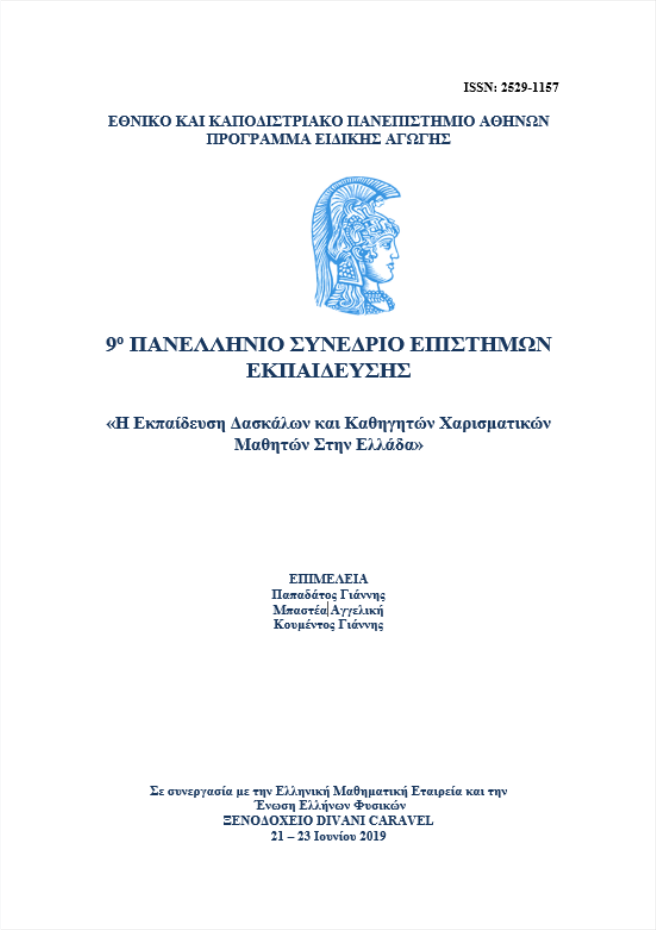
ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 9 (2019)

9ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



ISSN: 2529-1157

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

9ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

«Η Εκπαίδευση Δασκάλων και Καθηγητών Χαρισματικών Μαθητών Στην Ελλάδα»

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Παπαδάτος Γιάννης
Μπαστέα|Αγγελική
Κουμέντος Γιάννης

Σε συνεργασία με την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και την Ένωση Ελλήνων Φυσικών
ΞΕΝΟΔΟΧΕΙΟ DIVANI CARAVEL
21 – 23 Ιουνίου 2019

Η επίδραση της ηλικίας στην επίδοση μαθητών δημοτικού σε αριθμητικά και οπτικοχωρικά ερεθίσματα συλλογιστικής στα μαθηματικά

Μαρία Σκανδάλη, Πέτρος Ρούσσος, Ιωάννης Καραγιαννάκης

doi: 10.12681/edusc.3168

Βιβλιογραφική αναφορά:

Σκανδάλη Μ., Ρούσσος Π., & Καραγιαννάκης Ι. (2020). Η επίδραση της ηλικίας στην επίδοση μαθητών δημοτικού σε αριθμητικά και οπτικοχωρικά ερεθίσματα συλλογιστικής στα μαθηματικά. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, *9*, 728–740. https://doi.org/10.12681/edusc.3168

Η επίδραση της ηλικίας στην επίδοση μαθητών δημοτικού σε αριθμητικά και οπτικοχωρικά ερεθίσματα συλλογιστικής στα μαθηματικά

Μαρία Σκανδάλη, Εκπαιδευτικός, Μεταπτυχιακό στη Σχολική Ψυχολογία, ΕΚΠΑ
mariaskandali@yahoo.gr
Πέτρος Ρούσσος, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ψυχολογίας, ΕΚΠΑ
roussosp@psych.uoa.gr
Δρ. Ιωάννης Καραγιαννάκης, Ερευνητής Εργαστηρίου Πειραματικής Ψυχολογίας, ΕΚΠΑ
g.karagiannakis@primedu.uoa.gr

Περίληψη

Το σημείο εκκίνησης της εργασίας ήταν η διερεύνηση της γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών διαφορετικών τάξεων, κατά τη σχολική ηλικία, στη μαθηματική δεξιότητα της συλλογιστικής. Η συλλογιστική διακρίνεται σε αριθμητικά και οπτικοχωρικά ερεθίσματα, που προσδίδουν μία σχετικά πλήρη εικόνα για τη μαθηματική ικανότητα. Μελετήθηκε, επίσης, και η πιθανή συσχέτιση των δύο προαναφερθέντων ερεθισμάτων, ανά ηλικία, δηλαδή σχολική τάξη. Οι συμμετέχοντες/-ουσες αποτελούνταν από 2371 μαθητές και μαθήτριες σχολικής ηλικίας, όντας άριστοι ομιλητές/-ριες της ελληνικής γλώσσας, από όλες τις τάξεις του δημοτικού σχολείου, δημοσίων και ιδιωτικών, σε πανελλήνια κλίμακα. Το ερευνητικό εργαλείο που χορηγήθηκε είναι το «Τεστ Μαθηματικού Προφίλ & Δυσαριθμησίας» (MathPro Test) στο πλαίσιο στάθμισής του. Τα ευρήματα που προέκυψαν, από την μονοπαραγοντική ανάλυση διακύμανσης για την επίδραση της ηλικίας, ανέδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές σχεδόν μεταξύ όλων των τάξεων, μερικές εκ των οποίων είχαν και υψηλό μέγεθος επίδρασης. Μη στατιστικά σημαντική διαφορά βρέθηκε μεταξύ της Ε΄ και Στ΄ τάξης στο σύνολο των δοκιμασιών. Ως προς τη πιθανή συσχέτιση των δύο ερεθισμάτων, εντοπίστηκαν μεσαίοι δείκτες συνάφειας μεταξύ σχεδόν όλων των οπτικοχωρικών και αριθμητικών ερεθισμάτων ανά τάξη. Τα ευρήματα συζητούνται σύμφωνα με διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με τα μαθηματικά και τη συλλογιστική, ως προς και τα δύο είδη ερεθισμάτων και συνάμα τη σχέση αυτών.

Λέξεις-Κλειδιά: συλλογιστική; αριθμητικό ερέθισμα; οπτικοχωρικό ερέθισμα; μαθηματικά; σχολική ηλικία

Abstract

The starting point of the study was to investigate the cognitive development of children of different ages at school in the mathematical skills of reasoning. Reasoning is distinguished by numerical and visuospatial arthritis and gives a relatively complete picture of mathematical ability. Also, the possible association of the two above-mentioned stimuli was studied by age, on the basis of a classroom. The sample consisted of 2371 pupils of school age, being excellent speakers of the Greek language, from all classes of elementary school, both public and private, on a panhellenic scale. The research tool administered was the "MathPro Test". The findings which emerged after one-way analysis of variance of age influence, showed statistically significant differences almost among all classes, some of

which had a high effect size. Non-statistically significant difference was found between fifth and sixth grades in all tests. Concerning the possible association of the two stimuli, medium correlation coefficients were found between almost all visual and arithmetic stimuli per class. The findings are discussed according to the international bibliography on mathematics and reasoning, both in terms of terms of numerical and visuospatial trials and at the same time and their relationship.

Keywords: reasoning; arithmetic stimulus; visuospatial stimulus; mathematics; school age

Εισαγωγή

Η μαθηματική γνώση περιλαμβάνει πολυποίκιλες αφηρημένες μορφές γνώσης σε μεγαλύτερο βαθμό από όποιον άλλο τομέα έρχονται σε επαφή τα παιδιά (Αγαλιώτης, 2011). Κατά τη μελέτη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης στη γνωστική ψυχολογία, ερευνώνται οι τρόποι με τους οποίους μαθαίνουν τα παιδιά, οι ρόλοι των εσωτερικών αναπαραστάσεων και η αλληλεπίδραση ανάμεσα στην κατανόηση εννοιών και την εφαρμογή τους στην πράξη (Βοσνιάδου, 1998). Σημαίνουσα και αντιπροσωπευτική γνωστική λειτουργία, αποτελεί η συλλογιστική, είτε αριθμητικής, είτε οπτικοχωρικής φύσεως, αν και σε πολλές από αυτές φαίνεται να συνυπάρχουν τα δύο είδη.

Συλλογιστική δεξιότητα

Η συλλογιστική (reasoning) αποτελεί εκείνη τη γνωστική διεργασία που αποτελεί αρωγό στη λήψη αποφάσεων και την εξαγωγή συμπερασμάτων που συχνά υπερβαίνουν τη διαθέσιμη πληροφορία, με βάση εξειδικευμένους νοερούς κανόνες (σύμφωνα με τις θεωρίες των τυπικών κανόνων). Στο πλαίσιο της γνωστικής ψυχολογίας, έχει χαρακτήρα περιγραφικό (τι λάθη κάνουμε;) και ερμηνευτικό (γιατί κάνουμε τα δεδομένα λάθη;). Στον τομέα των μαθηματικών διακρίνεται σε αριθμητικές και οπτικοχωρικές δοκιμασίες (Ρούσσος, 2014).

Αριθμητικό ερέθισμα

Μία από τις σημαντικότερες αριθμητικές πτυχές της συλλογιστικής είναι η επίλυση λεκτικού προβλήματος και ιδίως η λήψη αποφάσεων, μία διαδικασία που ενσωματώνει όλα τα δομικά μαθηματικά στοιχεία (Tambychik & Meerah, 2010). Τα λεκτικά προβλήματα διακρίνονται σε προβλήματα αλλαγής, σύγκρισης, σύνθεσης/ συνδυασμού και εξομοίωσης (Βοσνιάδου, 1998). Αριθμητικά ονομάζονται όταν η λύση τους απαιτεί τη χρήση των τεσσάρων βασικών πράξεων (Passolunghi & Mammarella, 2010).

Έπειτα, οι δεξιότητες επαναλαμβανόμενων μοτίβων, που εξελίσσονται συστηματικά στα παιδιά, ήδη από το προνήπιο, στο οποίο μαθαίνουν να διαχειρίζονται απλά εναλλασσόμενα μοτίβα με δύο διαφορετικούς παράγοντες (π.χ. κόκκινο – μπλε μοτίβο) και εν συνεχεία, το επεκτείνουν σε σχέδια με τρία και τέσσερα τεμάχια στοιχείων. Σταδιακά, είναι σε θέση να ολοκληρώσουν ένα μοτίβο/ μία προβλέψιμη αριθμητική ακολουθία, προσδιορίζοντας το στοιχείο που λείπει ή να το επεκτείνουν (Rittle – Johnson, Zippert & Boice, 2018).

Εν συνεχεία, ο έλεγχος της κατάκτησης των αρχών της αριθμητικής (Αγαλιώτης, 2011), δηλαδή του βαθμού επίγνωσης και συνείδησης ότι, τόσο οι ποσότητες, όσο και οι αριθμοί, είναι σταθεροί από μόνοι τους, ανεξαρτήτως τοποθέτησής τους. Ήδη από το νηπιαγωγείο και τις πρώτες τάξεις δημοτικού φαίνεται να έχει κατακτηθεί η εννοιολογική σχέση πρόσθεσης και αφαίρεσης (η μία αντίστροφη της άλλης), καθώς παρουσιάζεται μαθηματική ευχέρεια και ακρίβεια στους βασικούς υπολογισμούς (Lambert & Spinath, 2018). Στις αρχές

της αριθμητικής, θα μπορούσε να στηριχθεί και η αναλογική λύση προβλημάτων με την ευρύτερη έννοια, τόσο της αναλογίας, όσο και του προβλήματος (Begolli et al., 2018. Ρούσσος, 2014).

Οπτικοχωρικό ερέθισμα

Οι οπτικοχωρικές δεξιότητες σχετίζονται με την ικανότητα κατανόησης των σχέσεων μεταξύ αντικειμένων και διαστημάτων και νοητικής χειραγώγησης των πληροφοριών, ως προς τις αλλαγές στη θέση και το μέγεθος των σχημάτων στο περιβάλλον (Lowrie, Logan & Ramful, 2017). Διακρίνονται, σύμφωνα με τους Linn & Petterson (1985), σε τρεις κατηγορίες/ τύπους: χωρική αντίληψη (spatial perception), νοητική περιστροφή (mental rotation), χωρική οπτικοποίηση/ απεικόνιση (spatial visualization). Η χωρική αντίληψη αποτελεί την ικανότητα να φανταστεί κανείς πώς θα εμφανιστεί ένα ερέθισμα από μία άλλη οπτική γωνία ατόμου [Kozhevnikov, Hegarty & Mayer (1999, όπ. αναφ. στο Lowrie et al., 2017)]. Η νοητική περιστροφή δυσδιάστατων (2-D) ή/και τρισδιάστατων (3-D) αντικειμένων, νοείται ως την ικανότητα του ατόμου να φαντάζεται το αντικείμενο στις νέες θέσεις, γνωρίζοντας ότι πρόκειται για το ίδιο σχήμα σε διαφορετικούς προσανατολισμούς (Logan & Lowrie, 2017. Young, Levine & Mix, 2018). Η χωρική οπτικοποίηση αφορά τη δεξιότητα σύλληψης ενός αντικειμένου ή μιας χωρικής μορφής, αποσπασμένης από γενικές πληροφορίες, αλλά συνάμα και ως ο συνδυασμός αντικειμένων, αφού περιστραφούν σε πιο περίπλοκες διαμορφώσεις (Andersen, 2014. Mix & Cheng, 2012).

Οι περισσότερες οπτικοχωρικές δεξιότητες χαρακτηρίζονται ως αξιοσημείωτα εύπλαστες, διαρκείς και μεταλλασσόμενες (Uttal et al., 2013). Είναι εμφανείς από τη βρεφική ηλικία και σταθερά βελτιώνονται κατά τη διάρκεια της σχολικής ηλικίας (Rittle – Johnson et al., 2018). Πληθώρα ερευνών αποδεικνύει ότι οι άνθρωποι τείνουν να αντιπροσωπεύουν τα ποσοτικά μεγέθη χωρικά, σε μία νοητή αριθμογραμμή, ήδη από την παιδική τους ηλικία (Cheng & Mix 2014). Βαθμιαία μεταβαίνουν από μία λογαριθμική σε μία γραμμική αναπαράσταση, ωστόσο ταυτόχρονα έχουν λογαριθμικές αναπαραστάσεις για κάποιες κλίμακες και γραμμικές για κάποιες άλλες (Siegler & Booth, 2014),

Σχέση αριθμητικού και οπτικοχωρικού ερεθίσματος

Οι οπτικοχωρικές δεξιότητες είναι σημαίνουσα πτυχή της μαθηματικής συλλογιστικής, καθώς υποστηρίζουν, τόσο τη μάθηση της γεωμετρίας και τη χρήση ανώτερων στρατηγικών υπολογισμού, όσο και την αναγνώριση συμβόλων και την επίλυση προβλημάτων (Harris, 2019. Logan & Lowrie, 2017). Ιδιαίτερα όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων, έχει ερευνηθεί ότι η εννοιολογική κατανόηση (π.χ. αίσθηση αριθμού), οι διαδικαστικές γνώσεις και οι λειτουργικές δεξιότητες (π.χ. ευθυγράμμιση αριθμών σε σύνθετα μαθηματικά προβλήματα) είναι απαραίτητες για τις απαιτούμενες δεξιότητες λήψης απόφασης στην επίλυση (Tambychik & Meerah, 2010).

Επιπρόσθετα, αποτελούν προγνωστικό δείκτη της μελλοντικής επίδοσης σε αριθμητικές δραστηριότητες συλλογιστικής (Carr et al., 2018. Young et al., 2018). Ερευνητικά, λοιπόν, προκύπτει, σύμφωνα με τους Mix & Cheng (2012), ότι όσοι διαθέτουν ισχυρές χωρικές δεξιότητες ίσως να μπορούν να παράγουν αποτελεσματικές νοητικές αναπαραστάσεις, προκειμένου να δομήσουν χωρικά και να οργανώσουν το όποιο μαθηματικό πρόβλημα, δηλαδή να μεταφράσουν και να μετατρέψουν τη δοσμένη σειρά αριθμών και λέξεων σε χωρική συστοιχία, βασισμένη σε εξισώσεις. Είναι γνωστό, άλλωστε, ότι οι εξισώσεις γράφονται και διαβάζονται σε μία συγκεκριμένη σειρά με χωρικές σχέσεις που αναδεικνύουν τους όρους που συνδυάζονται (Mix & Cheng, 2012). Η λήψη απόφασης για την

κατάλληλη νοητή πλευρά όπου θα τοποθετηθούν οι αριθμοί στην εξίσωση, η σειρά και τα συγκεκριμένα σημεία αυτών, καθώς και τα αριθμητικά γραπτά σύμβολα που θα επιλεγούν (π.χ. η αξία θέσης αντιπροσωπεύεται από τη σειρά των ψηφίων) προϋποθέτουν νοητούς χειρισμούς ή/και μετασχηματισμούς στους οποίους εμπλέκονται οπτικοχωρικές αναπαραστάσεις (Casey et al., 2015. Mix & Cheng, 2012).

Παράλληλα, συνδέσεις έχουν ερευνηθεί και μεταξύ της νοητής περιστροφής και διάφορων υπολογιστικών, κυρίως, δεξιοτήτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, αλλά και αριθμητικών δραστηριοτήτων στις πρώτες τάξεις του δημοτικού (Casey et al., 2017. Rittle – Johnson et al., 2018). Αντίστροφα, οι Simms et al. (2016) υποστηρίζουν ότι οι αναλογικές δεξιότητες συλλογιστικής επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τις επιδόσεις στην οπτικοχωρική δοκιμασία της αριθμογραμμής.

Σκοπός της έρευνας

Ο σκοπός αυτής της έρευνας ήταν διττός. Σε πρώτη προσέγγιση τείνει να μελετήσει την επίδραση που έχει η ηλικία στην ανάπτυξη, τόσο των αριθμητικών, όσο και των οπτικοχωρικών δεξιοτήτων συλλογιστικής, στα μαθηματικά. Η ηλικία αντιπροσωπεύεται από τη σχολική τάξη, εστιάζοντας σην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι δύο ειδών δεξιότητες συλλογιστικής ελέγχονται μέσω μίας ομάδας αντιπροσωπευτικών δοκιμασιών για το σύνολο των μαθητών/-ριών. Επομένως, οι επιδόσεις των μαθητών/-ριών, σε κάθε δοκιμασία συγκρίνονται ανά τάξη, για να ελεγχθεί κατά πόσο υπάρχει ή όχι διαφοροποίηση ανάλογα με την ηλικία. Επιπρόσθετα, ερευνάται η πιθανή ύπαρξη βαθμού συσχέτισης αριθμητικών και οπτικοχωρικών δοκιμασιών συλλογιστικής, ανά τάξη.

Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώνονται στην παρούσα μελέτη είναι τρία: Αρχικά, «ποια είναι η επίδραση της ηλικίας στις αριθμητικές δοκιμασίες της συλλογιστικής δεξιότητας στα μαθηματικά, σε μαθητές/-ριες δημοτικού;» και αντίστοιχα, «ποια είναι η επίδραση της ηλικίας στις οπτικοχωρικές δοκιμασίες της συλλογιστικής στα μαθηματικά, σε μαθητές/-ριες δημοτικού;». Τέλος, αν «υπάρχει πιθανή συσχέτιση μεταξύ των αριθμητικών και οπτικοχωρικών ερεθισμάτων της συλλογιστικής στα μαθηματικά, ανά τάξη;».

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Πίνακας 1

Στοιχεία Συμμετεχόντων της Έρευνας ανά Τάξη, Φύλο, Περιοχή

Τάξη	Ηλικία	Φύλο		Περιοχή		Σύνολο
	(μήνες)	Αγόρια	Κορίτσια	Αστική	Αγροτική	
1	80.5±7.9	153	174	201	116	317
2	92.3±3.9	161	144	187	105	292
3	104.6±3.7	216	186	253	138	391
4	116.6±4.1	311	280	458	125	583
5	127.4±3.7	230	197	244	180	424
6	139.6±4.5	175	190	188	176	364
Σύνολο		1246	1125	1531	840	N= 2371

Η συλλογή του πληθυσμού έγινε με τυχαία δειγματοληψία και συμπεριλάμβανε μαθητές/-ριες από πολύ χαμηλή έως και πολύ υψηλή επίδοση στη γλώσσα και τα μαθηματικά, σύμφωνα με άτυπη αξιολόγηση των εκπαιδευτικών.

Μέσα συλλογής δεδομένων

Το ερευνητικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε είναι το «Τεστ Μαθηματικού Προφίλ & Δυσαριθμησίας» (MathPro Test) (Karagiannakis &Noël, submitted), καθώς η εν λόγω έρευνα διεξήχθη στο πλαίσιο της στάθμισης του εργαλείου στην Ελλάδα. Πρόκειται για το πρώτο σταθμισμένο, ψηφιακό και πλήρες εργαλείο αξιολόγησης των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων και έγκαιρης ανίχνευσης μαθητών/-ριών που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά ή δυσαριθμησία, αναδεικνύοντας, τόσο τα δυνατά σημεία, όσο και τις πιθανές αδυναμίες των μαθητών/-ριών, σκιαγραφώντας το λεπτομερή μαθηματικό γνωστικό προφίλ για κάθε μαθητή/-ρια (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014. Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Papadatos, 2014. Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Roussos, 2017. Karagiannakis & Cooreman, 2014).

Για την εν λόγω έρευνα έγινε χρήση των αριθμητικών δοκιμασιών (νοεροί υπολογισμοί, προβλήματα, αρχές αριθμητικής, αριθμητικά μοτίβα), που απαιτούν υπολογισμούς και των οπτικοχωρικών (αριθμογραμμές 0 –100, αριθμογραμμές 0-1000, τετράγωνα, κύβοι), που χαρακτηρίζονται από οπτικό ερέθισμα (δείτε αναλυτικά τις δοκιμασίες εδώ: https://public.mathpro.education/).

Αποτελέσματα

Όσον αφορά τα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα, συντελέστηκε μία σειρά από μονοπαραγοντικές αναλύσεις ANOVA, για την καθεμία εξαρτημένη μεταβλητή, αφού πραγματοποιήθηκε έλεγχος για τη διασφάλιση των προϋποθέσεων χρήσης του κριτηρίου και έπειτα, εκ των υστέρων συγκρίσεις (post–hoc), για τον εντοπισμό της συγκεκριμένης ή των συγκεκριμένων διαφορών μεταξύ των μέσων όρων της επίδοσης των τάξεων.

Κατά τη διερεύνηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος, χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής συσχέτισης Pearson r για την πραγματοποίηση συσχετιστικών αναλύσεων για όλες τις εξαρτημένες μεταβλητές, αφού διασφαλίστηκαν οι προϋποθέσεις χρήσης του κριτηρίου. Αναγκαία υποσημείωση, στην περίπτωση των αριθμογραμμών 0 – 100 και 0 – 1000, είναι ότι η βαθμολογία ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της εκτίμησης του/της μαθητή/-ριας και της πραγματικής θέσης του αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή. Επομένως, όσο μικρότερη είναι η βαθμολογία στις δύο αυτές οπτικοχωρικές δοκιμασίες, τόσο καλύτερη είναι και η επίδοση, γι’ αυτό και οι ενδοσυνάφειες με τις αριθμογραμμές προκύπτουν αρνητικές, αλλά στην ουσία είναι θετικές.

Επίδραση ηλικίας στην επίδοση αριθμητικών δοκιμασιών

Στα αριθμητικά ερεθίσματα, η επίδοση των μαθητών φάνηκε να επηρεάζεται από την ηλικία, καθώς βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους μέσους όρους των διαφορετικών σχολικών τάξεων {νοεροί υπολογισμοί: $F(4, 193,3) = 27,75$, $p<0,001$, $\omega^2=0,05$, 95% CI [0,64 – 0,66], προβλήματα: $F(4, 187,78) = 56,54$, $p<0,001$, $\omega^2 = 0,11$, 95% CI [0,59 – 0,62], αρχές αριθμητικής: $F(4, 116,4) = 35,47$, $p<0,001$, $\omega^2=0,08$, 95% CI [0,50 – 0,53], αριθμητικά μοτίβα: $F(5, 2068) = 1,52$ $p=0,179$, $\eta^2 = 0,134$, 95% CI [0,44 – 0,46]}.

Αναδύθηκαν αρκετές στατιστικά σημαντικές διαφορές, όπως και ορισμένες κοινές μη στατιστικά σημαντικές διαφορές. Σε καμία από τις τέσσερις αριθμητικές δοκιμασίες δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των τάξεων Ε΄ και Στ΄, ενώ επίσης σε όλες τις δοκιμασίες, πλην των νοερών υπολογισμών, δεν υπήρξε ούτε μεταξύ των τάξεων Β΄ και Γ΄, αλλά και μεταξύ των τάξεων Γ΄ και Δ΄, σε όλες, πλην των προβλημάτων. Παράλληλα, εντοπίστηκαν υψηλά μεγέθη επίδρασης στη δοκιμασία των προβλημάτων, στη τάξη Γ΄ με Ε΄ και με Στ΄, αντίστοιχα, όπως το ίδιο παρατηρήθηκε και στα αριθμητικά μοτίβα, μεταξύ της Β΄ με τις Ε΄ και Στ΄ τάξεις. Τέλος, υψηλά μεγέθη επίδρασης εντοπίστηκαν και μεταξύ της Β΄ και όλων σχεδόν των τάξεων, σε όλες τις δοκιμασίες, αλλά δεν αναφέρονται με βεβαιότητα, όπως και στην περίπτωση της Α΄ δημοτικού στα αριθμητικά μοτίβα, λόγω τεχνικών προβλημάτων κατά την χορήγηση.

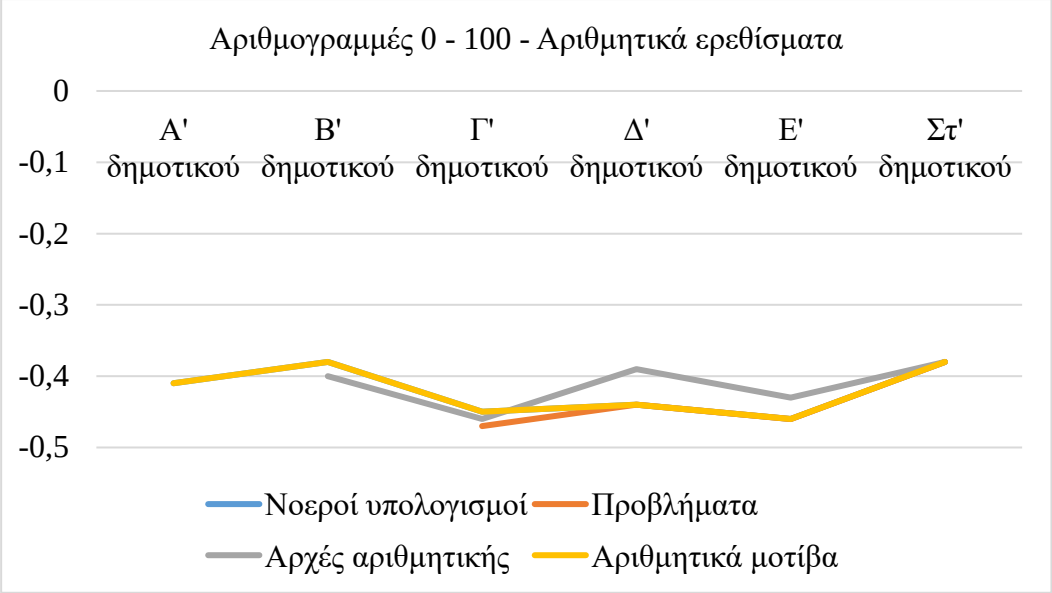
Επίδραση ηλικίας στην επίδοση οπτικοχωρικών δοκιμασιών

Η επίδοση στα οπτικοχωρικά ερεθίσματα φάνηκε ότι επηρεάζεται από την ηλικία καθώς οι διαφορές των μέσων όρων των τάξεων ήταν στατιστικά σημαντικές {αριθμογραμμές 0 – 100: $F(5, 349,56) = 72,59$, $p < 0,001$, $\omega^2 = 0,14$, 95% CI [7,30–7,75], αριθμογραμμές 0 – 1000: $F(2, 885,56) = 50,65$, $p < 0,001$, $\omega^2 = 0,06$, 95%CI [94,18 – 101,69], τετράγωνα: $F(5, 6,82) = 151,11$, $p < 0,001$, $\omega^2 = 0,25$, 95% CI [0,56 – 0,58], κύβοι: $F(5, 5,51) = 96,59$, $p < 0,001$, $\omega^2 = 0,16$, 95% CI [0,63-0,65]}.

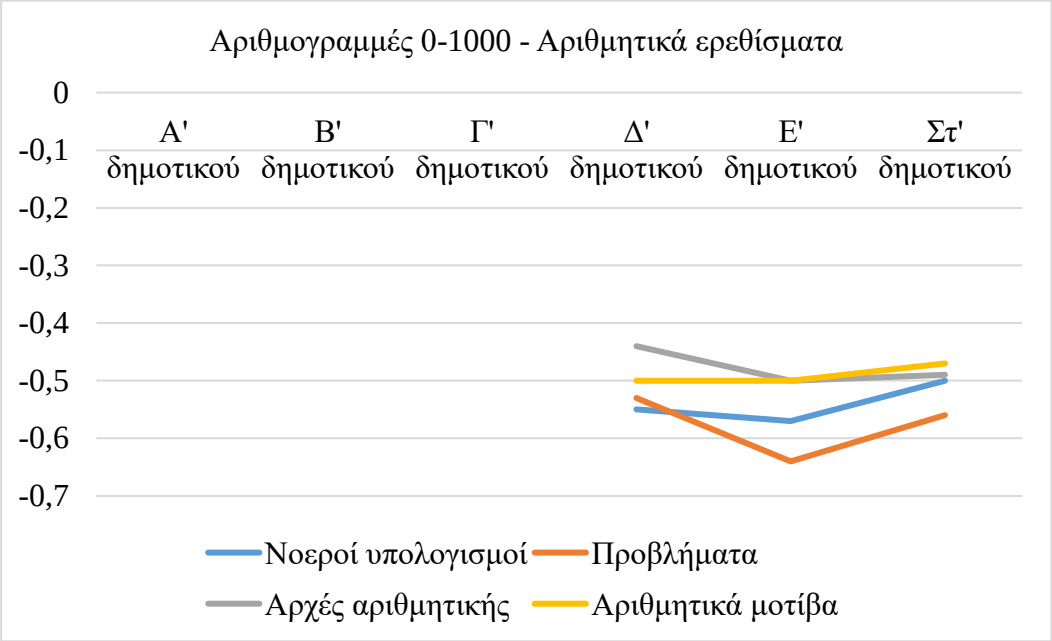
Εντοπίστηκαν πολλές κοινές υψηλά στατιστικά σημαντικές διαφορές, όπως και ορισμένες κοινές μη στατιστικά σημαντικές διαφορές. Σε όλες τις δοκιμασίες δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των τάξεων Ε΄ και Στ΄, παρά μόνο στις αριθμογραμμές 0 – 1000, αλλά και πάλι το μέγεθος επίδρασης ήταν πολύ χαμηλό. Μία μη στατιστικά σημαντική διαφορά, ακόμη, ήταν αυτή μεταξύ των Γ΄ και Δ΄, στους κύβους. Αντιθέτως, οι υψηλά στατιστικά σημαντικές διαφορές είχαν κοινό παρονομαστή τη Β΄ με τις Ε΄ και Στ΄, σε όλες τις δοκιμασίες, πλην των αριθμογραμμών 0 – 1000, οι οποίες δεν χορηγήθηκαν και στην εν λόγω ηλικία. Παράλληλα, στα τετράγωνα και στους κύβους, αναδείχθηκαν οι κοινές υψηλά στατιστικά σημαντικές διαφορές, μεταξύ της Α΄ και των Δ΄, Ε΄, Στ΄. Επιπλέον, στις αριθμογραμμές 0 – 100, υπήρχε υψηλά στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των Γ΄ και Στ΄. Τέλος, υψηλά μεγέθη επίδρασης εντοπίστηκαν και μεταξύ της Α΄ και όλων σχεδόν των τάξεων, στις αριθμογραμμές 0 - 100, αλλά λόγω τεχνικών προβλημάτων δεν αναφέρονται με βεβαιότητα.

Συσχέτιση αριθμητικών – οπτικοχωρικών δοκιμασιών

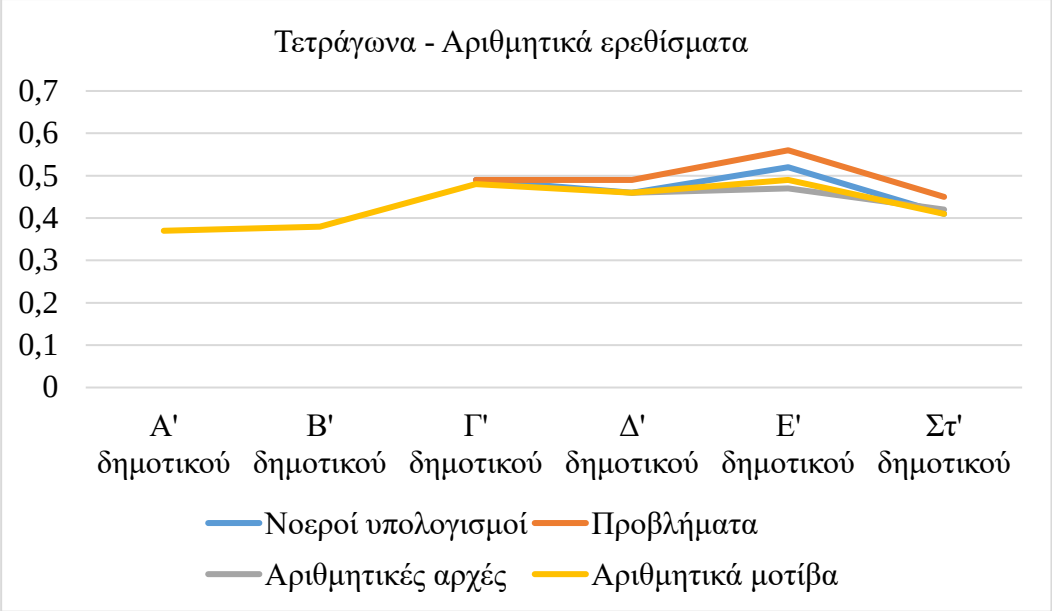
Παρατηρήθηκαν αρκετές συσχετίσεις των οπτικοχωρικών με των αριθμητικών ερεθισμάτων σε όλες τις τάξεις, αν και δεν υπάρχει μία γενική εικόνα για το βαθμό αυτών με το πέρας της ηλικίας. Όλες οι στατιστικά σημαντικές συνάφειες κυμαίνονται σε μεσαίο επίπεδο, ενώ θα μπορούσε να διαπιστωθεί μία μείωση ή μία σχετική σταθερότητα του βαθμού συσχέτισης μεταξύ Ε΄ και Στ΄, στις περισσότερες εκ των περιπτώσεων. Τέλος, δεν είναι λίγες οι συσχετίσεις, ο βαθμός των οποίων παρουσιάζει συνεχείς αυξομειώσεις από τάξη σε τάξη, όπου αν και τις περισσότερες φορές φάνηκε να ξεκινάει από χαμηλή συνάφεια και έπειτα να αυξάνεται, υπήρχαν και αντίθετες περιπτώσεις.



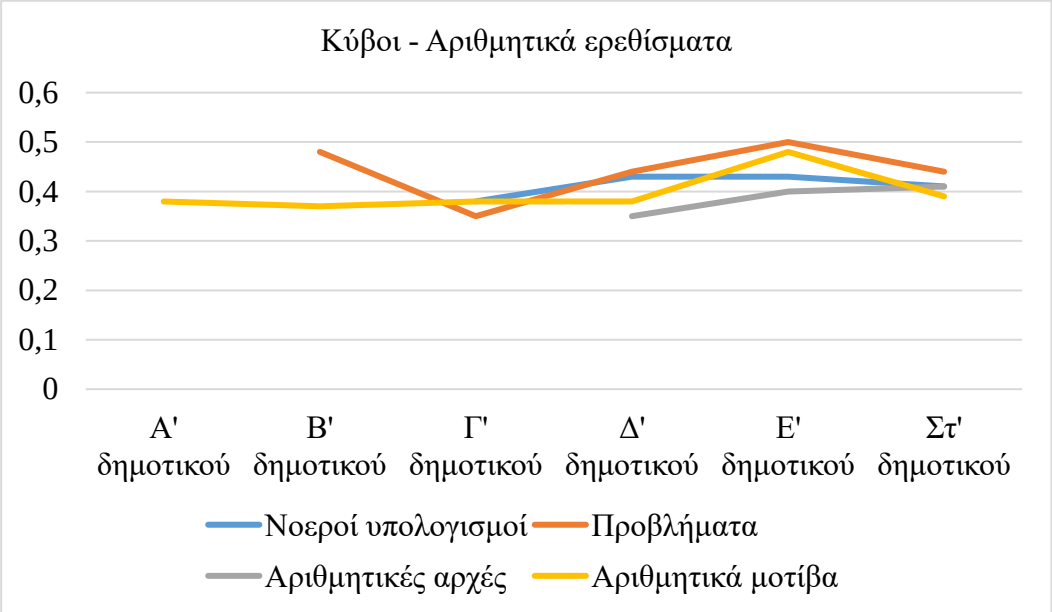
Σχήμα 1. Δείκτες συσχέτισης των αριθμογραμμών 0 – 100 με όλες τις αριθμητικές δοκιμασίες συλλογιστικής ανά τάξη.



Σχήμα 2. Δείκτες συσχέτισης των αριθμογραμμών 0 – 1000 με όλες τις αριθμητικές δοκιμασίες συλλογιστικής ανά τάξη.



Σχήμα 3. Δείκτες συσχέτισης των τετραγώνων με όλες τις αριθμητικές δοκιμασίες συλλογιστικής ανά τάξη.



Σχήμα 4. Δείκτες συσχέτισης των κύβων με όλες τις αριθμητικές δοκιμασίες συλλογιστικής ανά τάξη.

Συζήτηση

Επίδραση ηλικίας στα αριθμητικά ερεθίσματα

Οι στατιστικές αναλύσεις κατέδειξαν ότι η ηλικία επιδρά σημαντικά στη βελτίωση των αριθμητικών δεξιοτήτων συλλογιστικής. Αυτό διαφαίνεται έντονα με τα υψηλά μεγέθη επίδρασης μεταξύ των μικρότερων και μεγαλύτερων τάξεων στο σύνολο των ερεθισμάτων. Βέβαια, στις αρχές αριθμητικής σημειώθηκαν διαφορές με παρόμοια μεγέθη επίδρασης στις περισσότερες τάξεις. Ενδεχομένως αυτό στηρίζεται στο γεγονός ότι στις πρώτες τάξεις του δημοτικού, οι περισσότεροι/-ες μαθητές/-ριες, αναμένεται να έχουν αποκτήσει την έννοια της διατήρησης της ύλης και της αντιστρέψιμης λογικής, με αποτέλεσμα να

σημειώνουν και υψηλότερες επιδόσεις στους βασικούς υπολογισμούς (Lambert & Spinath, 2018).

Παράλληλα, εντοπίστηκαν υψηλά μεγέθη επίδρασης στη δοκιμασία των προβλημάτων, στη τάξη Γ΄ με Ε΄ και με Στ΄, χωρίς να υποκρύπτεται η σημασία και των υπόλοιπων διαφορών με μεσαίο μέγεθος επίδρασης. Δεδομένου, λοιπόν, ότι στις δοκιμασίες συλλογιστικής, ο/η μαθητής/-ρια καλείται να απονοηματοδοτήσει το πρόβλημα, είναι περισσότερο σύνηθες στις μεγαλύτερες τάξεις να έχει πλέον εξοικειωθεί στην αναγνώριση των σχέσεων αναλογίας μεταξύ των προβλημάτων, άρα και στη χαρτογράφηση, ώστε να επιλύει με μεγαλύτερη ακρίβεια (Begolli et al., 2018). Αντίστοιχα, το ίδιο παρατηρήθηκε και στα αριθμητικά μοτίβα, μεταξύ της Β΄ με τις Ε΄ και Στ΄ τάξεις. Άλλωστε η περιγραφή προβλέψιμων ακολουθιών, αποτελεί προγνωστικό δείκτη για διάφορα μαθηματικά επιτεύγματα στην Ε΄ δημοτικού (Rittle – Johnson et al., 2018).

Τέλος, η μη ύπαρξη σημαντικής διαφοράς μεταξύ των Ε΄ και Στ΄ και μεταξύ των τάξεων Β΄ και Γ΄ (εκτός από τη δοκιμασία των νοερών υπολογισμών), αλλά και μεταξύ των τάξεων Γ΄ και Δ΄, σε όλες πλην των προβλημάτων, ίσως φανερώνει τη μη αισθητή αλλαγή στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στις δεδομένες τάξεις. Βέβαια, επειδή από τη Β΄ στη Γ΄, στους νοερούς υπολογισμούς, και από τη Γ΄ στη Δ΄, στα προβλήματα, προστίθενται επιπλέον ερωτήματα, λόγω περισσότερων γνώσεων, εμφανίζονται και πάλι στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Επίδραση ηλικίας στα οπτικοχωρικά ερεθίσματα

Η έρευνα δείχνει ότι στις μεγαλύτερες τάξεις οι επιδόσεις των μαθητών/-ριών βελτιώνονται στις χωρικές δοκιμασίες της συλλογιστικής. Αρκετά υψηλό ήταν το μέγεθος επίδρασης της Β΄ με τις Ε΄ και Στ΄, σε όλες τις δοκιμασίες, πλην των αριθμογραμμών 0 – 1000, οι οποίες δεν χορηγήθηκαν και στην εν λόγω ηλικία, αλλά και μεταξύ της Α΄ με όλες τις τάξεις, στοιχεία που στηρίζονται, άλλωστε, σύμφωνα με τους Uttal et al., (2013), στην μεταβλητότητα και πλαστικότητά τους. Επιπρόσθετα, η ολοένα και αυξανόμενη χρήση τους στη σχολική ηλικία συμβάλλει στην αναφερόμενη εξέλιξη, βάσει πληθώρα ερευνών (Carr et al., 2018. Rittle – Johnson et al., 2018). Αναλύοντας και επεξηγώντας τα αποτελέσματα, αρχικά, στις δεξιότητες των αριθμογραμμών 0 – 100 και 0 – 1000, παρατηρήθηκε πολύ υψηλό μέγεθος επίδρασης στις μικρές τάξεις, ενώ μειωνόταν αισθητά στις μεγαλύτερες. Αυτό επεξηγείται διότι, κατά την ανάπτυξη, βαθμιαία μεταβαίνουν από μία λογαριθμική σε μία γραμμική αναπαράσταση (Siegler & Booth, 2014), ωστόσο, σύμφωνα με τους Muldoon et al. (2013, όπ. αναφ. στο Simms et al., 2016) ταυτόχρονα έχουν λογαριθμικές αναπαραστάσεις για κάποιες κλίμακες και γραμμικές για κάποιες άλλες. Έτσι, ίσως, δικαιολογείται και η μη σημαντικά στατιστική διαφορά μεταξύ των Ε΄ και Στ΄ (υπερισχύουν οι γραμμικές στις αριθμογραμμές με τελικό άκρο το 1000), αλλά και η υψηλή διαφορά μεταξύ Γ΄ και Στ΄, αφού ακόμη παραμένουν στις λογαριθμικές (Ashcraft & Moore, 2012).

Εν συνεχεία, στα αποτελέσματα των δοκιμασιών που αφορούσαν τα τετράγωνα και τους κύβους, αναδείχθηκαν οι κοινές στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ της Α΄ και των Δ΄, Ε΄, Στ΄, αλλά και της Β΄ με τις Ε΄ και Στ΄, με υψηλό μέγεθος επίδρασης, αλλά και μεταξύ των υπόλοιπων τάξεων η ηλικία επηρέαζε θετικά την επίδοση των μαθητών/-ριών.

Επιπροσθέτως, η χωρική οπτικοποίηση και η νοητική περιστροφή, που συνδέονται με τις προηγούμενες δοκιμασίες, συσχετίζονται με τις αρχές αριθμητικής, κυρίως από τη Δ΄ τάξη και έπειτα, όπως προκύπτει από το αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει, ίσως διότι δεν χρησιμοποιούνται έντονα στις μικρές

ηλικίες λόγω δυσκολίας. Αργότερα, βέβαια, τείνουν να συνειδητοποιούν την εννοιολογική σχέση πρόσθεσης και αφαίρεσης (η μία αντίστροφη της άλλης), προβαίνοντας σε απαραίτητες νοητές αντιστροφές των ενδεχόμενων γινομένων μετασχηματισμών (Verdine et al., 2014).

Τέλος, αναφέρθηκε η μη στατιστικά σημαντική διαφορά των τάξεων Ε΄ και Στ΄ σε όλες τις δοκιμασίες, μιας και στις αριθμογραμμές 0 – 1000 και πάλι το μέγεθος επίδρασης ήταν πολύ χαμηλό, όπως και η μη στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των Γ΄ και Δ΄, στους κύβους. Αυτό ίσως δηλώνει μη διαφορά στην ανάπτυξη των οπτικοχωρικών δεξιοτήτων στις ηλικίες αυτές, όπου το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών δεν διαφέρει κατά πολύ, αν και δεν βρέθηκε κάποια σχετική έρευνα που το τεκμηριώνει.

Συσχέτιση αριθμητικών - οπτικοχωρικών ερεθισμάτων ανά τάξη

Παρατηρήθηκαν αρκετές συσχετίσεις των οπτικοχωρικών με των αριθμητικών ερεθισμάτων σε όλες τις τάξεις, οι δείκτες των οποίων κυμαίνονται σε μεσαίο επίπεδο. Πιο ενδελεχώς, όλες οι οπτικοχωρικές δοκιμασίες της συλλογιστικής φάνηκαν να έχουν συνάφεια με τα αριθμητικά προβλήματα, χαρακτηριζόμενη, μάλιστα, και από έναν σχετικά αυξανόμενο βαθμό, κατά το πέρας των τάξεων, με κορύφωση κατά κύριο λόγο στην Ε΄ δημοτικού. Το εν λόγω εύρημα θα μπορούσε να σχετιστεί και με την έρευνα των Casey et al. (2015), οι οποίοι επιβεβαίωσαν, στη διαχρονική τους έρευνα, τη σχέση μεταξύ πρώιμων οπτικοχωρικών δεξιοτήτων σε κορίτσια Α΄ δημοτικού και της μεταγενέστερης ικανότητάς τους στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων στην Ε΄ τάξη. Επιπλέον, στην έρευνα των Verdine et al. (2017), 33 μαθητές στη Στ΄ τάξη, που χρησιμοποιούν σχηματικές χωρικές αναπαραστάσεις (π.χ. διαγράμματα), είχαν καλύτερη επίδοση στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Παράλληλα, έχει αποδειχθεί ότι γενικά οι οπτικοχωρικές δεξιότητες αποτελούν προγνωστικό δείκτη της μελλοντικής επίδοσης σε αριθμητικές δραστηριότητες συλλογιστικής (Carr et al., 2018. Young et al., 2018), μιας που η ικανότητα οπτικοποίησης των μετασχηματισμών είναι πλεονέκτημα για την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων (Verdine et al., 2017).

Κατόπιν, μεσαίες συσχετίσεις διακρίνονται και μεταξύ των τετραγώνων και κύβων με τους νοερούς υπολογισμούς, εμφανίζοντας μία μικρή αύξηση με το πέρας των τάξεων ή μία σχετική σταθερότητα. Βέβαια, σύμφωνα με τους Casey et al. (2017) και Young, et al. (2018), έχουν διαπιστωθεί συνδέσεις μεταξύ της νοητής περιστροφής και διάφορων αριθμητικών δεξιοτήτων στις πρώτες τάξεις του δημοτικού. Ιδιαίτερη, μάλιστα, αναφορά έχει γίνει στην αυξημένη ικανότητα νοητής περιστροφής, σε παιδιά ηλικίας έξι έως οκτώ ετών, που έχει διαπιστωθεί από τους Cheng & Mix (2014) ότι επιφέρει αξιόλογη άνοδο στην επίδοση σε υπολογιστικές δοκιμασίες. Όσον αφορά τις συνάφειες μεταξύ οπτικοχωρικών ερεθισμάτων και των δοκιμασιών των αρχών αριθμητικής, παρατηρείται μία σχετική αύξηση στο βαθμό, στις Ε΄ και Στ΄ δημοτικού, όπου η χωρική απεικόνιση αναπτύσσεται περισσότερο και βάσει των Mix et al. (2016, όπ. αναφ. στο Lowrie et al., 2017) αποτελεί τον βέλτιστο προγνωστικό δείκτη στη Στ΄ δημοτικού ως προς την επίλυση προβλημάτων γενικότερα, στις θέσεις των ψηφίων. Βέβαια, παρατηρήθηκαν και συνεχείς αυξομειώσεις από τάξη σε τάξη, ξεκινώντας τις περισσότερες φορές από χαμηλή συνάφεια και έπειτα αυξανόμενη, θεωρητικά λόγω των αναπτυσσόμενων οπτικοχωρικών δεξιοτήτων.

Περιορισμοί

Δεν επεξεργάστηκαν τα δημογραφικά στοιχεία, οι διατομικές διαφορές, η φωνολογική επίγνωση και ο βαθμός της αναγνωστικής ευχέρειας των μαθητών/-

ριών (π.χ. για τα λεκτικά προβλήματα). Επιπρόσθετα, οι στρατηγικές κατά τη διάρκεια της χορήγησης, άρα ο βαθμός επιρροής της εκπαιδευτικής διαδικασίας και τυχόν αναπτυξιακές διαφορές παραμένουν σχετικά ασαφείς και τέλος, η ύπαρξη τεχνικών προβλημάτων κατά την χορήγηση.

Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εστιάσουν και σε άλλες γνωστικές δεξιότητες, είτε μεμονωμένες, είτε ελέγχοντας την πιθανή συσχέτιση αυτών. Επιπλέον, η μελέτη και διαχρονικά της αναπτυξιακής πορείας μίας συγκεκριμένης ομάδας μαθητών/-ριών στο σύνολο των γνωστικών δεξιοτήτων του MathPro Test, για να αναδυθεί με πλήρη βεβαιότητα η ενδεχόμενη επίδραση της ηλικίας. Παράλληλα, θα μπορούσε να επεκταθεί η συσχέτιση με τις οπτικοχωρικές δεξιότητες, αν συμπεριληφθεί και το στάδιο της επίλυσης προβλημάτων (ως πιο αντιπροσωπευτικών). Ακόμη, η λεπτομερής εξέταση υπό το πρίσμα των διατομικών διαφορών ή/και δημογραφικών στοιχείων των συμμετεχόντων/-ουσών και τέλος, η μελέτη για το αν η μη ύπαρξη στατιστικά σημαντικής διαφοράς μεταξύ των Ε΄ και Στ΄ δημοτικού, αλλά και των Γ΄ και Δ΄ δημοτικού, σχετίζεται με τη μείωση του βαθμού συνάφειας οπτικοχωρικών και αριθμητικών ερεθισμάτων συλλογιστικής στις τάξεις αυτές.

Βιβλιογραφία

Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση. Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρης

Andersen, L. (2014). Visual–spatial ability: Important in STEM, ignored in gifted education. *Roeper Review*, *36*(2), 114-121.

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of experimental child psychology*, *111*(2), 246-267.

Begolli, K. N., Richland, L. E., Jaeggi, S. M., Lyons, E. M., Klostermann, E. C., & Matlen, B. J. (2018). Executive function in learning mathematics by comparison: incorporating everyday classrooms into the science of learning. *Thinking & Reasoning*, *24*(2), 280-313.

Carr, M., Alexeev, N., Wang, L., Barned, N., Horan, E., & Reed, A. (2018). The development of spatial skills in elementary school students. *Child development*, *89*(2), 446-460.

Casey, B. M., Lombardi, C. M., Pollock, A., Fineman, B., & Pezaris, E. (2017). Girls' Spatial Skills and Arithmetic Strategies in First Grade as Predictors of Fifth-Grade Analytical Math Reasoning. *Journal of Cognition and Development*, *18*(5), 530-555.

Casey, B. M., Pezaris, E., Fineman, B., Pollock, A., Demers, L., & Dearing, E. (2015). A longitudinal analysis of early spatial skills compared to arithmetic and verbal skills as predictors of fifth-grade girls' math reasoning. *Learning and Individual Differences*, *40*, 90-100.

Cheng, Y. L., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, *15*(1), 2-11.

Harris, M. M. (2019). Why We Teach Mathematics to Every Student: Determining Impact of Mathematics on Problem Solving and Logical Reasoning Skills.

Karagiannakis, G. N., & Cooreman, A. (2014). Focused MLD intervention based on the classification of MLD subtypes. *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties*, 265-275.

Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, *21*(2), 115-141.

Karagiannakis, G., & Baccaglini-Frank, A. (2014). The DeDiMa battery: a tool for identifying students' mathematical learning profiles. *Health Psychology Review*, *2*(4), 291-297.

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in human neuroscience*, *8*, 57.

Lambert, K., & Spinath, B. (2018). Conservation abilities, visuospatial skills, and numerosity processing speed: association with math achievement and math difficulties in elementary school children. *Journal of learning disabilities*, *51*(3), 223-235.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479-1498.

Logan, T., & Lowrie, T. (2017). Gender perspectives on spatial tasks in a national assessment: a secondary data analysis. *Research in Mathematics Education*, *19*(2), 199-216.

Lowrie, T., Logan, T., & Ramful, A. (2017). Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. *British Journal of Educational Psychology*, *87*(2), 170-186.

Mix, K. S., & Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: Developmental and educational implications. In *Advances in child development and behavior* (Vol. 42, pp. 197-243). JAI.

Passolunghi, M. C., & Mammarella, I. C. (2010). Spatial and visual working memory ability in children with difficulties in arithmetic word problem solving. *European Journal of Cognitive Psychology*, *22*(6), 944-963.

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2018). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*.

Ρούσσος, Π. (2014). *Γνωστική Ψυχολογία. Ανώτερες γνωστικές διεργασίες*. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος

Σ., Βοσνιάδου (Επιμ.) (1998). *Η ψυχολογία των Μαθηματικών*. (Γ., Μπαρουξής, Μ., Σταφυλίδου, & Σ., Βοσνιάδου, Μετάφρ.) Αθήνα: Gutenberg

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, *75*(2), 428-444.

Simms, V., Clayton, S., Cragg, L., Gilmore, C., & Johnson, S. (2016). Explaining the relationship between number line estimation and mathematical achievement: the role of visuomotor integration and visuospatial skills. *Journal of experimental child psychology*, *145*, 22-33.

Tambychik, T., & Meerah, T. S. M. (2010). Students' difficulties in mathematics problem-solving: What do they say?. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *8*, 142-151.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological bulletin*, *139*(2), 352.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S., Filipowicz, A. T., & Chang, A. (2014). Deconstructing building blocks: Preschoolers' spatial assembly performance relates to early mathematical skills. *Child development*, *85*(3), 1062-1076.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S., Filipowicz, A. T., & Chang, A. (2014). Deconstructing building blocks: Preschoolers' spatial assembly performance relates to early mathematical skills. *Child development*, *85*(3), 1062-1076.

Young, C. J., Levine, S. C., & Mix, K. S. (2018). The connection between spatial and mathematical ability across development. *Frontiers in psychology*, *9*.