίπεδο 1	Αναγνώριση ή Νοερή απεικόνιση
Επίπεδο 2	Περιγραφή ή Ανάλυση δομών
Επίπεδο 3	Σύνδεση ή Υπολογισμός
Επίπεδο 4	Απόδειξη ή Πορίσματα
Επίπεδο 5	Αυστηρότητα ή Ακρίβεια

Επανερχόμαστε στο ανωτέρω μοντέλο με σαφή παράδειγμα (περιορισμένο σε ανάπτυξη): Αναγνώριση του σχήματος που ονομάζεται τετράγωνο (1^ο). Είναι παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες (2^ο). Οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται (3^ο). Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του και τέμνονται κάθετως (4^ο) και Το τετράγωνο ως κανονικό πολύγωνο (έχει ίσες πλευρές και γωνίες) εγγράφεται σε κύκλο με διάμετρο όσο η διαγώνιος και κέντρο το σημείο τομής των διαγώνιων (5^ο). Κλείνουμε το ζήτημα αυτό, με μια ταξινόμηση που κατά την γνώμη μας δεν είναι και η μοναδική, αφού όπως αναφέραμε μπορούσε κάθε επίπεδο να είχε και άλλα χαρακτηριστικά.

Ποιοι προτείνουν κατηγορίες-επίπεδα;

Δεν εκφράζουμε κάποια πρωτοπόρα σκέψη με την υποστήριξή μας στα Επίπεδα Van Hiele, πρώτον γιατί αρκετοί πριν από μας τα έχουν χρησιμοποιήσει και δεύτερον πολλοί και σπουδαίοι επιστήμονες-ερευνητές έχουν προτείνει διάφορες παρεμφερείς μεθόδους. Για την ακρίβεια τα στάδια στη γνώση είναι μια συνηθισμένη μεθοδολογία και αυτό ακριβώς το επισημαίνουμε. Να ξεκινήσουμε από την διάσημη ταξινόμηση Bloom! Η οποία τοποθετεί την γνωστική διαδικασία στα στάδια: Γνώση, Κατανόηση, Εφαρμογή, Ανάλυση, Σύνθεση και Αξιολόγηση. Θα ‘διαφοροποιηθούμε’ γιατί κατά την γνώμη μας δεν είναι πρωθύστερη η Κατανόηση από την Ανάλυση αλλά το κυριότερο είναι ότι ο Benjamin Bloom στην ουσία προτείνει μια διαδικασία με βήματα για την ολιστική κατάκτηση της γνώσης.

Τυπικός εκπρόσωπος της πολυπαραγοντικής μελέτης και περιγραφής της νοημοσύνης είναι ο J.P. Guilford (1950, 1967) σύμφωνα με αυτόν τον ερευνητή κάθε νοητικό επίπεδο μπορεί να ταξινομηθεί σύμφωνα: Α) Περιεχόμενο –Υλικό, Β) Νοητική λειτουργία που λαμβάνει μέρος και Γ) Το προϊόν που προκύπτει από την παραπάνω λειτουργία (Χάσκου & Παπαδάτος, 2017).

Επίσης ο Gagne, σπουδαίος παιδαγωγός-ερευνητής προτείνει μια διαφορετική ταξινόμηση όμως αντίστοιχη με τα Επίπεδα Van Hiele. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι τόσο ο Gagne όσο και οι Van Hiele έχουν δύο ειδών προτάσεις μια γενική και μια ειδική. Τι ακριβώς συμβαίνει εδώ, ο μιν Gagne διατυπώνει οχτώ περιπτώσεις μάθησης και οχτώ φάσεις μιας μαθησιακής πράξης. Ενώ το ζεύγος Van Hiele διατυπώνουν,

όπως φαίνεται καθαρά στους ανωτέρω πίνακες, πέντε φάσεις μάθησης και αντίστοιχα πέντε επίπεδα κατανόησης.

Δεν θα συνεχίσουμε με την αναφορά και άλλων προτάσεων όμως θα σταθούμε στην διαχρονική προσπάθεια των Παιδαγωγών-Ερευνητών να διαμορφώσουν αυτό που θα ονομάσουμε: «Βήματα προσέγγισης της Γνώσης» είτε τα ονομάζουν Κατηγορίες ή Επίπεδα ή Στάδια ή Φάσεις ή και Βήματα. Εμείς επιλέγουμε τα Επίπεδα Van Hiele γιατί είναι περισσότερο συγκεκριμένα. Αυτή μας η επιλογή δεν σημαίνει ότι οι Bloom, Gagne ... έχουν υποδεέστερες αξιολογικά προτάσεις όμως τα στάδιά τους είναι περισσότερο στην γενικότητα και λιγότερο στο δια ταύτα.

Πού, πότε και ποια τα αποτελέσματα εφαρμογής των Επιπέδων Van Hiele;

Πρέπει να σημειώσουμε ότι από την μέρα που έγινε αναλυτική παρουσίαση στη Γαλλία (1957) του Μοντέλου Van Hiele και η δημοσίευσή του (1959) άρχισε μια προσπάθεια έρευνας και εφαρμογής πρώτα στην ΕΣΣΔ που αργότερα στις ΗΠΑ.

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι το γεγονός που θα αλλάξει τα δεδομένα της διδασκαλίας των φυσικών επιστημών έρχεται το 1957. Στις 4 Οκτωβρίου εκείνης της χρονιάς, η Σοβιετική Ένωση θέτει με επιτυχία σε τροχιά γύρω από τη Γη το δορυφόρο Sputnik που πρόκειται για μια επιστημονική πρωτιά σε παγκόσμιο επίπεδο και ταυτόχρονα μία πολύ δυνατή απόδειξη των επιστημονικών και τεχνολογικών δυνατοτήτων της Σοβιετικής Ένωσης. Εδώ να τονίσουμε ότι η επιστήμη και οι επιστήμονες που εκτόξευσαν το Sputnik (τον πρώτο δορυφόρο με ελλειπτική τροχιά γύρω από την γη) ήταν αυτοί που αναπτύχθηκαν και ανδρώθηκαν πνευματικά την εποχή του Σοβιετικού Σοσιαλισμού (εποχή Στάλιν) με σημαντικά επιτεύγματα σε πολλούς τομείς της επιστήμης. Επίσης αυτής της φουρνιάς είναι και “Οι μαθηματικοί και Ψυχολόγοι της Σοβιετικής Ακαδημίας των Παιδαγωγικών σπουδών που έσπευσαν να οργανώσουν εντατικές έρευνες και πειράματα για τα Επίπεδα ανάπτυξης των Van Hiele. Μεταξύ 1960 και 1964 επαλήθευσαν την εγκυρότητα των ισχυρισμών και αρχών της θεωρίας” όπως γράφει ο Wirszup (1976) και σαν αποτέλεσμα αυτών των ερευνών οι σοβιετικοί σχεδίασαν γεωμετρικό υλικό που επέτρεπε στους μαθητές να περάσουν στο επόμενο επίπεδο (2^ο) από την ηλικία των 9 ετών έχοντας κατακτήσει ένα σημαντικό αριθμό γεωμετρικών εννοιών. Ο Pyshkalo αναφέρει: «Δείξαμε ότι η ικανότητα των μαθητών για συγκεκριμένους συλλογισμούς είναι μεγαλύτερη από ότι πιστεύαμε και πάνω από το επίπεδο που αρχίζει συνήθως η παραδοσιακή διδασκαλία» (Δημολιάνη, 2007). Αλλά αυτές οι δράσεις δεν αναγνωρίστηκαν από το τότε καθεστώς (σημείωση δικιά μας Χρουτσώφ & Μπρέζνιεφ) και ως εκ τούτου δεν ενσωματώθηκαν στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Ζαράνης, 2000). Αντιθέτως όταν ο Wirszup (1974) το ανακοίνωσε στις ΗΠΑ αντιμετωπίστηκε με την δέουσα σοβαρότητα και εφαρμόστηκε αναπτύχθηκε από Allan Hoffer και άλλους ερευνητές σε πλήθος σχολείων.

Τι σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός διδάσκει με βάση τον μέσο μαθητή;

Η διδασκαλία οφείλει να έχει σκοπό και στόχο, άρα δεν μπορεί να γίνεται για να πούμε ότι διδάξαμε αν δεν πετύχαμε να το κατανοήσουν αυτό που διδάξαμε, όλοι οι μαθητές. Και εδώ έρχεται η έννοια της αξιολόγησης, γιατί όπως ο μαθητής αξιολογείται με την προφορική και γραπτή ‘δοκιμασία’ έτσι οφείλει να αξιολογείται και ο εκπαιδευτικός για το αν αυτό που δίδαξε έγινε κατανοητό. Βέβαια στην Ελληνική κοινωνία υπεισέρχονται και άλλοι παράγοντες που καθιστούν την αξιολόγηση των εκ-

παιδευτικών προβληματική, γιατί έχουν υπάρξει και στο πρόσφατο παρελθόν ποικίλα βιώματα αλλά σίγουρα υπάρχει τρόπος που να την καθιστά αδιάβλητη και αντικειμενική ώστε να έχει τα προσδοκώμενα αποτελέσματα.

Το παραδοσιακό σχολείο εφαρμόζει δασκαλοκεντρικές μορφές διδασκαλίας και προκρούστειες τακτικές εστιασμένες στον ανύπαρκτο μέσο μαθητή. Επανερχόμαστε στην διδασκαλία και θα δώσουμε ένα παράδειγμα: Αν οι μαθητές της ποδοσφαιρικής ομάδας του γυμνασίου του 'Ανω Λόγγου' χρειάζονται παπούτσια από 36 έως 42 νούμερο και εμείς δώσουμε σε όλους να φορέσουν 39 νούμερο δηλαδή τον μέσο όρο του 36 και του 42 τότε οι μεν που φορούν από 36 έως 39 θα βουλευτούν με σχετική ευρυχωρία σε όσους χρειάζονται 36 ή 37, καλή εφαρμογή σε όσους φορούν 38 ή 39 άντε 40, ενώ επώδυνη ως καταστροφική στους υπόλοιπους. Το ίδιο και ακόμη χειρότερο συμβαίνει στο μάθημα που διδάσκεται με βάση τον μέσο μαθητή (Μαυρόπουλος, 2020). Ο ανωτέρω σχεδιασμός μαθημάτων δεν ενδείκνυται για κανένα μαθητή γιατί ποτέ δεν θα γίνει μια πλήρης και κατανοητή διδασκαλία. Αυτός ο σχεδιασμός δυναμώνει την 'πίσω τάξη' δηλαδή τους μαθητές των τελευταίων θρανίων που όλο και πληθαίνουν ενώ συγχρόνως δεν αναπτύσσει τον καλό μαθητή. Τι χρειαζόμαστε; Μια διδασκαλία που να εδραιώνεται στην: Ανάλυση, Παρατήρηση, Κατάταξη, Επίλυση, Επαλήθευση και τέλος δομημένη Τεκμηρίωση με επιχειρήματα. Μια Διδασκαλία Διερεύνησης, Εννοιολογικής Μάθησης, Ομαδικής Συμμετοχής και Εφαρμογής στην Πράξη. Μια διδασκαλία με Παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα. Αυτή η διδασκαλία ενοποιεί την τάξη και αναπτύσσει όλους τους μαθητές γιατί ο καλός μαθητής θα βοηθήσει/διδάξει τον αδύνατο και θα μετατραπεί από μαθητής σε δάσκαλο, ρόλος σημαντικής αυτοεκτίμησης για την αυριανή του πορεία.

Συμπεράσματα και Συζήτηση

Καταρχάς, ο τίτλος και η πρόταση είναι αρκετά φιλόδοξη και έχει προκύψει από μια έρευνα διατριβής, που έγινε σε 234 μαθητές (108 της Ομάδας Ελέγχου και 126 της Πειραματικής Ομάδας) και είχε σαν στόχο την αξιοποίηση των Επιπέδων Van Hiele στους Όγκους Στερεών με πολύ καλά αποτελέσματα. Ενημερώνουμε ότι εφαρμόζοντας τα Επίπεδα προχωρήσαμε σε σημαντική πρόοδο των παιδιών. Αλλά από την Γεωμετρία (Επιπεδομετρία και Στερεομετρία) μέχρι την παντοτινή εφαρμογή στις διδακτικές ενότητες που αναφέραμε και σε όσες δεν αναφέραμε υπάρχει απόσταση και απαιτείται περαιτέρω μεγαλύτερη έρευνα.

Αναφορές:

Αλιακίζογλου & Ράζου, (2019). Αναπτύσσοντας τις Κοινωνικοσυναισθηματικές Δεξιότητες και τη Θετική Ψυχολογία μέσω Βιωματικής Προσέγγισης στο Χώρο του Σχολείου. Πρακτικά Συνεδρίου: Σύγχρονες Έρευνες Παιδοψυχολογίας - Θεωρία και Εφαρμογές.

Δημολιάνη, Ε. (2007). Το μοντέλο Van Hiele για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης: Έρευνα σε μαθητές Β' Λυκείου». Πτυχιακή εργασία στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου Τμήμα Μαθηματικών.

Ζαράνης, Ν., (2000). Αξιοποίηση της Θεωρίας VAN HIELE στην Διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση με την Βοήθεια Υπολογιστή. Διδακτορική Διατριβή ΕΚΠΑ.

Λαζαρίδης, Ι., (2006). Ο Ρόλος των Γεωμετρικών Κατασκευών στο Περιοδικό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ευκλείδης Γ', Τεύχος 64.

Μαυρόπουλος, Α., (2020). Σχέδιο Μαθήματος (Σχεδιασμός - Διεξαγωγή και Αξιολόγηση μιας Διδασκαλίας). Αθήνα: Αυτοέκδοση.

Παπαδάτος, Γ. (2010). Ψυχοφυσιολογία. Αθήνα, Εκδόσεις: Παρισιάνου.

Πατσιομίτου, Σ., (2020) Διδακτική των Μαθηματικών Ι. Συνδεδεμένες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις. Εκδόσεις Ανατολικός.

Στεφανίδης, Κ., (2006). Αυτομάθηση στις Φυσικές Επιστήμες. Αθήνα: Αυτοέκδοση.

Χάσκου, Σ. & Παπαδάτος, Γ., (2017) Δημιουργικότητα και Ευφυΐα. 7^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης. Πρακτικά: <http://dx.doi.org/10.12681/educ.1767>

Bloom, B., (1956). Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain. New York: David McKay Company.

Boaler, J. (2019). Everyone Can Learn Mathematics to High Levels. The Evidence from Neuroscience that Should Change our Teaching. Stanford University blog.

Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books. Gifted Child Quarterly, 38, 7-20.

Marx, K., (1975). Οικονομικά και Φιλοσοφικά Χειρόγραφα. Εκδόσεις Γλάρος. Αθήνα.

Paul, R. & Elder, L. (2006). «Concepts and Tools» The Miniature Guide to Critical Thinking, The Foundation for Critical Thinking.

Plucker, J., (2019). Ημερίδα του με θέμα «Εκπαίδευση και Χαρισματικότητα: Επενδύοντας στη Δημιουργικότητα»: <https://anatolia.edu.gr/el/press/deltia-typou/2019/>

Polya, G., (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving*. Edition: John Wiley & Sons. Printed in the United States of America.

Renzulli, J. S., & Reis, S. M. (1994). *Research related to the enrichment triad model*.

Rosemann, (1987). *Μετάφραση του άρθρου: Θεωρίες για την Ευφυΐα*. Αθήνα, Περιοδικό Νέα Παιδεία.

Serin, H., (2018). *Perspectives on the Teaching of Geometry: Teaching and Learning Methods*. *Journal of Education and Training*. www.macrothink.org/jet

Spearman, C., (1927). *The Abilities of Man: Their Nature and Measurement*. New York: Macmillan.

Streefland, L., (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*. Αθήνα, Εκδόσεις: Leader Books.

Van Hiele, P., (1959): «*La pensée de l'enfant et la géométrie*», *Bulletin de l'Association des Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Public*, σελ. 199-205.

Vygotsky, L., (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Zhang J, Fan X, Cheung SK, Meng Y, Cai Z, Hu BY (2017). *The role of early language abilities on math skills among Chinese children*. *PLoS ONE* 12(7): <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0181074>