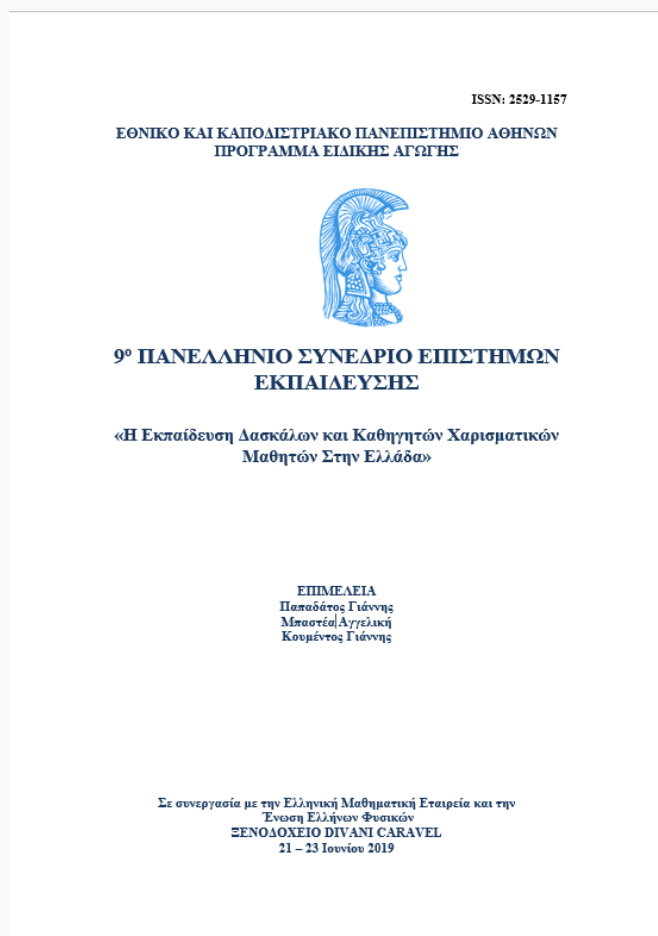


Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 9 (2019)

9ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



Η επίδραση επιμέρους μαθηματικών δεξιοτήτων στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση κλασμάτων μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού

Ελένη Αθηναίου, Γιάννης Καραγιαννάκης, Ευαγγελία Γαλανάκη

doi: [10.12681/edusc.3105](https://doi.org/10.12681/edusc.3105)

Βιβλιογραφική αναφορά:

Αθηναίου Ε., Καραγιαννάκης Γ., & Γαλανάκη Ε. (2020). Η επίδραση επιμέρους μαθηματικών δεξιοτήτων στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση κλασμάτων μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, 9, 53–76. <https://doi.org/10.12681/edusc.3105>

Η επίδραση επιμέρους μαθηματικών δεξιοτήτων στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση κλασμάτων μαθητών Ε' και Στ' δημοτικού

Ελένη Αθηναίου

Εκπαιδευτικός Π.Ε., Μεταπτυχιακό στην Εφαρμοσμένη Ψυχολογία στην Εκπαίδευση

athinaiou_eleni@yahoo.gr

Γιάννης Καραγιαννάκης

Τμήμα Ψυχολογίας, Ε.Κ.Π.Α.

G.Karagiannakis@primedu.uoa.gr

Ευαγγελία Γαλανάκη

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Ε.Κ.Π.Α.

egalanaki@primedu.uoa.gr

Περίληψη

Παρόλο που η σημασία αποτελεσματικής διαχείρισης των κλασμάτων έχει αναδειχθεί από πολλούς ερευνητές, οι προαπαιτούμενες μαθηματικές δεξιότητες για τον σκοπό αυτόν δεν έχουν διερευνηθεί ακόμη. Οι μέχρι τώρα προσπάθειες έχουν επικεντρωθεί κυρίως σε ευρήματα σχετικά με την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων. Η παρούσα μελέτη στοχεύει να αναδείξει αυτές τις μαθηματικές δεξιότητες που σχετίζονται με την κλασματική γνώση σε μαθητές Ε' και Στ' δημοτικού. Σε αυτήν έλαβαν μέρος 99 μαθητές σχολικής ηλικίας κατά μέσο όρο 11,1 ετών οι οποίοι φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία του νομού Ευβοίας. Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκαν το MathPro test το οποίο αξιολόγησε επιμέρους μαθηματικές δεξιότητες των συμμετεχόντων ως προς την Επίγνωση Αριθμού, τη Μνήμη, την Οπτικο-χωρική ικανότητα και τη Συλλογιστική και ένα αυτοσχέδιο τεστ για την συνολική, εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση στα κλάσματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι από τις δραστηριότητες του MathPro test, τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί προβλέπουν τη συνολική και την εννοιολογική κλασματική επίδοση των συμμετεχόντων. Η διαδικαστική επίδοση στα κλάσματα φάνηκε να προβλέπεται από τους Κύβους, τα Προβλήματα και τους Νοερούς Υπολογισμούς. Συμπερασματικά, οι μαθηματικές δεξιότητες που σχετίζονται με τον Οπτικο-χωρικό

τομέα και αυτόν της Συλλογιστικής φάνηκε ότι προβλέπουν την επίδοση στην κλασματική γνώση.

Λέξεις-Κλειδιά

κλάσματα; εννοιολογική γνώση; διαδικαστική γνώση; μαθηματικές δεξιότητες

Abstract

Although the significance of efficient fractions manipulation has been underlined by many researchers, the mathematical skills required for this purpose have not been detected yet. The attempts made so far have mainly focused on findings regarding conceptual and procedural fractional knowledge. The present study aimed to investigate these mathematical skills for pupils between 9.91 and 13.83 years of age. The participants for this study were at 11.1 years of school age on average, attending the 5th and 6th grade in state primary schools in Evia (prefecture, Greece). Two tools were employed. The first one was the MathPro test, which assessed the participants' mathematical skills focusing on Core Number, Memory, Visual-spatial ability and Reasoning. The second one was a test assessing the total, conceptual and procedural fractional knowledge. The results showed that two activities of MathPro test, Problems and Mental Calculations predict the total and the conceptual performance in fractions. The procedural performance in fractions appeared to be predicted by three activities of MathPro test which were Cubes, Problems and Mental Calculations. In conclusion, fractional knowledge performance can be predicted by the mathematical skills related to the Visual-spatial domain and Reasoning domain

Keywords

fractions; conceptual knowledge; procedural knowledge; mathematical skills

Κλασματική Γνώση

Οι δεκαδικοί και οι κλασματικοί αριθμοί έχουν τεθεί στο επίκεντρο των ερευνών αφού συνδέονται με υψηλές αμοιβές στην επαγγελματική σταδιοδρομία του ατόμου (Murnane, Willett, & Levy, 1995). Οι καθημερινές εργασίες απαιτούν τη διαχείριση κλασμάτων σε καθημερινή βάση (Grossberg, 2018· Tian & Siegler, 2016). Επιπλέον, η ικανότητα διαχείρισης κλασμάτων έχει φανεί ότι είναι απαραίτητη για πιο προηγμένες μαθηματικές γνώσεις όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία, η στατιστική, η φυσική και η χρήση μετρητικών συστημάτων (Shellenbarger, 2013 · Bailey, Hoard, Nugent, & Geary, 2012· Siegler, Duncan, Davis-Kean, Duckworth, Claessens, Engel, & Chen, 2012· Εθνική Συμβουλευτική Επιτροπή για τα Μαθηματικά [NMAP], 2008· Christou & Vosniadou, 2005). Επιπλέον αυτή συνδέεται με την επιτυχία στα Μαθηματικά και τη γενικότερη επιτυχία του ατόμου (Jayanthi, Gersten, Taylor, Smolkowski, & Dimino, 2017· Tian, & Siegler, 2016· Siegler, Fazio, Bailey, & Zhou, 2013· Bailey et al., 2012· Siegler et al., 2012· Hecht, Close, & Santisi, 2003) καθώς και με την πλήρη ανάπτυξή του (Μαγκλάρα & Αργυρόπουλος, 2016).

Από τα τέλη της δεκαετίας του '70 έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για τη βελτίωση της εκπαίδευσης που λαμβάνουν οι μαθητές σχετικά με την κλασματική γνώση. Πιο συγκεκριμένα, στο στόχαστρο των ενεργειών αυτών ήταν η κατάκτηση καλύτερης εννοιολογικής γνώσης των κλασμάτων, ζήτημα με το οποίο έχουν ασχοληθεί κυβερνητικές επιτροπές και εθνικές επιτροπές εκπαιδευτικών. Ακόμα, το θέμα έχει μελετηθεί αρκετά σε ερευνητικό επίπεδο και έχουν γίνει δημοσιεύσεις άρθρων σχετικά με αυτό. Ωστόσο, παρά τις μεταρρυθμίσεις και την σπατάλη χρόνου

και χρήματος η πιο σύγχρονη βιβλιογραφία αναφέρει ότι έχει σημειωθεί ελάχιστη βελτίωση στον τομέα αυτόν (Lortie- Forgues, Tian, & Siegler, 2015).

Για τη διαχείριση των κλασμάτων απαιτείται μαθηματική γνώση που διακρίνεται σε εννοιολογική και διαδικαστική. Η πρώτη αφορά τις ιδιότητες του κλάσματος όπως μέγεθος, αρχές και συμβολισμός και βοηθά το υποκείμενο να κατανοήσει και νοηματοδοτήσει με τον προσωπικό του τρόπο το αντικείμενο μελέτης του. Από την άλλη πλευρά, η δεύτερη αναφέρεται στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και οδηγεί σε έναν τρόπο σκέψης περισσότερο επιφανειακό όπου κυριαρχεί η τάση αναπαραγωγής των ήδη διδαχθέντων στρατηγικών και χρήσης των έτοιμων λύσεων (Bempeni & Vamvakoussi, 2015· Siegler et al., 2013· Stathopoulou & Vosniadou, 2007).

Δυσκολίες στη Διαχείριση Κλασμάτων

Συχνά οι μαθητές συναντούν σημαντικές δυσκολίες καθώς διαχειρίζονται τα κλάσματα. Έρευνες έχουν προσπαθήσει να εντοπίσουν τις αιτίες αυτών των δυσκολιών (Lemonidis, 2015· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007· Stafylidou & Vosniadou, 2004· Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Σε έρευνά τους οι Butler, Miller, Crehan, Babbitt και Pierce (2003) αναφέρουν ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να διαχειριστούν αποτελεσματικά τα κλάσματα λόγω αδυναμίας σύνδεσης της μορφής των κλασμάτων με την εμπειρία τους από τον καθημερινό κόσμο και της χρήσης βοηθητικών αντικειμένων στη διδασκαλία. Ακόμα, οι ίδιοι θεωρούν ότι δυσκολίες προέρχονται από την αδυναμία διαχείρισης των δεκαδικών αριθμών σε συνδυασμό με τους κλασματικούς που οφείλεται στη λάθος ονομασία των πρώτων, στη λανθασμένη διάταξή τους ανάλογα με την ποσότητα που εκφράζουν και στην αδυναμία κατανόησης αναλογιών μεταξύ τους (Mazzocco & Devlin, 2008).

Προβλήματα στην ορθή διαχείριση των κλασμάτων προέκυψαν και από την αδυναμία κατανόησης της έννοιας του κλάσματος. Για την ακρίβεια, οι διαφορετικές ιδιότητες που ισχύουν για τους ακεραίους και τους κλασματικούς αριθμούς έτειναν να μπερδεύουν τους μαθητές που πρώτη φορά έρχονταν σε επαφή τους δεύτερους. Αυτό οδηγεί συχνά σε λάθη αφού τα παιδιά προσπαθούν να εφαρμόσουν τις προυπάρχουσες γνώσεις που έχουν για τους ακεραίους στους κλασματικούς αριθμούς (Fazio & Siegler, 2011). Επίσης, οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν τα κλάσματα ως απλά σύμβολα και αδυνατούν να συλλάβουν τη σχέση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή. Αυτή η λογική μαρτυρά την τάση τους για απλή διαδικαστική εφαρμογή συγκεκριμένων κανόνων χωρίς την ουσιαστική αφομοίωσή τους (Fazio & Siegler, 2011· Vamvakoussi & Vosniadou, 2007· Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Μαθηματικές Δεξιότητες για το Κλάσμα

Η επιτυχία στα κλάσματα είναι δυνατόν να προβλέψει τη μελλοντική επιτυχία του ατόμου στα Μαθηματικά. Για αυτόν τον λόγο η αποτελεσματική διαχείριση κλασμάτων προϋποθέτει κάποιες μαθηματικές δεξιότητες (Mellon, 2012). Σε μία έρευνα με μαθητές 4ης τάξης φάνηκε ότι η ικανότητά τους να τοποθετούν κλάσματα σε σειρά στην 3η τάξη είναι δυνατόν να προβλέψει την επιτυχία τους στα κλάσματα εν γένει (Sellenbarger, 2013).

Επιπλέον, η επίδοση στα Μαθηματικά και η κατανόηση κλασμάτων συσχετίζονται. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα αρίθμησης είναι μια ικανότητα που συσχετίζεται με την επίδοση στα κλάσματα για μαθητές 4ης και 5ης τάξης (Hecht & Vagi, 2010 · Hecht et al., 2003). Επίσης, έχει φανεί ότι οι μαθητές της 6ης και 8ης τάξης πρέπει να γνωρίζουν την ποσότητα που αντιπροσωπεύει ένα κλάσμα, ώστε να

θεωρηθούν ικανοί στη διαχείριση κλασμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατανόηση της ποσότητας ενός κλάσματος απαιτεί αρχικά την ανάπτυξη γνώσης σχετικά με την ποσότητα του αριθμού (Tian & Siegler, 2017 · Siegler et al., 2011).

Ακόμα, διαπιστώθηκε ότι η επαρκής γνώση της διαίρεσης των ακεραίων συσχετίζεται με την επιτυχία στα Μαθηματικά, ακόμα περισσότερο από τη γνώση της εκτέλεσης των άλλων αριθμητικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός) (Siegler et al., 2012) . Γενικά, είναι πιθανό οι μαθητές που έχουν κατανοήσει την έννοια της διαίρεσης να είναι πιο ικανοί να διαχειριστούν τα κλάσματα (Siegler & Pyke, 2013 · Siegler et al., 2012).

Σκοπός και Ερευνητικό Ερώτημα

Η επαρκής γνώση των κλασμάτων έχει φανεί από έρευνες ότι ωφελεί σημαντικά το άτομο σε πολλούς τομείς όπως παρουσιάστηκε και παραπάνω. Ωστόσο, οι προαπαιτούμενες μαθηματικές δεξιότητες που οδηγούν στην αποτελεσματική διαχείρισή τους δεν έχουν αναδειχθεί ερευνητικά. Ο σκοπός λοιπόν της παρούσας έρευνας είναι να αναδείξει τις μαθηματικές δεξιότητες που έχουν ήδη κατακτήσει οι μαθητές Ε΄ και Στ΄ δημοτικού που φοιτούν σε δημοτικά σχολεία του νομού Ευβοίας ώστε να είναι ικανοί να διαχειρίζονται επαρκώς τα κλάσματα. Συνεπώς, η έρευνα επιχειρεί να συσχετίσει τη συνολική, εννοιολογική και διαδικαστική γνώση των μαθητών στα κλάσματα με τέσσερις μαθηματικές δεξιότητες, Επίγνωση Αριθμού, Μνήμη, Συλλογιστική, Οπτικο- χωρική ικανότητα. Οι δεξιότητες αυτές αναπτύχθηκαν στο μοντέλο των Karagiannakis, Baccaglini-Frank και Papadatos (2014). Σύμφωνα με τα παραπάνω το ερευνητικό ερώτημα της εργασίας διατυπώνεται ως εξής «Ποιες μαθηματικές δεξιότητες προβλέπουν τη συνολική, εννοιολογική και διαδικαστική επίδοση των μαθητών στα κλάσματα;».

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 99 μαθητές οι οποίοι φοιτούσαν σε έξι σχολεία Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Γενικής Αγωγής του νομού Ευβοίας κατά το σχολικό έτος 2017- 2018. Αυτοί φοιτούσαν στην Ε΄ και Στ΄ δημοτικού και είχαν χρονολογική ηλικία εύρους 9,91- 13,83 ετών. Από το σύνολο των 99 παιδιών τα 47 ήταν αγόρια και τα 52 κορίτσια. Επίσης, τα 51 φοιτούσαν στην Ε΄ δημοτικού και τα 48 στη Στ΄ δημοτικού. Τα περιγραφικά χαρακτηριστικά των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Όλοι οι συμμετέχοντες στην έρευνα μιλούσαν ελληνικά.

Πίνακας 1

Κατανομή του δείγματος κατά τάξη, φύλο και ηλικία συμμετεχόντων

Τάξη	N ^a	Φύλο (% αγόρια)	ΜΟ Ηλικίας ^b (Εύρος)
Ε΄ δημοτικού	51	45,09	10,52 (9,91 – 11,66)
Στ΄ δημοτικού	48	50	11,69 (10,91 – 13,83)

N ^a = Πλήθος μαθητών

ΜΟ Ηλικίας ^b = Μέσος όρος ηλικίας σε χρόνια

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκαν το Mathematical Profile & Dyscalculia test [MathPro test] (Karagiannakis & Noël, υπό δημοσίευση) και ένα αυτοσχέδιο χειρόγραφο τεστ κλασμάτων για την αξιολόγηση της κλασματικής γνώσης.

Mathematical Profile & Dyscalculia test. Οι μαθηματικές δεξιότητες των παιδιών κατηγοριοποιήθηκαν στις εξής κατηγορίες: Επίγνωση αριθμού, Οπτικο-χωρική ικανότητα, Μνήμη και Συλλογιστική. Από την χορήγηση του συγκεκριμένου εργαλείου προέκυψε το ατομικό προφίλ κάθε μαθητή στα Μαθηματικά, και η αναγνώριση των δυνατών και των αδύναμων σημείων του. Πρόκειται για ένα διαδικτυακό (online) εργαλείο. Περιελάμβανε έξι επίπεδα, καθένα αντίστοιχο με την κάθε τάξη του δημοτικού (Α΄ - Στ΄ δημοτικού) και το κάθε επίπεδο 19 δραστηριότητες. Ο κάθε συμμετέχοντας έκατσε μπροστά από ένα υπολογιστή και απάντησε ατομικά στις δραστηριότητες του τεστ χρησιμοποιώντας μόνο το ποντίκι του υπολογιστή. Ακόμα, φορούσε ακουστικά ώστε να μπορεί να ακούει τις ηχογραφημένες οδηγίες. Ανάλογα με την τάξη στην οποία φοιτούσε (Ε΄ ή Στ΄ δημοτικού) απάντησε και στο αντίστοιχο τεστ. Η κάθε δραστηριότητά του έχει ενταχθεί σε έναν από τους τέσσερις προαναφερθέντες τομείς. Όλες οι δραστηριότητες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2 και ακολουθεί συνοπτική περιγραφή τους.

Πίνακας 2

Υπο- δοκιμές του MathPro test

Επίγνωση Αριθμού	Μνήμη	Συλλογιστική	Οπτικο-χωρική
1. Σύγκριση Κουκίδων	5. Υπαγόρευση Αριθμών	3. Σύγκριση Πολυψήφιων Αριθμών	13. Αριθμογραμμές 0-100
2. Σύγκριση Μονοψήφιων Αριθμών	6. Ο Επόμενος Αριθμός	17. Προβλήματα 18. Αρχές Υπολογισμού	15. Τετράγωνα 16. Κύβοι
8. Αναλαμπή Κουκίδων	7. Ο Προηγούμενος Αριθμός	19. Αριθμητικά Μοτίβα	
	9. Γρήγορη Αρίθμηση Κουκίδων		

10. Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης	12. Νοεροί Υπολογισμοί (4 πράξεις) 14. Αριθμογραμμές 0-1000
11. Ανάκληση Γεγονότων Πολλαπλασιασμού	

4. Πληκτρολόγηση Αριθμών (ελέγχει τον χρόνο αντίδρασης των υποκειμένων)

Σύγκριση Κουκίδων

Η πρώτη δραστηριότητα αφορούσε τη σύγκριση μεγέθους κουκίδων. Στην οθόνη του υπολογιστή φανερώθηκαν ταυτόχρονα δύο ομάδες με κουκίδες για ένα πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. Από τους μαθητές ζητήθηκε να επιλέξουν αυτήν που περιείχε τις περισσότερες κουκίδες και υπολογιζόταν ο μέσος όρος της ακρίβειας των απαντήσεών τους.

Σύγκριση Αριθμών

Η επόμενη δραστηριότητα σχετιζόταν με τη σύγκριση μεγέθους αριθμών. Δύο αριθμοί (ακέρατοι και δεκαδικοί) με αραβικούς χαρακτήρες εμφανίστηκαν στην οθόνη του υπολογιστή ταυτόχρονα. Οι μαθητές έπρεπε να αποφασίσουν όσο το δυνατόν γρηγορότερα τον μεγαλύτερο αριθμό.

Πληκτρολόγηση Αριθμών

Οι μαθητές καλούνταν να πληκτρολογήσουν το ταχύτερο δυνατόν τους μονοψήφιους ή διψήφιους αριθμούς που τους παρουσιάζονταν στην οθόνη με αραβικούς χαρακτήρες.

Υπαγόρευση Αριθμών

Στη δοκιμασία αυτή ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να υποδείξουν όσο πιο γρήγορα μπορούσαν αριθμούς τους οποίους άκουγαν από μία ηχογραφημένη φωνή. Η δοκιμασία αυτή διακοπτόταν μετά από τρεις εσφαλμένες απαντήσεις.

Ο Επόμενος Αριθμός

Οι συμμετέχοντες έπρεπε να υποδείξουν το γρηγορότερο δυνατόν τους ακόλουθους διαδοχικούς αριθμούς από αυτούς που άκουγαν κάθε φορά από μία ηχογραφημένη φωνή. Γινόταν διακοπή της δοκιμασίας μετά από τρία συνεχόμενα λάθη.

Ο Προηγούμενος Αριθμός

Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνταν να υποδείξουν το γρηγορότερο δυνατόν τους προηγούμενους διαδοχικούς αριθμούς από αυτούς που άκουγαν κάθε φορά από μία ηχογραφημένη φωνή. Η δοκιμασία διακοπτόταν μετά από τρία συνεχόμενα λάθη.

Αναλαμπή Κουκίδων

Η δραστηριότητα αυτή περιελάμβανε συστάδες από 1-6 κουκίδες. Αυτές παρουσιάζονταν στην οθόνη για 300 ms και έπειτα ένα πλέγμα τις κάλυπτε. Οι μαθητές έπρεπε να υποδείξουν τον αριθμό του πλήθους των κουκίδων.

Γρήγορη Αρίθμηση Κουκίδων

Στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίστηκαν σειρές από μαύρες κουκίδες. Οι μαθητές υπέδειξαν τον αριθμό που αντιστοιχούσε στο πλήθος τους.

Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης

Η δραστηριότητα αυτή είχε στόχο την ανάκληση αθροισμάτων ίσων ή μικρότερων του 10. Οι προσθετέοι κυμαίνονταν από το 2 έως το 9. Τα παιδιά έπρεπε να πληκτρολογήσουν όσο πιο γρήγορα μπορούσαν το σωστό αποτέλεσμα.

Ανάκληση Γεγονότων Πολλαπλασιασμού

Αντίστοιχη με την προηγούμενη ήταν και η συγκεκριμένη δραστηριότητα η οποία στόχευε στην ανάκληση γινομένων με παράγοντες που κυμαίνονταν από το 2 έως το 9.

Νοεροί Υπολογισμοί

Η δραστηριότητα αυτή αφορούσε τις τέσσερις μαθηματικές πράξεις, πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Τα υποκείμενα υπολόγιζαν με τον νου το αποτέλεσμα. Ο χρόνος που απαιτούνταν για να απαντηθεί η κάθε ερώτηση επίσης χρονομετρούταν εδώ.

Αριθμογραμμές 0-100

Αριθμογραμμές με αρχή το 0 και τέλος το 100 και αριθμοί-στόχοι με αραβικούς χαρακτήρες εμφανίζονταν στην οθόνη. Οι μαθητές έπρεπε να κάνουν κλικ με το ποντίκι στο σημείο της αριθμογραμμής που θεωρούσαν ότι αντιστοιχούσε στον αριθμό-στόχο που τους δινόταν κάθε φορά. Οι αριθμοί-στόχοι κυμαίνονταν από το 0 έως το 100. Ακόμα, εκείνοι είχαν τη δυνατότητα να αλλάξουν τη θέση που επέλεξαν σέρνοντας το σημείο αριστερά ή δεξιά.

Αριθμογραμμές 0-1000

Η δραστηριότητα αυτή ήταν ακριβώς η ίδια με την αμέσως προηγούμενη. Η μόνη διαφορά τους ήταν ότι στη συγκεκριμένη η αριθμογραμμή καθώς και οι αριθμοί-στόχοι κυμαίνονταν από το 0 έως το 1000.

Τετράγωνα

Ένα άσπρο πλέγμα εμφανίστηκε στην οθόνη. Πάνω σε αυτό παρουσιάζονταν γεωμετρικά σχήματα τα οποία αποτελούνταν από τετράγωνα. Τα σχήματα περιλάμβαναν ολόκληρα τετράγωνα, μισά τετράγωνα και τέταρτα τετραγώνων. Τα παιδιά κλήθηκαν να πληκτρολογήσουν τον συνολικό αριθμό όλων των τετραγώνων από τα οποία αποτελούνταν το κάθε γεωμετρικό σχήμα.

Κύβοι

Στην οθόνη παρουσιάστηκαν 3D κατασκευές οι οποίες ήταν φτιαγμένες από 6 έως 13 κύβους. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να βρουν πόσοι κύβοι περιέχονταν στην κάθε

κατασκευή. Στον υπολογισμό τους έπρεπε να συμπεριλάβουν τόσο τους ορατούς όσο και τους κρυμμένους κύβους.

Προβλήματα

Η δοκιμασία αυτή περιελάμβανε μαθηματικά προβλήματα και ζητούσε από τα παιδιά να υποδείξουν τον τρόπο επίλυσής τους χωρίς να δίνουν τελική απάντηση. Το καθένα από αυτά λυνόταν με μόνο μία από τις τέσσερις πράξεις. Επιπλέον, αυτά περιείχαν το μέγιστο τρεις προτάσεις. Το κάθε πρόβλημα διαβαζόταν φωναχτά από μία ηχογραφημένη φωνή του υπολογιστή καθώς οι μαθητές μπορούσαν να ακολουθούν τη σειρά της γραμμής με τη βοήθεια ενός βέλους το οποίο κινούνταν κατά μήκος της οθόνης του υπολογιστή. Στο τέλος, το κάθε πρόβλημα μπορούσε να αναπαραχθεί προφορικά ξανά πατώντας το πλήκτρο «ΔΙΑΒΑΣΕ». Όλα τα προβλήματα ήταν διατεταγμένα με αύξουσα δυσκολία και η δοκιμασία διακοπτόταν μετά από τρία διαδοχικά λάθη.

Αρχές Υπολογισμού

Στη δραστηριότητα αυτή υπήρχαν ζευγάρια πράξεων οι οποίες είχαν κάποια σύνδεση μεταξύ τους. Στη μία εκ των δύο δινόταν το αποτέλεσμα ενώ στην άλλη έλειπε. Τα υποκείμενα έπρεπε να βρουν τη λύση στην πράξη χωρίς να την υπολογίσουν αλλά βασιζόμενα στην άλλη πράξη. Οι πράξεις ήταν και εδώ διατεταγμένες με αύξουσα δυσκολία και η δοκιμασία διακοπτόταν έπειτα από τρία συνεχόμενα σφάλματα.

Αριθμητικά Μοτίβα

Στο κέντρο της οθόνης του υπολογιστή παρουσιάστηκε ένα αριθμητικό μοτίβο. Τα παιδιά προσπαθούσαν να βρουν τον αριθμό που έλειπε από το μοτίβο. Τα μοτίβα είχαν αύξουσα δυσκολία και μετά από τρεις συνεχόμενες λανθασμένες προσπάθειες η δραστηριότητα σταματούσε.

Τα αποτελέσματα από το τεστ συγκεντρώνονταν σε ένα φύλλο excel. Οι σωστές απαντήσεις είχαν τον βαθμό 1 και οι λανθασμένες το 0. Στις δραστηριότητες που υπήρχε χρονομέτρηση δινόταν και χρόνος απόκρισης των μαθητών σε κάθε ερώτημα.

Χειρόγραφο τεστ κλασμάτων. Το χειρόγραφο τεστ ήταν χωρισμένο σε δύο ενότητες, η κάθε μία από τις οποίες αφορούσε την εννοιολογική ή τη διαδικαστική κατανόηση των κλασμάτων. Συγκεκριμένα, περιελάμβανε επτά ασκήσεις, οι τρεις εκ των οποίων αξιολογούσαν το επίπεδο εννοιολογικής γνώσης και οι άλλες τέσσερις το επίπεδο διαδικαστικής. Αυτό δημιουργήθηκε κατά αναλογία με το ερευνητικό εργαλείο του Khashan (2014) ο οποίος αξιολόγησε το ποσοστό εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης σε 57 εκπαιδευτικούς μαθηματικούς. Επειδή όμως η ερευνά του απευθύνθηκε σε ενήλικες έγινε προσαρμογή των ασκήσεων του τεστ σύμφωνα με το ελληνικό Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των τάξεων της Ε' και Στ' δημοτικού (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης, & Χρονοπούλου, χ.χ.· Κασσώτη, Κλιάπης, & Οικονόμου, χ.χ.). Ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση των ασκήσεων του τεστ και γίνεται αναφορά στο είδος της κλασματικής γνώσης που μελετούν κάθε φορά.

Αντίληψη του μέρους από ένα σύνολο

Η άσκηση αυτή εξέταζε την εννοιολογική κατανόηση. Στο πρώτο υπο-ερώτημα ζητήθηκε από τους μαθητές να καταγράψουν το κλάσμα που αντιστοιχούσε στο μέρος του σχήματος από την εικόνα που τους δινόταν κάθε φορά. Συνολικά τα παιδιά

είχαν να επεξεργαστούν τρία σχήματα ισομερή χωρισμένα (τρίγωνο, εξάγωνο, αστέρι). Το δεύτερο υπο-ερώτημα της άσκησης αφορούσε την αντίστροφη διαδικασία δηλαδή δινόταν το κλάσμα και τα παιδιά καλούνταν να σκιαγραφήσουν με το μολύβι τους το μέρος που αντιστοιχούσε στο κλάσμα ($6/14$, $3/4$, $4/5$).

Διάταξη κλασμάτων

Αυτή αξιολογούσε τη διαδικαστική γνώση και ζητούσε από τα υποκείμενα να τοποθετήσουν τα σύμβολα της ανισότητας ανάμεσα σε δύο κλάσματα ενός ζεύγους. Η άσκηση περιελάμβανε συνολικά τέσσερα ζεύγη.

Ισοδυναμία κλασμάτων

Η τρίτη άσκηση αξιολογούσε τη διαδικαστική κατανόηση των κλασμάτων. Στα παιδιά δίνονταν πέντε ζεύγη κλασμάτων. Στο ένα κλάσμα κάθε ζεύγους έλειπε είτε ο αριθμητής είτε ο παρονομαστής. Εκείνα καλούνταν να συμπληρώσουν τον κατάλληλο αριθμό στο κλάσμα ώστε να τηρούταν η ισοδυναμία.

Αντίληψη του συνόλου

Η επόμενη άσκηση αφορούσε τη διαδικαστική γνώση και περιείχε δύο σύντομα προβλήματα. Και στα δύο είχε δοθεί στους μαθητές το μέρος και ζητούνταν το όλο. Στο πρώτο πρόβλημα οι μαθητές καλούνταν να βρουν πολλαπλάσιο του όλου ενώ στο δεύτερο τη μονάδα.

Εκτέλεση πράξεων

Αυτή εξέταζε τη διαδικαστική κατανόηση και περιελάμβανε τις τέσσερις πράξεις μεταξύ κλασμάτων. Σε μερικές πράξεις δίνονταν ομώνυμα κλάσματα και σε άλλες ετερόνυμα.

Εφαρμογή κλασμάτων στην καθημερινή ζωή

Η έκτη άσκηση εξέταζε την εννοιολογική γνώση και επέτρεπε στους μαθητές να σκεφτούν ευέλικτα προκειμένου να δώσουν τη σωστή απάντηση. Ωστόσο, απαραίτητο ήταν τόσο η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος όσο και η κατανόηση της διατύπωσης του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη την εμπειρία τους από την πραγματική ζωή.

Ειδικά προβλήματα

Αυτή αφορούσε την εννοιολογική κατανόηση και εξετάζονταν ειδικές περιπτώσεις διαχείρισης κλασματικών αριθμών. Αυτές βέβαια ήταν ανάλογες του αναπτυξιακού και γνωστικού επιπέδου των συμμετεχόντων. Έτσι, παρουσιάζονταν δύο ερωτήματα με επιμέρους υπο-ερωτήματα.

Η βαθμολόγηση του τεστ έγινε κατά πρότυπο του εργαλείου του Khashan (2014). Έτσι, η κάθε απάντηση του μαθητή βαθμολογούνταν με άριστα τα 4 μόρια. Συνολικά το τεστ είχε μέγιστο βαθμό τα 120 μόρια, εκ των οποίων τα 60 μόρια αντιστοιχούσαν στην εννοιολογική και τα άλλα 60 μόρια στη διαδικαστική γνώση. Πιο αναλυτικά, οι ιδανικές απαντήσεις, όταν δηλαδή ο μαθητής έδινε μια σωστή και ξεκάθαρη απάντηση, έπαιρναν 4 μόρια. Οι απαντήσεις που είχαν μικρά λάθη αλλά χαρακτηρίζονταν ως ικανοποιητικές βαθμολογούνταν με 3 ή 2 μόρια. Στην πρώτη περίπτωση ανήκαν εκείνες που φαινόταν ότι το παιδί έχει αντιληφθεί τις μαθηματικές ιδέες ενώ στη δεύτερη οι απαντήσεις που ο μαθητής αδυνατούσε να διαχειριστεί κάποιες πλευρές του προβλήματος επαρκώς. Όταν το υποκείμενο ξεκινούσε τη λύση

αλλά σταματούσε πριν την ολοκληρώσει χρεωνόταν με 1 μόριο ενώ 0 μόρια έπαιρναν οι μαθητές που είχαν ξεκινήσει την επίλυση λανθασμένα.

Διαδικασία

Αρχικά η έρευνα εγκρίθηκε από το Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων και το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και στη συνέχεια ενημερώθηκαν οι διευθυντές και οι εκπαιδευτικοί κάθε σχολικής μονάδας που έλαβε μέρος στην έρευνα. Έπειτα, λήφθηκε ενυπόγραφη συγκατάθεση του γονέα ή του κηδεμόνα κάθε παιδιού που συμμετείχε στην έρευνα.

Κατά τη χορήγηση των εργαλείων χρησιμοποιήθηκαν ειδικοί κωδικοί για κάθε παιδί. Μέσω αυτών των κωδικών έγινε η αντιστοίχιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο τεστ. Κατά αυτόν τον τρόπο διασφαλίστηκε η προστασία των προσωπικών δεδομένων των συμμετεχόντων στην έρευνα και τηρήθηκε το προσωπικό απόρρητο. Ακόμα, η συμμετοχή των παιδιών ήταν εθελοντική και επιτρεπόταν να διακοπεί σε οποιοδήποτε σημείο το επιθυμούσαν οι ίδιοι.

Η διαδικασία ήταν η ίδια για όλους τους συμμετέχοντες και τα δύο εργαλεία χορηγήθηκαν ομαδικά. Το πρώτο δίωρο του σχολικού προγράμματος χορηγούταν το MathPro test στην αίθουσα Πληροφορικής του σχολείου. Η εξέταση στο τεστ αυτό διήρκεσε το μέγιστο δύο διδακτικές ώρες. Κατόπιν, το δεύτερο διδακτικό δίωρο οι μαθητές απασχολούταν στην τάξη τους συμπληρώνοντας το Χειρόγραφο τεστ κλασμάτων. Η εξέταση του διήρκεσε το μέγιστο μία διδακτική ώρα.

Στατιστική Ανάλυση

Χρησιμοποιήθηκε το Πακέτο Στατιστικής Ανάλυσης SPSS v.20 (Statistical Package for the Social Sciences) και η ανάλυση έγινε με παραμετρικά κριτήρια. Αρχικά διηξήχθη η ανάλυση αξιοπιστίας Cronbach για Χειρόγραφο τεστ κλασμάτων ώστε να διαπιστωθεί ο βαθμός αξιοπιστίας του και στη συνέχεια η Πολλαπλή Γραμμική Ανάλυση Παλινδρόμησης (Multiple Linear Regression Analysis) για να εξεταστεί αν υπάρχει σχέση συνάφειας μεταξύ των δραστηριοτήτων του MathPro test και της επίδοσης στα κλάσματα (ολικά, εννοιολογικά και διαδικαστικά). Ακόμα, εξετάστηκε το είδος των δραστηριοτήτων που είναι δυνατόν να προβλέψουν την επίδοση στα τρία είδη κλασματικής γνώσης. Το επίπεδο σημαντικότητας ορίστηκε στο $\alpha=0.05$ για όλες τις στατιστικές αναλύσεις.

Αποτελέσματα

Έλεγχος Εσωτερικής Συνοχής του Χειρόγραφου Τεστ Κλασμάτων

Για το Χειρόγραφο τεστ κλασμάτων από τη στατιστική ανάλυση προέκυψε ότι ο δείκτης α Cronbach είχε τιμή $0,879 > 0,80$. Συνεπώς, η εσωτερική συνοχή του εργαλείου κρίθηκε ως αρκετά ικανοποιητική και το ίδιο το τεστ ως αξιόπιστο εργαλείο για τη μέτρηση της διαδικαστικής και κλασματικής γνώσης των μαθητών της έρευνας.

Έλεγχος Ερευνητικού Ερωτήματος

Το ερευνητικό ερώτημα της παρούσας έρευνας επιχείρησε να προσδιορίσει τις μαθηματικές δεξιότητες που προβλέπουν την επίδοση στην κλασματική γνώση (ολική, εννοιολογική και διαδικαστική). Για τον προσδιορισμό της μαθηματικής επίδοσης χρησιμοποιήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στις 17 δραστηριότητες του MathPro test και συγκεκριμένα οι μέσοι όροι της ακρίβειας των απαντήσεών τους (βλ. Πίνακα 3). Δύο από τις δραστηριότητες της συγκεκριμένης δοκιμασίας

αφαιρέθηκαν από τις στατιστικές αναλύσεις. Αυτές ήταν «Βρες τη γάτα» και «Πληκτρολόγηση αριθμών».

Πίνακας 3

Μέσος όρος και Τυπική απόκλιση ακρίβειας των σωστών απαντήσεων των μαθητών στις δραστηριότητες του MathPro test (N=99)

Δραστηριότητες MathPro test	ΜΟ ^a	ΤΑ ^b
Σύγκριση Κουκίδων	66,90	15,50
Σύγκριση Αριθμών	91,02	17,28
Υπαγόρευση Αριθμών	85,99	24,04
Ο Επόμενος Αριθμός	87,54	21,60
Ο Προηγούμενος Αριθμός	88,94	22,39
Αναλαμπή Κουκίδων	83,68	20,03
Γρήγορη Αρίθμηση Κουκίδων	83,26	26,25
Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης	93,60	17,85
Ανάκληση Γεγονότων Πολλαπλασιασμού	81,16	25,92
Αριθμογραμμές 0-100*	6,51	4,59
Αριθμογραμμές 0-1000*	98,61	79,00
Τετράγωνα	54,04	22,67
Κύβοι	64,52	29,59
Προβλήματα	56,34	34,56
Αρχές Υπολογισμού	47,54	32,52
Αριθμητικά Μοτίβα	44,66	23,71
Νοεροί Υπολογισμοί (προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις)	65,19	28,78

ΜΟ^a = Μέσος όρος των μέσων όρων επί τις εκατό βαθμολογίας μαθητών στις δραστηριότητες MathPro test

ΤΑ^b = Τυπική απόκλιση

* Στις δραστηριότητες αυτές οι μέσοι όροι των βαθμολογιών δεν είναι υπολογισμένοι επί τις εκατό

Σε ορισμένες δραστηριότητες του MathPro test οι μαθητές σημείωσαν πλειονηφικά πολύ υψηλά σκορ (ceiling effect), μεγαλύτερα του 85^{ου} εκατοστημορίου. Οι δοκιμασίες αυτές ήταν οι: Σύγκριση Αριθμών , Υπαγόρευση Αριθμών, Ο Επόμενος και Ο Προηγούμενος Αριθμός και Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης. Έτσι, ως μέτρο για αυτές επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η μέση τιμή του χρόνου αντίδρασης. Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται οι συγκεκριμένες δραστηριότητες και οι μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις του χρόνου αντίδρασης.

Πίνακας 4

Μέση τιμή και Τυπική απόκλιση του χρόνου απόκρισής τους σε αυτές στις δραστηριότητες του MathPro test για τις οποίες παρατηρήθηκε ceiling effect (N=99)

Δραστηριότητες MathPro test	ΜΟ ^a	ΤΑ ^b
Σύγκριση Αριθμών	2270,805	727,361
Υπαγόρευση Αριθμών	3706,019	1646,106
Ο Επόμενος Αριθμός	3491,926	1411,285
Ο Προηγούμενος Αριθμός	3569,044	1410,592
Ανάκληση Γεγονότων	3550,628	1677,695
Πρόσθεσης		

ΜΟ^a = Μέση τιμή του χρόνου απόκρισης των σωστών απαντήσεων των μαθητών

ΤΑ^b = Τυπική απόκλιση

Πριν γίνει η Ανάλυση Παλινδρόμησης για τις δραστηριότητες του MathPro test που είναι δυνατό να προβλέψουν στατιστικώς σημαντικά την κλασματική γνώση, ήταν απαραίτητο να εξεταστεί η κανονικότητα της κατανομής των μετρήσεων του δείγματος ως προς τη συνολική τους επίδοση στο Τεστ κλασμάτων. Ο έλεγχος αυτός έγινε με το κριτήριο Kolmogorov- Smirnov (βλ. Πίνακα 5).

Πίνακας 5

Έλεγχος κατανομής μαθητών στο Τεστ κλασμάτων με το κριτήριο Kolmogorov-Smirnov Test

Επίδοση στα κλάσματα	
N ^a	99
ΜΟ ^b	78,65

TA ^c	27,863
KOLMOGOROV-SMIRNOV Z	0,909
Sig (2-tailed)	0,381
Κύρτωση	-1,879
Λοξότητα	-1,637

N ^a = Πλήθος μαθητών

MO ^b = Μέσος όρος επίδοσης στα κλάσματα

TA ^c = Τυπική απόκλιση

Για το τεστ Kolmogorov- Smirnov διατυπώθηκαν οι παρακάτω υποθέσεις:

Y₀: Η κατανομή δεν είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την κανονική.

Y₁: Η κατανομή είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την κανονική (Εμβαλωτής, Κατσης, & Σιδερίδης, 2017) .

Παρατηρώντας στον Πίνακα 5 την τιμή της πιθανότητας η οποία ήταν $p > 0,05$ έγινε δεκτή η Y₀. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή των παιδιών με μεταβλητή την επίδοση στα κλάσματα θεωρήθηκε κανονική. Εξετάζοντας την κανονικότητα της κατανομής και με το τεστ Kolmogorov- Smirnov διαπιστώθηκε ότι οι τιμές της κύρτωσης και της λοξότητας ήταν εντός των φυσιολογικών τιμών ($-2 < -1,879 < 2$ και $-2 < -1,637 < 2$ αντίστοιχα). Συμπερασματικά, η συγκεκριμένη κατανομή συνέπεσε με την κανονική.

Στη συνέχεια έγινε Ανάλυση Παλινδρόμησης ώστε να εξεταστεί η εξής πρόβλεψη: είναι δυνατόν η επίδοση στις δραστηριότητες του MathPro test να προβλέψει στατιστικά σημαντικά την επίδοσή των μαθητών στα κλάσματα συνολικά; Αν ναι, ποιες δραστηριότητες του τεστ αυτού προβλέπουν τη συνολική κλασματική γνώση των παιδιών;

Πίνακας 6

Περίληψη της Ανάλυσης Παλινδρόμησης για τις δραστηριότητες του MathPro test που προβλέπουν την επίδοση των συμμετεχόντων στην κλασματική γνώση

Προβλεπτικός παράγοντας	B	SE B	β	T	Sig.
Σύγκριση Κουκίδων	0,089	0,144	0,050	0,621	0,536
Σύγκριση Αριθμών*	-0,001	0,003	-0,017	-0,204	0,839
Υπαγόρευση Αριθμών*	0,000	0,002	0,028	0,216	0,829
Ο Επόμενος Αριθμός*	0,001	0,002	0,073	0,593	0,555

Ο Προηγούμενος Αριθμός*	-0,001	0,003	-0,070	-0,508	0,613
Αναλαμπή Κουκίδων	-0,101	0,161	-0,073	-0,625	0,534
Γρήγορη Αρίθμηση Κουκίδων	0,015	0,113	0,014	0,131	0,896
Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης*	-0,001	0,001	-0,067	-0,776	0,440
Ανάκληση Γεγονότων Πολλαπλασιασμού	0,060	0,140	0,056	0,433	0,666
Αριθμογραμμές 0-100	0,197	0,715	0,032	0,275	0,784
Αριθμογραμμές 0-1000	-0,043	0,050	-0,123	-0,872	0,386
Τετράγωνα	-0,196	0,133	-0,160	-1,477	0,143
Κύβοι	0,180	0,095	0,191	1,898	0,061
Προβλήματα	0,211	0,091	0,262	2,311	0,023*
Αρχές Υπολογισμού	-0,097	0,108	-0,113	-0,894	0,374
Αριθμητικά Μοτίβα	0,139	0,157	0,118	0,885	0,379
Νοεροί Υπολογισμοί	0,429	0,123	0,443	3,479	0,001*

*Στις δραστηριότητες αυτές χρησιμοποιήθηκαν οι μέσοι όροι του χρόνου αντίδρασης των μαθητών

Διεξάγοντας την Πολλαπλή Γραμμική Ανάλυση Παλινδρόμησης προέκυψε ότι οι δραστηριότητες του MathPro test είναι δυνατόν να προβλέψουν τη συνολική επίδοση στο Τεστ κλασμάτων αφού ο δείκτης συνάφειας Pearson R είχε τιμή 0,771. Ο συντελεστής προσδιορισμού ήταν 0,595, γεγονός που σημαίνει ότι γνωρίζοντας την επίδοση κάποιου παιδιού στο MathPro test είναι δυνατόν να προβλεφθεί κατά 59,5% η συνολική κλασματική του επίδοση, σε ποσοστό δηλαδή αρκετά σημαντικό.

Ακόμα, από τα αποτελέσματα της ίδιας ανάλυσης σε πολυμεταβλητό επίπεδο προέκυψε ότι $F(17,81)=6,991$ και $p<0,001$. Επομένως, υπάρχει στατιστικά σημαντική πρόβλεψη της συνολικής επίδοσης στα κλάσματα από την επίδοση στις δραστηριότητες του MathPro test. Οι δραστηριότητες οι οποίες προβλέπουν τη συνολική επίδοση ενός μαθητή στα κλάσματα είναι τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί αφού και για τις δύο ίσχυσε $p<0,05$.

Η ίδια μεθοδολογία ακολουθήθηκε ώστε να απαντηθεί το ανάλογο ερώτημα για την εννοιολογική γνώση των κλασμάτων. Σχετικά με αυτό στην αρχή έγινε έλεγχος της κανονικότητας της κατανομής των μετρήσεων του δείγματος με το Kolmogorov- Smirnov τεστ (βλ. Πίνακα 7).

Πίνακας 7

Έλεγχος κατανομής των επιδόσεων μαθητών στην εννοιολογική κλασματική γνώση με το κριτήριο Kolmogorov- Smirnov Test

Επίδοση στα κλάσματα	
N ^a	99
MO ^b	42,32
TA ^c	14,321
KOLMOGOROV-SMIRNOV Z	1,382
Sig (2-tailed)	0,044
Κύρτωση	-0,667
Λοξότητα	-3,139

N^a = Πλήθος μαθητών

MO^b = Μέσος όρος εννοιολογικής επίδοσης στα κλάσματα

TA^c = Τυπική απόκλιση

Από το τεστ Kolmogorov- Smirnov προέκυψαν οι παρακάτω υποθέσεις:

Y₀: Η κατανομή δεν είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την κανονική.

Y₁: Η κατανομή είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την κανονική (Εμβαλωτής και συν., 2017).

Από τον Πίνακα 7 διαπιστώθηκε ότι $p < 0,05$ άρα υιοθετήθηκε η Y₁. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή των παιδιών με μεταβλητή την εννοιολογική επίδοση στα κλάσματα δε συνέπιπτε απόλυτα με την κανονική, γεγονός που επιβεβαιώθηκε υπολογίζοντας τις τιμές της κύρτωσης και της λοξότητας. Η τιμή της κύρτωσης ήταν εντός των φυσιολογικών τιμών ($-2 < -0,667 < 2$) αλλά η τιμή της λοξότητας ξέφευγε από αυτές ($-3,139 < -2$). Επομένως, η συγκεκριμένη μπορούσε να θεωρηθεί ότι απέκλινε μεν αλλά όχι σημαντικά από την κανονική.

Έπειτα, εξετάστηκε το παρακάτω ερώτημα: ποιες δραστηριότητες του MathPro test μπορούν να προβλέψουν την εννοιολογική επίδοση των μαθητών στο Τεστ κλασμάτων; Για τον έλεγχο αυτού έγινε Ανάλυση Παλινδρόμησης της οποίας τα σημαντικότερα ευρήματα παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 8.

Πίνακας 8

Περίληψη της Ανάλυσης Παλινδρόμησης για τις δραστηριότητες του MathPro test που προβλέπουν την επίδοση των συμμετεχόντων στη εννοιολογική γνώση των κλασμάτων

Προβλεπτικός παράγοντας	B	SE B	B	t	Sig.
Σύγκριση Κουκίδων	0,040	0,074	0,043	0,534	0,595
Σύγκριση Αριθμών*	0,000	0,002	0,012	0,147	0,884
Υπαγόρευση Αριθμών*	0,000	0,001	0,044	0,345	0,731
Ο Επόμενος Αριθμός*	0,000	0,001	0,028	0,222	0,825
Ο Προηγούμενος Αριθμός*	0,000	0,001	-0,031	-0,227	0,821
Αναλαμπή Κουκίδων	-0,016	0,083	-0,023	-0,198	0,843
Γρήγορη Αρίθμηση Κουκίδων	0,054	0,058	0,099	0,923	0,359
Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης*	0,000	0,001	-0,037	-0,420	0,676
Ανάκληση Γεγονότων Πολλαπλασιασμού	-0,017	0,072	-0,030	-0,232	0,817
Αριθμογραμμές 0-100	0,284	0,369	0,091	0,771	0,443
Αριθμογραμμές 0-1000	-0,050	0,026	-0,276	-1,952	0,054
Τετράγωνα	-0,065	0,068	-0,103	-0,949	0,345
Κύβοι	0,067	0,049	0,138	1,372	0,174
Προβλήματα	0,096	0,047	0,231	2,034	0,045*
Αρχές Υπολογισμού	0,021	0,056	0,049	0,385	0,701
Αριθμητικά Μοτίβα	0,017	0,081	0,028	0,209	0,835
Νοεροί Υπολογισμοί	0,168	0,064	0,338	2,647	0,010*

*Στις δραστηριότητες αυτές χρησιμοποιήθηκαν οι μέσοι όροι του χρόνου αντίδρασης των μαθητών

Από τα αποτελέσματα της παραπάνω στατιστικής ανάλυσης προέκυψε ότι είναι δυνατόν να γίνει πρόβλεψη της εννοιολογικής κλασματικής γνώσης στο χειρόγραφο τεστ από τις δραστηριότητες του MathPro test. Ο δείκτης συνάφειας Pearson R είχε τιμή 0,769 και ο συντελεστής προσδιορισμού 0,592. Πιο συγκεκριμένα, αν κάποιος γνωρίζει την επίδοση ενός μαθητή στο MathPro test μπορεί να προβλέψει κατά 59,2% την εννοιολογική επίδοσή του στο Τεστ κλασμάτων.

Επίσης, εξετάζοντας τις τιμές $F(17,81)=6,908$ και $p<0,001$ συνάχθηκε το συμπέρασμα ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική πρόβλεψη της εννοιολογικής γνώσης στα κλάσματα από την επίδοση στις δραστηριότητες του MathPro test. Δύο δραστηριότητες του MathPro test μπορούν να προβλέψουν την εννοιολογική γνώση των μαθητών στο Τεστ κλασμάτων. Αυτές ήταν τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί για τις οποίες ίσχυσε $p<0,05$.

Ομοίως για τη διαδικαστική κλασματική γνώση αρχικά, εξετάστηκε η κανονικότητα της κατανομής των μετρήσεων του δείγματος στο Τεστ κλασμάτων με το Kolmogorov-Smirnov test (βλ. Πίνακα 9).

Πίνακας 9

Έλεγχος κατανομής των επιδόσεων μαθητών στη διαδικαστική κλασματική γνώση με το κριτήριο Kolmogorov-Smirnov Test

Επίδοση στα κλάσματα	
N ^a	99
MO ^b	36,32
TA ^c	15,173
KOLMOGOROV-SMIRNOV Z	0,741
Sig (2-tailed)	0,642
Κύρτωση	-2,051
Λοξότητα	-0,654

N^a = Πλήθος μαθητών

MO^b = Μέσος όρος διαδικαστικής επίδοσης στα κλάσματα

TA^c = Τυπική απόκλιση

Οι υποθέσεις για το τεστ Kolmogorov-Smirnov ορίστηκαν ως εξής:

Y₀: Η κατανομή δεν είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την κανονική.

Y₁: Η κατανομή είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την κανονική (Εμβλωτής και συν., 2017).

Στην περίπτωση αυτή (βλ. Πίνακα 9) προέκυψε $p>0,05$ άρα επιβεβαιώθηκε η Y₀. Με άλλα λόγια, η κατανομή των υποκειμένων με μεταβλητή τη διαδικαστική επίδοση στα κλάσματα ήταν κανονική. Το ίδιο συμπέρασμα συνάχθηκε και από τον υπολογισμό των τιμών της κύρτωσης η οποία απέκλινε ελάχιστα από τις αποδεκτές

τιμές $(-2,051 < -2)$ και της λοξότητας η οποία βρισκόταν εντός των ίδιων ορίων $(-2 < -0,654 < 2)$. Συνεπώς, η κατανομή αυτή μπορούσε να θεωρηθεί κανονική.

Στη συνέχεια έγινε Ανάλυση Παλινδρόμησης ώστε να εξεταστεί η εξής πρόβλεψη: οι δραστηριότητες του MathPro test είναι δυνατόν να προβλέψουν την διαδικαστική επίδοση των μαθητών στο Τεστ κλασμάτων;

Πίνακας 10

Περίληψη της Ανάλυσης Παλινδρόμησης για τις δραστηριότητες του MathPro test που προβλέπουν την επίδοση των συμμετεχόντων στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων

Προβλεπτικός παράγοντας	B	SE B	B	T	Sig.
Σύγκριση Κουκίδων	0,050	0,085	0,051	0,584	0,561
Σύγκριση Αριθμών*	-0,001	0,002	-0,043	-0,473	0,637
Υπαγόρευση Αριθμών*	0,0000 8234	0,001	0,009	0,065	0,949
Ο Επόμενος Αριθμός*	0,001	0,001	0,109	0,809	0,421
Ο Προηγούμενος Αριθμός*	-0,001	0,002	-0,098	-0,660	0,511
Αναλαμπή Κουκίδων	-0,084	0,095	-0,111	-0,884	0,379
Γρήγορη Αρίθμηση Κουκίδων	-0,039	0,067	-0,067	-0,583	0,562
Ανάκληση Γεγονότων Πρόσθεσης*	-0,001	0,001	-0,089	-0,947	0,347
Ανάκληση Γεγονότων Πολλαπλασιασμού	0,077	0,083	0,132	0,934	0,353
Αριθμογραμμές 0-100	-0,088	0,423	-0,027	-0,207	0,836
Αριθμογραμμές 0-1000	0,007	0,029	0,035	0,228	0,820
Τετράγωνα	-0,131	0,078	-0,196	-1,670	0,099
Κύβοι	0,113	0,056	0,220	2,013	0,047*

Προβλήματα	0,115	0,054	0,263	2,134	0,036*
Αρχές Υπολογισμού	-0,118	0,064	-0,254	-1,848	0,068
Αριθμητικά Μοτίβα	0,122	0,093	0,191	1,314	0,193
Νοεροί Υπολογισμοί	0,261	0,073	0,494	3,574	0,001*

*Στις δραστηριότητες αυτές χρησιμοποιήθηκαν οι μέσοι όροι του χρόνου αντίδρασης των μαθητών

Τα αποτελέσματα της Πολλαπλής Γραμμικής Ανάλυσης Παλινδρόμησης έδειξαν τη δυνατότητα πρόβλεψης της διαδικαστικής κλασματικής επίδοσης στο Τεστ κλασμάτων από τις δραστηριότητες του MathPro test. Και αυτό γιατί ο δείκτης συνάφειας Pearson R ήταν 0,722. Ο αντίστοιχος συντελεστής προσδιορισμού ήταν 0,522 δηλαδή η επίδοση ενός μαθητή στο MathPro test είναι δυνατόν να προβλέψει κατά 52,2% τη διαδικαστική επίδοσή του στο Τεστ κλασμάτων.

Επίσης, για την ίδια ανάλυση προέκυψαν τιμές $F(17,81) = 5,203$ και $p < 0,001$. Συνεπώς, η επίδοση στις δραστηριότητες του MathPro test προβλέπουν στατιστικώς σημαντικά τη διαδικαστική κλασματική γνώση. Οι δραστηριότητες του MathPro test οι οποίες προβλέπουν την διαδικαστική επίδοση των συμμετεχόντων στο χειρόγραφο τεστ ήταν οι Κύβοι, τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί αφού και στις τρεις αυτές περιπτώσεις ίσχυσε $p < 0,05$.

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα και από τις τρεις Πολλαπλές Γραμμικές Αναλύσεις Παλινδρόμησης φάνηκε ότι τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί είναι δυνατόν να προβλέψουν τη συνολική επίδοση στο Τεστ κλασμάτων. Οι ίδιες δραστηριότητες προβλέπουν ακόμη και την εννοιολογική και τη διαδικαστική κατανόηση στο ίδιο τεστ. Συνεπώς, αυτές οι δύο δραστηριότητες μπορούν να θεωρηθούν ως οι πιο ισχυροί προβλεπτικοί παράγοντες για την κλασματική γνώση των μαθητών.

Συζήτηση

Συγκεντρωτικά, τα αποτελέσματα της Πολλαπλής Γραμμικής Ανάλυσης Παλινδρόμησης που έγινε με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στα κλάσματα, συνολικά και εννοιολογικά έδειξαν ότι οι δραστηριότητες του MathPro test που είναι δυνατόν να προβλέψουν την επίδοση στο Τεστ κλασμάτων είναι τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί. Ακόμα, θέτοντας ως εξαρτημένη μεταβλητή τη διαδικαστική κατανόηση στα κλάσματα η αντίστοιχη στατιστική ανάλυση ανέδειξε ότι αυτή είναι δυνατόν να προβλεφθεί από τρεις δραστηριότητες του MathPro test, τους Κύβους, τα Προβλήματα και τους Νοερούς Υπολογισμούς.

Σχετικά με τη δραστηριότητα των Νοερών Υπολογισμών τα ευρήματα αυτής της έρευνας επιβεβαιώνονται και από ευρήματα άλλων ερευνών. Αναλυτικότερα, η δοκιμασία αυτή αφορά την αναγνώριση αραβικών ψηφίων και συμβόλων και την εκτέλεση υπολογισμών με τον νου και για τις τέσσερις πράξεις (Karagiannakis et al., 2014). Από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος προέκυψε ότι για την αποτελεσματικότερη διαχείριση των κλασμάτων κρίνεται απαραίτητη η επαρκής γνώση της διαίρεσης των ακεραίων επειδή συμβάλλει στην καλύτερη εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων και τη χρήση κατάλληλων στρατηγικών κατά τη διαχείρισή τους. Έτσι, η ικανότητα μαθητών να εκτελούν σωστά τη διαίρεση

θεωρείται απαραίτητη ώστε να διαχειρίζονται αποτελεσματικά τους κλασματικούς αριθμούς (Siegler & Pyke, 2013· Siegler et al., 2012).

Επιπλέον, δύο φαίνεται να είναι οι κοινές δραστηριότητες του MathPro test οι οποίες λειτουργούν ως οι ισχυρότεροι παράγοντες πρόβλεψης ενός υποκειμένου 5^{ης} και 6^{ης} δημοτικού και στα τρία είδη κλασματικής γνώσης, τα Προβλήματα και οι Νοεροί Υπολογισμοί. Η διαπίστωση αυτή προτείνει τον συνδυασμό εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης όσον αφορά τη διδασκαλία των κλασμάτων αφού και για τα δύο είδη γνώσης αναδείχθηκαν κοινές δραστηριότητες από το MathPro test. Με άλλα λόγια, τα δύο είδη κλασματικής γνώσης (εννοιολογική και διαδικαστική) είναι στενά συνδεδεμένα όπως προκύπτει και από προηγούμενες έρευνες (Rittle- Johnson & Schneider, 2014· Siegler et al., 2011· Hecht & Vagi, 2010).

Ακόμα, από η βιβλιογραφική ανασκόπηση άλλων ερευνών προέκυψε ότι η κατανόηση της ποσότητας του αριθμού αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο για την καλύτερη επίδοση των μαθητών όσον αφορά ασκήσεις και προβλήματα με κλάσματα. Ωστόσο το εύρημα αυτό δεν αναδείχθηκε από την παρούσα έρευνα. Για την ακρίβεια, παλαιότερες έρευνες έδειξαν ότι η επιτυχία στα κλάσματα συσχετιζόταν με τη δεξιότητα απλής αρίθμησης για μαθητές 4^{ης} και 5^{ης} τάξης (Hecht & Vagi, 2010· Hecht et al., 2003) και την ανάπτυξη της γνώσης σχετικά με την ποσότητα του κλάσματος για μαθητές 6^{ης} και 8^{ης} τάξης (Tian & Siegler, 2017· Siegler et al., 2011). Μια προσπάθεια ερμηνείας αυτής της διαφοροποίησης μεταξύ τωρινής και προηγούμενων ερευνών είναι η ηλικιακή ομάδα για την οποία μελετήθηκαν οι ανωτέρω δεξιότητες. Αναλυτικότερα, η παρούσα έρευνα επικεντρώθηκε στη διερεύνηση δεξιοτήτων που κρίνονται απαραίτητες ώστε οι μαθητές 5^{ης} και 6^{ης} δημοτικού να έχουν υψηλή κλασματική κατανόηση ολικά, εννοιολογικά και διαδικαστικά. Οι παλαιότερες έρευνες σε αυτόν τον τομέα έχουν ασχοληθεί με μαθητές είτε μικρότερης είτε μεγαλύτερης ηλικίας. Κατά συνέπεια είναι πιθανό οι προβλεπτικοί παράγοντες για την επαρκή επίδοση στα κλάσματα να αλλάζουν με την ηλικία. Αυτό είναι λογικό αφού τα παιδιά καθώς ωριμάζουν έχουν κατακτήσει καλύτερα δεξιότητες όπως η καταμέτρηση αριθμών και η επίγνωση της ποσότητάς τους.

Επιπλέον, οι Saxe, Diakow και Gearhart (2012) υποστήριξαν ότι η αριθμογραμμή είναι ένα αποτελεσματικό μέσο αναπαράστασης των ακεραίων και κλασματικών αριθμών που οδηγεί στην υψηλότερη μαθηματική επίδοση μαθητών 4^{ης} και 5^{ης} δημοτικού. Παρ' όλα αυτά, η εν λόγω έρευνα δεν ανέδειξε καμία από τις δραστηριότητες των Αριθμογραμμών 0-100 και 0-1000 του MathPro test ως στατιστικώς σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης σε κάποιο είδος κλασματικής γνώσης. Ένας λόγος στον οποίο πιθανόν μπορεί να αποδοθεί αυτό το γεγονός είναι ο τρόπος διδασκαλίας των Μαθηματικών στα σχολεία σήμερα και οι διδακτικοί στόχοι που καλύπτονται σε κάθε τάξη. Λαμβάνοντας υπόψη το Αναλυτικό Πρόγραμμα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών που ακολουθείται στα ελληνικά σχολεία φαίνεται ότι η χρήση αριθμογραμμών ως μέσο αναπαράστασης φυσικών αριθμών να εισάγεται στην 4^η δημοτικού. Στις δύο επόμενες τάξεις χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση δεκαδικών και κλασματικών αριθμών (Πόταρη, 2014). Επομένως, τα υποκείμενα του δείγματος της έρευνας αυτής πιθανώς να είχαν διδαχθεί καθόλου ή ελάχιστα τη συγκεκριμένη στρατηγική δεδομένης της περιόδου συλλογής των δεδομένων κατά την οποία πολλοί δάσκαλοι δεν είχαν ακόμα καλύψει τους παραπάνω στόχους.

Περιορισμοί Έρευνας

Ένας σημαντικός περιορισμός της παρούσας έρευνας είναι η χρονική περίοδος συλλογής των δεδομένων η οποία άρχισε τον Δεκέμβριο. Την περίοδο αυτή

πολλά τμήματα της Ε΄ δημοτικού δεν είχαν διδαχθεί τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση κλασμάτων και δεν είχαν εξοικειωθεί επαρκώς με τη χρήση των αριθμογραμμών. Συνεπώς, είναι πιθανό το ποσοστό της διαδικαστικής κατανόησης να επηρεάστηκε από το γεγονός αυτό.

Επιπλέον, η χρήση υπολογιστών και διαδικτύου αποτέλεσε ένα τροχοπέδη κατά την διεξαγωγή της διαδικασίας αφού απαιτήθηκε η εύρεση κατάλληλα εξοπλισμένων αιθουσών Πληροφορικής στα δημόσια ελληνικά σχολεία. Μάλιστα για την ομαδική χορήγηση του MathPro test πραγματοποιήθηκε η μεταφορά ιδιωτικών φορητών υπολογιστών προκειμένου να ολοκληρωθεί η έρευνα σε πολλά σχολεία του νομού Ευβοίας.

Βιβλιογραφία

- Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(3), 447-455.
- Bempeni, M., & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research* 3(1), 17- 34. doi: <https://doi.org/10.14786/flr.v3i1.132>
- Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(2), 99-111.
- Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2005). How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (27 ed., Vol. 27). Retrieved from <https://escholarship.org/uc/item/6jc1n7jd>
- Εμβαλωτής, Α., Κατσής, Α., & Σιδερίδης, Γ. (2017). *Στατιστική μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.
- Fazio, L. K., & Siegler, R. S. (2011). Teaching fractions. In S. Vosniadou (Ed.), *Educational practices series* (Vol. 22, pp. 1-28). Geneva: International Academy of Education- International Bureau of Education.
- Grossberg, B. (2019, July 14). *Why Learning Fractions Is Important*. Retrieved from <https://www.thoughtco.com/why-learning-fractions-is-important-2774129>
- Hecht, S. A., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86(4), 277-302. doi:10.1016/j.jecp.2003.08.003
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 102(4), 843. doi: 10.1037/a0019824
- Jayanthi, M., Gersten, R., Taylor, J. M., Smolkowski, K., & Dimino, J. (2017). Impact of the developing mathematical ideas professional development program on grade 4 students' and teachers' understanding of fractions. *Institute of Education Science*, 1-47.
- Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (χ.χ.). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού*. Αθήνα: ΙΕΠ.
- Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8(57). doi:10.3389/fnhum.2014.00057
- Karagiannakis, G., & Noël, M.-P. (υπό δημοσίευση). Mathematical Profile & Dyscalculia Test: An online group administered interactive numerical battery for primary school children. *Journal of Numerical Cognition*.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (χ.χ.). *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού*. Αθήνα: ΙΕΠ.
- Khashan, K. H. (2014). Conceptual and procedural knowledge of rational numbers for Riyadh elementary school teachers. *Journal of Education and Human development*, 3(4), 181-197.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press. Retrieved

Lemonidis, Ch. (2015). *Mental Computation and Estimation: Implications for Mathematics Education Research, Teaching and Learning*. Routledge.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review*, 38, 201–221.

Μαγκλάρα, Γ., & Αργυρόπουλος, Β. (2016). *Η Προσέγγιση της κλασματικής έννοιας από Άτομα με Αναπηρία Όρασης: Μια πιλοτική έρευνα*. Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης, 2014, 135-145.

Mazzocco, M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and ‘holes’: Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11(5), 681-691. doi:10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x

Mellon, C. (2012). *Fraction skills predict math success later*. Retrieved from <http://www.futurity.org/fraction-skills-predict-math-success-later/>

Murnane, R. J., Willett, J. B., & Levy, F. (1995). The growing importance of cognitive skills in wage determination. *The Review of Economics and Statistics, MIT Press*, 77(2), 251-266. doi:10.2307/2109863

Πόταρη, Δ. (2014). *Μαθηματικά στην Προτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό): Οδηγός για τον εκπαιδευτικό: «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. Αθήνα: ΙΕΠ.

Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*, 1102-1118. Oxford: Oxford University Press.

Saxe, G. B., Diakow, R., & Gearhart, M. (2012). Towards curricular coherence in integers and fractions: A study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *Zdm*, 45(3), 343–364. doi:10.1007/s11858-012-0466-2

Shellenbarger, S. (2013, September 24). New Approaches to Teaching Fractions. *The Wall Street Journal*. Retrieved from <https://www.wsj.com/articles/new-approaches-to-teaching-fractions-1380064772?tesla=y>

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697. doi:10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994-2004. doi:10.1037/a0031200

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273-296.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students’ understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518.

- Stathopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Conceptual change in physics and physics-related epistemological beliefs: A relationship under scrutiny. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 145-164). Oxford, UK: Elsevier.
- Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6), 614-620.
doi:10.1177/0022219416662032
- Tian, J., & Siegler, S. R. (2016). Fractions learning in children with mathematical difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 1-7.
- U.S. National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Retrieved from <https://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models, and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265–282). Oxford, UK: Elsevier.