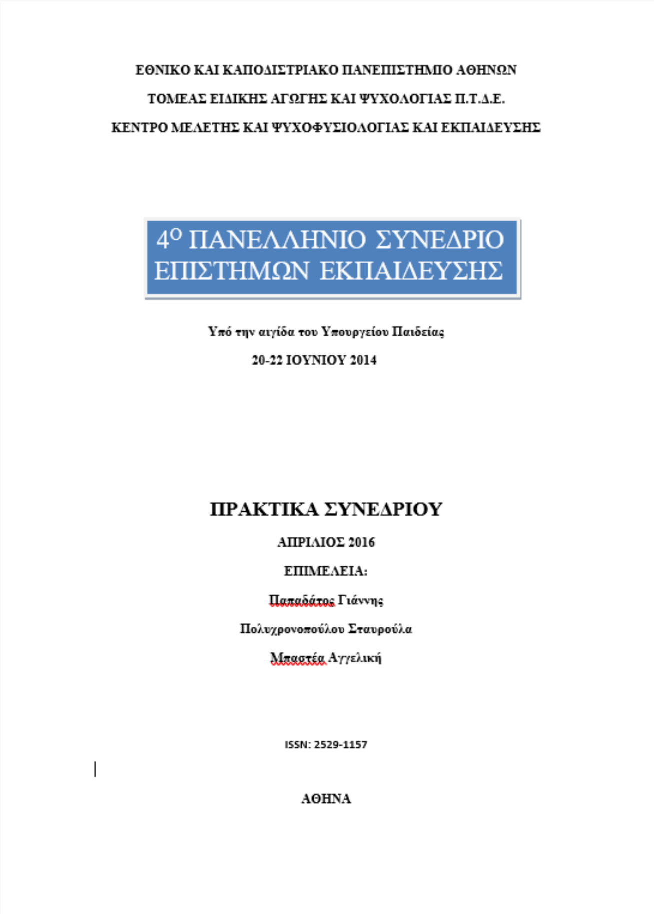
Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 2014, Αρ. 1 (2014)

Σύγχρονες αναζητήσεις της Ειδικής Αγωγής στην Ελλάδα: Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Επιστημών Εκπαίδευσης


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ Π.Τ.Δ.Ε.

ΚΕΝΤΡΟ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

4^{Ο} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Υπό την αιγίδα του Υπουργείου Παιδείας

20-22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Παπαδάτος Γιάννης

Πολυχρονοπούλου Σταυρούλα

Μπαστέα Αγγελική

ISSN: 2529-1157

ΑΘΗΝΑ

Η χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων Φυσικής

Γεώργιος Μπαραλής, Μιχάλης Πατσαλιάς

doi: 10.12681/edusc.308

Η χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων Φυσικής

Γεώργιος.Η.Μπαραλής
Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Αθηνών
e-mail: gmparalis@primedu.uoa.gr

Μιχάλης Πατσαλιάς
Μαθηματικός
MSc Θεωρητικά Μαθηματικά

Περίληψη

Είναι παλιά αλλά και αντικειμενική η αντίληψη ότι οι Φυσικές Επιστήμες και η διδασκαλία τους είναι άμεσα και πολύπλευρα συνδεδεμένες με τα Μαθηματικά. Πολλά χρόνια τώρα γίνεται συζήτηση για τη σπουδαιότητα του ουσιαστικού και ενεργητικού συσχετισμού μεταξύ των δύο αυτών επιστημών χωρίς όμως να έχει γίνει κάτι ιδιαίτερα αποτελεσματικό στην κατεύθυνση αυτή. Οι διδάσκοντες των Φυσικών Επιστημών, ειδικότερα στα σχολεία της Μέσης Εκπαίδευσης, αναγνωρίζουν ότι οι μαθητές τους δεν έχουν πάντα την κατάλληλη μαθηματική υποδομή για να διδαχθούν τη Φυσική. Τις περισσότερες φορές μάλιστα την αποκτούν ετεροχρονισμένα στο μάθημα των Μαθηματικών αφού ήδη όμως την έχουν διδαχθεί υποχρεωτικά για τις ανάγκες του μαθήματος της Φυσικής.
Στην εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την αναγκαιότητα της γνώσης και τον τρόπο χρήσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν το Ηλεκτρικό πεδίο.

Abstract

The notion that Physical Sciences and their teaching are directly and invariably connected to Mathematics, is old and objective. For many years, there has been an ongoing discussion about the importance of the essential and active relation between these two sciences, without, however, any particular effect towards this direction. Teachers of Sciences, particularly those of Secondary Education, admit that their students do not always have the appropriate mathematical background to learn Physics. Furthermore, students, most of the time, acquire such knowledge background in the subject of Mathematics with a delay, after however being already taught these notions for the needs of the subject of Physics as part of their compulsory curriculum.
In this paper we will try to prove the necessity of knowledge and the way of using the Euclidean Geometry in the solution of electric field problems.

Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά αναπτύχθηκαν, καλλιεργήθηκαν και εφαρμόστηκαν με πολλούς τρόπους από όλους τους λαούς και όλες τις εποχές παίζοντας καθοριστικό ρόλο στη ζωή του ανθρώπου αφού τον βοήθησαν να αποκτήσει την ικανότητα να αντιλαμβάνεται σωστά και αντικειμενικά τον κόσμο μέσα στον οποίο ζει και δραστηριοποιείται. Συνέβαλαν αποφασιστικά στη διδασκαλία και την κατανόηση άλλων μαθημάτων, αλλά και στην εξέλιξή τους.
Τα Μαθηματικά είναι κάτι που δημιουργεί ο ίδιος ο άνθρωπος και η γνώση των Μαθηματικών που παράγει και χρησιμοποιεί είναι συνάρτηση των αναγκών του και των πολιτιστικών απαιτήσεων της εποχής του. (Wilder.L.R., 1986, σελ. 26).

Σύμφωνα με τον A.Einstein τα Μαθηματικά έχουν ιδιαίτερη εκτίμηση από όλες τις άλλες επιστήμες γιατί οι νόμοι τους είναι απόλυτα συγκεκριμένοι και αδιαμφισβήτητοι ενώ των άλλων επιστημών είναι συζητήσιμοι και σε συνεχή κίνδυνο να ανατραπούν από νέα δεδομένα που προκύπτουν.
Η υψηλή εκτίμηση των Μαθηματικών οφείλεται στο ότι αυτά «προμηθεύουν» τις διάφορες επιστήμες και κυρίως, τις φυσικές, με ένα συγκεκριμένο βαθμό σιγουριάς, στον οποίο δεν θα μπορούσαν να φθάσουν χωρίς αυτά. (A.Einstein, σελ. 20).
Η εξήγηση, η πρόβλεψη, η επαλήθευση και η παράσταση των φυσικών φαινόμενων από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη βοήθεια των Μαθηματικών.
Για την «εισβολή» των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες και την «εξάρτηση» αυτών από τα Μαθηματικά οι P.J.Davis-R.Hersh χαρακτηριστικά αναφέρουν: «Το σύμπαν εκφράζεται φυσικά με τη γλώσσα των Μαθηματικών. Η δύναμη της βαρύτητας μειώνεται με το τετράγωνο της απόστασης. Οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά. Το φως ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή ή τουλάχιστον έτσι πίστευαν πριν από τον Einstein. Τα Μαθηματικά κάτω απ’ αυτή τη σκοπιά εξελίχθηκαν ακριβώς σαν ένα συμβολικό αντίγραφο του σύμπαντος».
Σύμφωνα με την πλατωνική άποψη τα Μαθηματικά υπάρχουν ανεξάρτητα από τις ανθρώπινες υπάρξεις. Υπάρχουν «κάπου εκεί έξω» και περιφέρονται διαρκώς στον κόσμο των πλατωνικών ιδεών που διαπερνά τα πάντα. Το σύμπαν έχει «επιβάλει» τα Μαθηματικά πάνω στο Γαλαξία όπως ακριβώς και πάνω στον άνθρωπο. (P.J.Davis-R.Hersh, (1980), σελ. 85).
Η παρουσία των Μαθηματικών στην ερμηνεία των φαινόμενων της φύσης είναι κυρίαρχη και αποτελεσματική. «Με τη βοήθεια της Γεωμετρίας και των μαθηματικών τύπων έγινε εφικτή η περιγραφή και εξήγηση των φυσικών φαινόμενων. «Μέσα στις απειροπληθείς επαναλήψεις των ομοειδών φαινόμενων» λέει ο Γαλιλαίος, «εκείνο που μένει σταθερό είναι ο μαθηματικός τύπος που εκφράζει τη νομοτέλειά τους…».(Εξαρχάκος.Θ, 1988, σελ, 22).
Τα Μαθηματικά και, κυρίως η γεωμετρία, οφείλουν την ύπαρξή τους στην ανάγκη του ανθρώπου να μάθει κάτι για τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους τα πραγματικά αντικείμενα που μας περιβάλλουν. Η λέξη “γεωμετρία” προέρχεται από την ελληνική λέξη “γεωμετρείν” και σημαίνει τρόπο μέτρησης της Γης. Η μέτρηση του εδάφους σχετίζεται με τις δυνατότητες διάταξης μεταξύ συγκεκριμένων φυσικών αντικειμένων, δηλαδή με τα χωράφια, τα σχοινιά, τους πασσάλους κ.λ.π.
Είναι γνωστή η αντίληψη ότι η Φυσική συνδέεται άμεσα με τη μαθηματική επιστήμη και ότι ο βαθμός συσχέτισης και αλληλεξάρτησης μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου. Ο ρόλος που παίζουν τα Μαθηματικά στη μεθοδολογία των φυσικών επιστημών και στις διαδικασίες θεμελίωσης των θεωριών τους αλλά και στην επίλυση των προβλημάτων τους είναι σημαντικότατος. Τα Μαθηματικά αποτελούν το εργαλείο για την κατάλληλη επεξεργασία της πολύπλοκης θεματολογίας τους και την κατάλληλη γλώσσα για τη διατύπωση των θεωριών τους. Δίνουν τη δυνατότητα ποικίλων μεθόδων για τη βελτίωση των προβλημάτων τους καθώς και την τεχνική για τις αναλύσεις και τις συμβολικές αναπαραστάσεις των νέων ανακαλύψεων. Όμως και τα Μαθηματικά γνώρισαν μεγάλη προώθηση από την ανάγκη να δώσουν λύσεις σε θέματα Φυσικής. Για παράδειγμα, η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παράγωγους προήλθαν από τη μελέτη των προβλημάτων ελαστικότητας και υδροδυναμικής.
Από την εποχή κιόλας των αρχαίων Ελλήνων είχε αρχίσει η αναζήτηση των αποδείξεων του μαθηματικού σχεδίου της φύσης. Ο φυσικός είχε θέσει ως σκοπό του έργου του να αποκαλύψει τις μαθηματικές σχέσεις πίσω από τα φαινόμενα. Η

αναζήτηση τύπων με τους οποίους περιγράφονται τα φυσικά φαινόμενα οδήγησε με τη σειρά της σε ένα άλλο πρόβλημα τού ποια είναι τα μεγέθη που μπορούν να εκφραστούν με τύπους. (Kline.M. σελ. 265-270).
Η Φυσική είναι και αυτή μια από τις αρχαιότερες επιστήμες και ασχολείται με την ύλη, την κίνηση και την ενέργεια. Οι νόμοι της εκφράζονται συνήθως με ακρίβεια με τη γλώσσα των Μαθηματικών. Ο όρος "φυσική" απαντά για πρώτη φορά στον Αριστοτέλη σε σύγγραμμα που διασώζεται μέχρι σήμερα.
Σύμφωνα με την άποψη του Αριστοτέλη τα Μαθηματικά ως «μη φυσικά» δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τη φύση. Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει ότι «σε κανένα κενό χώρο, όπως είναι ο χώρος της Γεωμετρίας, δεν υπάρχουν «φυσικοί τύποι». Η ιδέα του κενού δεν είναι συμβατή με την κατανόηση της κίνησης. Το κενό αποτελεί ένα μη αισθητό. Το να τοποθετηθούν σώματα σε αυτό το μη αισθητό είναι παράλογο. Ως εκ τούτου, τίποτε δεν θα ήταν πιο επικίνδυνο από το να αναμείξουμε Γεωμετρία και Φυσική, και να εφαρμόσουμε μια μέθοδο συλλογισμού καθαρά γεωμετρική για τη μελέτη της φυσικής πραγματικότητας».(Κολέζα.Ε, σελ. 117).
Αντίθετα με τον Αριστοτέλη, ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι τα Μαθηματικά είναι κατάλληλα για την περιγραφή της φύσης. Πίστευε ότι η πραγματική ουσία και το νόημα του φυσικού κόσμου μπορούν να γίνουν κατανοητά μόνο μέσα από τα Μαθηματικά, γιατί «ο Θεός αεί γεωμετρεί». Δεν ήθελε απλά να εισχωρήσει με τα Μαθηματικά στα μυστικά της φύσης αλλά να την ξεπεράσει τελείως και να φτάσει στον ιδεατό, μαθηματικά οργανωμένο κόσμο, που αποτελούσε κατά τη γνώμη του την αληθινή πραγματικότητα. (Kline.M., τομ. Α΄, σελ. 132-133).
Ο Alfred Renyi ισχυρίζεται ότι τα Μαθηματικά είναι απαραίτητα για τη μελέτη της φύσης για τις μεθόδους και τους τύπους που χρησιμοποιούν αφού:
1. Μια υπόθεση για τη φύση ποτέ δεν μπορεί να αποδειχθεί με τον ίδιο τρόπο όπως ένα μαθηματικό θεώρημα, δηλαδή εξάγοντάς το από κάποια αξιώματα με μια σειρά από λογικά συμπεράσματα. Οι υποθέσεις για τη φύση είναι οι ίδιες αξιώματα και τα αξιώματα δεν μπορούν να αποδειχθούν ούτε στα Μαθηματικά. Κανένας δεν μπορεί να αποδείξει τα αξιώματα της γεωμετρίας. Μπορεί κανείς να αντιληφθεί πως είναι σωστά μόνο γιατί η γεωμετρία που βασίζεται σ' αυτά περιγράφει σωστά το χώρο στον οποίο ζούμε. Το μόνο πράγμα που μπορούμε να κάνουμε είναι να βγάλουμε συμπεράσματα από αυτές τις υποθέσεις για κατάλληλα επιλεγμένα πειραματικά γεγονότα και να επιβεβαιώσουμε αυτά τα συμπεράσματα. Η εξαγωγή των συμπερασμάτων γίνεται με μαθηματικές μεθόδους.
2. Οι θεμελιώδεις νόμοι της φύσης δεν μπορούν να εκφραστούν διαφορετικά παρά μόνο με μαθηματικούς τύπους. Το μεγάλο βιβλίο της φύσης μπορεί να διαβαστεί μόνο από εκείνους που ξέρουν τη γλώσσα με την οποία είναι γραμμένο. Και η γλώσσα αυτή είναι τα μαθηματικά. … αν κάποιος καταφέρει να κάνει τη φύση να του μιλήσει, τότε αυτή μιλάει στη γλώσσα των Μαθηματικών και αν δεν ξέρουμε αυτή τη γλώσσα δεν μπορούμε να καταλάβουμε τι λέει. (Alfred Renyi, σελ. 89-90).

Η επίλυση προβλήματος στη Φυσική

Η μάθηση μέσω της επίλυσης προβλημάτων απαιτεί ουσιαστική αναδιάρθρωση της διδασκόμενης ύλης και τη χρήση διαφορετικών μεταφορικών αναπαραστάσεων και εικόνων. Οι μαθητές επιλύουν προβλήματα σε κάθε μορφή διδασκαλίας είτε αυτή είναι διάλεξη είτε διαλογική συζήτηση. Η στρατηγική της διδασκαλίας μέσω της επίλυσης προβλημάτων εφαρμόζεται κατά κύριο λόγο σε ομάδες μαθητών παρά σε μεμονωμένα άτομα. Ο λύτης πρέπει να αναγνωρίσει και να καθορίσει τα δεδομένα και τους σκοπούς μιας προβληματικής κατάστασης. Στη συνέχεια να κωδικοποιήσει τα σημαντικότερα στοιχεία του προβλήματος, να καθορίσει τι είναι γνωστό, τι άγνωστο και τι ζητάει το πρόβλημα, να το αναπαραστήσει, να εφαρμόσει μια στρατηγική επίλυσης και να αξιολογήσει τη λύση του.(Wheatley.G., (1991), Κόκκοτας.Π, (2003)).

Κατά την επίλυση προβλημάτων Φυσικής οι μαθητές και οι δάσκαλοι έρχονται αντιμέτωποι με διάφορους παράγοντες που δημιουργούν προβλήματα, ένας από τους οποίους είναι και οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών.

Η συνύπαρξη Μαθηματικών και Φυσικής είναι αναγκαία από τα πρώτα χρόνια ακόμη της εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, η πυκνότητα ενός σώματος εκφράζει την ποσότητα μάζας στη μονάδα του όγκου.(Φυσικά Δημοτικού, σελ. 17). Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο όγκο, τόσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα του σώματος. Ενώ όσο μικρότερος είναι ο όγκος ενός σώματος που αντιστοιχεί σε συγκεκραμένη μάζα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα. Οι παραπάνω σχέσεις είναι δύσκολο να κατανοηθούν από τους μαθητές της Ε΄ τάξης του Δημοτικού χωρίς την ουσιαστική γνώση της έννοιας του κλάσματος. Η αρμονική σχέση τους παραμένει ακόμη ανεκπλήρωτο όνειρο. Πολλοί φυσικοί ισχυρίζονται ότι ένα σημαντικό μέρος της διδασκαλίας τους το αφιερώνουν στο να παρουσιάζουν, να υπενθυμίζουν και να ολοκληρώνουν κατά τη γνώμη τους μαθηματικές έννοιες τις οποίες δε γνωρίζει ή δεν έχει ακούσει ο μαθητής. Μερικά από τα προβλήματα (Παπακωνσταντίνου.Χ., σελ. 265-267) που παρουσιάζονται κατά τη διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών και αφορούν τη σχέση των δύο μαθημάτων είναι:

α) **Δεν υπάρχει συντονισμός στη χρονική παρουσίαση Μαθηματικών και Φυσικών εννοιών.**

Για παράδειγμα, η γνώση των φυσικών λογαρίθμων είναι απαραίτητη στην επίλυση προβλημάτων θερμοδυναμικής που διδάσκεται περίπου τον Νοέμβριο στη Φυσική κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου ενώ οι μαθητές διδάσκονται τους φυσικούς λογάριθμους στα Μαθηματικά γενικής παιδείας στο τέλος της Β΄ Λυκείου.

Οι μαθητές ασχολούνται στη Φυσική της Α΄ Λυκείου με την κίνηση σωμάτων σε κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να έχουν ακούσει στα Μαθηματικά για τη γωνία δύο επιπέδων και για τις γωνίες με κάθετες πλευρές.

Στη Φυσική της Α΄ Λυκείου υπολογίζεται η συνισταμένη διανυσματικών μεγεθών με το νόμο των συνημίτονων ο οποίος διδάσκεται στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου.

β) **Η Φυσική και τα Μαθηματικά δεν εναρμονίζονται ώστε να υπάρχουν καλύτερα αποτελέσματα στην εκμάθηση και την εμπέδωση της γνώσης.**

Για τη σωστή διδασκαλία της Φυσικής απαιτείται καλή μαθηματική υποδομή αφού τα Μαθηματικά συμβάλλουν καθοριστικά στη διαμόρφωση των φυσικών θεωριών. Ο προσδιοριστικός ρόλος των Μαθηματικών είναι πολύ πιο ουσιαστικός για τη διαμόρφωση των φυσικών θεωριών, δεδομένου ότι η επιλογή μιας συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας προκαθορίζει τις βασικές εξισώσεις τής εν εξελίξει φυσικής θεωρίας.(Κολέζα.Ε. σελ. 124).

Η εμπέδωση επίσης της μαθηματικής γνώσης θα μπορούσε να γίνει καλύτερα μέσα από παραδείγματα της Φυσικής, αφού δεν είναι δυνατό να αμφισβητηθεί ότι οι αφηρημένες μαθηματικές εμπνεύσεις που δημιουργήθηκαν από τη φαντασία των μαθηματικών είχαν ως αφετηρία φυσικά πρότυπα. (Moshe Flato, σελ. 67).

γ) **Η χρησιμοποιούμενη ορολογία και στα δύο μαθήματα**

Η γλώσσα που χρησιμοποιούν τα Μαθηματικά και η Φυσική πρέπει να αντιμετωπίζεται μέσα στο πρόβλημα της γλωσσικής επάρκειας ή ανεπάρκειας των μαθητών και να λαμβάνονται υπόψιν οι ιδιαιτερότητές τους. Διαφορετικά εννοούμε τη δύναμη αριθμού στα Μαθηματικά και διαφορετικά τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα στη Φυσική. Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού στα Μαθηματικά είναι ο ίδιος ο αριθμός αν αυτός είναι θετικός και ο αντίθετός του αν είναι αρνητικός. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και στη Φυσική για τον υπολογισμό της απόλυτης τιμής ενός μεγέθους. Αν όμως αναφερόμαστε στο απόλυτο μηδέν στην κλίμακα θερμοκρασιών τότε αυτό δεν είναι η απόλυτη τιμή του μεγέθους αλλά το χαμηλότερο σημείο της κλίμακας θερμοκρασιών (-273 C^0). (Βλάχος.Α.Γ-Καρανίκας.Γ-Κόκκοτας.Π., σελ. 484-485).

Γεωμετρικές έννοιες που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση των προβλημάτων Φυσικής.

Οι γεωμετρικές έννοιες που χρησιμοποιήσαμε στην εργασία μας είναι οι ακόλουθες:

- **Γεωμετρικός τόπος.** Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα λέγεται **γεωμετρικός τόπος**.

1. **Απολλώνιος κύκλος.** Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο ορισμένα σημεία Α και Β του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.
2. **Απολλώνιος σφαίρα.** Θεωρούμε τα σημεία Α και Β. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ , ώστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ είναι η σφαίρα (σ) διαμέτρου ΡΡ΄ , όπου Ρ , Ρ΄ συζυγή αρμονικά των Α , Β με λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ δηλαδή $\frac{MA}{MB} = \frac{P'A}{P'B} = \frac{\mu}{\nu}$. Η σφαίρα (σ) ονομάζεται Απολλώνια σφαίρα με βάση το τμήμα ΑΒ και λόγο $\frac{\mu}{\nu}$.
3. **Μεσοκάθετος.** Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και διέρχεται από το μέσο του.

- **Το ορθογώνιο τρίγωνο και οι βασικές ιδιότητές του.**

1. Πυθαγόρειο θεώρημα. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.
2. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
3. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^0, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

- **Το ισόπλευρο τρίγωνο και οι βασικές ιδιότητές του.**

1. Το ύψος, η διάμεσος, η μεσοκάθετος της πλευράς και η διχοτόμος μιας γωνίας του ταυτίζονται.
2. Το ύψος του τριγώνου με πλευρά α είναι, $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

3. Οι διάμεσοι του ισόπλευρου τριγώνου, όπως και σε κάθε τρίγωνο, διέρχονται από το ίδιο σημείο (βαρύκεντρο) του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

- **Το τετράγωνο και οι βασικές του ιδιότητες.**

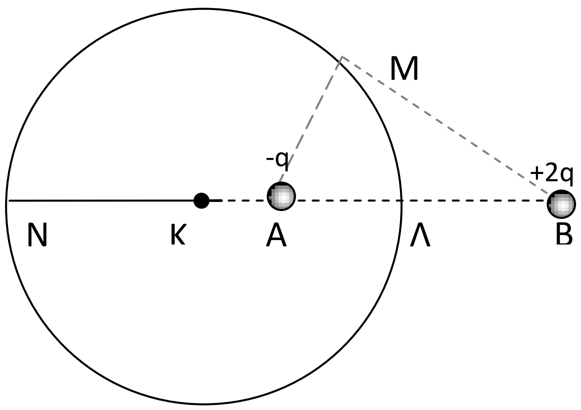
1. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες και όλες οι γωνίες του ορθές.
2. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.
3. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι α τότε η διαγώνιός του είναι $α\sqrt{2}$.

Προβλήματα Φυσικής που λύνονται με τη χρήση της Γεωμετρίας

Τα προβλήματα που θα παρουσιάσουμε παρακάτω περιλαμβάνονται στην ύλη η οποία διδάσκεται στη Β΄ Λυκείου και αφορά την έννοια του ηλεκτρικού πεδίου. Η περιγραφή της έννοιας του ηλεκτρικού πεδίου, η διατύπωση των σχετικών προβλημάτων και η επεξεργασία που οδηγεί στη λύση, γίνονται με τη χρήση της μεθοδικής, λιτής και αυστηρής γλώσσας της Γεωμετρίας και γενικότερα των Μαθηματικών. Το ηλεκτρικό πεδίο επηρεάζεται από παράγοντες που η επίδρασή τους είναι γνωστή και μετρήσιμη με συνέπεια η παρουσίασή τους να μπορεί να τεθεί υπό τη μορφή συγκεκριμένων γεωμετρικών εννοιών και αλγεβρικών τύπων.
Διακρίνουμε τις παρακάτω κατηγορίες προβλημάτων:

Α. Προβλήματα γεωμετρικών τόπων

Πρόβλημα 1^{ο}
Δύο σημειακά ηλεκτρικά φορτία +2q και –q βρίσκονται σε απόσταση l=18 cm μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ στα οποία το δυναμικό του πεδίου είναι μηδέν, είναι σφαίρα. Επίσης, να βρεθούν η ακτίνα R της σφαίρας και η απόσταση d του κέντρου της από το φορτίο –q.
Λύση



Έστω ένα σημείο Μ που ανήκει στο ζητούμενο γεωμετρικό τόπο όπου $V_M=0$ (1). Για το δυναμικό στο Μ γνωρίζουμε ότι:
$V_M= V_{M,2q}+ V_{M,-q}$ ή
$V_M=k_{ηλ}\frac{2q}{MB} + k_{ηλ}\frac{-q}{MA}$ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:
$k_{ηλ}\frac{2q}{MB} - k_{ηλ}\frac{q}{MA} = 0$ ή $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$.

Από τη γεωμετρία όμως γνωρίζουμε ότι ο γ.τ. των σημείων όπου ο λόγος των αποστάσεών τους από δύο δοσμένα σημεία είναι σταθερός, είναι κύκλος για το επίπεδο και σφαίρα για το χώρο. (Απολλώνιος κύκλος – Απολλώνιος σφαίρα).
Η σφαίρα που είναι ο γ.τ. των σημείων Μ με $V_M=0$ θα τέμνει την ΑΒ στα σημεία Ν, Λ. Τα σημεία Ν, Λ είναι τέτοια ώστε:

$\frac{\text{NA}}{\text{NB}}=\frac{1}{2}$ ή $\frac{\text{NA}}{\text{NA}+l}=\frac{1}{2}$ ή NA= l και $\frac{\Lambda\text{A}}{\Lambda\text{B}}=\frac{1}{2}$ ή $\frac{\Lambda\text{A}}{l-\Lambda\text{A}}=\frac{1}{2}$ ή ΛΑ=$\frac{l}{3}$.

Επομένως d=ΚΑ ή d=ΚΛ-ΛΑ ή d= R-$\frac{l}{3}$ ή d=$\frac{2l}{3}-\frac{l}{3}=\frac{l}{3}$.

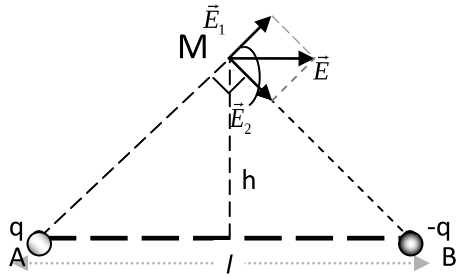
Άρα: R=12.10^{-2}m και d=6.10^{-2}m.

Πρόβλημα 2ο

Στα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ μήκους l=3m υπάρχουν δύο φορτία q_1=+q και q_2=-q όπου q=1μC. Να βρείτε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ το οποίο απέχει από το μέσο Μ του ΑΒ απόσταση h=$\frac{l}{2}$.

Δίνεται: $K_{ηλ}$=9.10^9 N.m^2/C^2.

Λύση



Είναι:

$$E_1 = K_{ηλ}\frac{|q_1|}{r^2} = K_{ηλ}\frac{q}{\alpha^2+h^2} = K_{ηλ}\frac{q}{\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}} = K_{ηλ}\frac{2q}{l^2} \quad (1).$$

$$E_2 = K_{ηλ}\frac{|q_2|}{r^2} = K_{ηλ}\frac{q}{\alpha^2+h^2} = K_{ηλ}\frac{q}{\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4}} = K_{ηλ}\frac{2q}{l^2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $E_1 = E_2$.

Έχουμε: εφφ=$\frac{h}{\alpha}=\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}}$=1, οπότε φ=$45^0$ δηλαδή το ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ είναι και ορθογώνιο.

Η συνισταμένη των $\vec{E}_1$ και $\vec{E}_2$ έχει μέτρο E=$\sqrt{E_1^2+E_2^2}=E_1\sqrt{2}=2\sqrt{2}\,K_{ηλ}\frac{q}{l^2}$ ή E=2 $\sqrt{2}\,10^3\frac{\text{N}}{C}$. Η $\vec{E}$ έχει διεύθυνση παράλληλη στη διεύθυνση της ΑΒ.

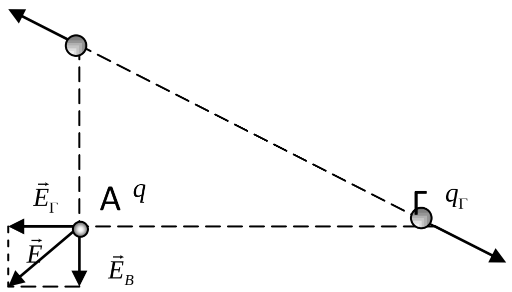
Β. Προβλήματα γνώσης γεωμετρικών σχέσεων στο ορθογώνιο τρίγωνο

Πρόβλημα 3ο (Θέμα από εξετάσεις 2001)

Στις κορυφές Β και Γ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90^0) βρίσκονται ακλόνητα τα σημειακά φορτία q_B=+9μC και $q_Γ$=+16μC αντίστοιχα. Οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒ και ΑΓ έχουν μήκη 0,3m και 0,4m αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

1. Τα μέτρα των εντάσεων των ηλεκτρικών πεδίων στην κορυφή Α του ορθογωνίου τριγώνου που οφείλονται σε καθένα από τα φορτία q_B και $q_Γ$.
2. Το μέτρο της συνολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή Α που οφείλεται και στα δύο φορτία q_B και $q_Γ$.
3. Το μέτρο της δύναμης μεταξύ των φορτίων q_B και $q_Γ$.
4. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε σημειακό φορτίο q=+1μC το οποίο τοποθετείται στην κορυφή Α του τριγώνου.

Λύση



Έχουμε:

1. $E_B = K_{\eta\lambda}\dfrac{q_B}{(AB)^2} = 9.10^5\dfrac{N}{C}$ και

$E_\Gamma = K_{\eta\lambda}\dfrac{q_\Gamma}{(A\Gamma)^2} = 9.10^5\dfrac{N}{C}$, δηλαδή $E_B = E_\Gamma$.

2. Η συνολική ένταση $\vec{E}$ στην κορυφή Α θα έχει μέτρο Ε που υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Είναι: $E^2 = E_B^2 + E_\Gamma^2 \Leftrightarrow E = \sqrt{E_B^2 + E_\Gamma^2} = 9\sqrt{2}.10^5\dfrac{N}{C}$.

3. Μεταξύ των φορτίων q_B και q_Γ ασκείται απωστική δύναμη Coulomb που έχει μέτρο $F = K_{\eta\lambda}\dfrac{q_B q_\Gamma}{(B\Gamma)^2} = K_{\eta\lambda}\dfrac{q_B q_\Gamma}{(AB)^2 + (A\Gamma)^2} = 5{,}184$ N.

(Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$).

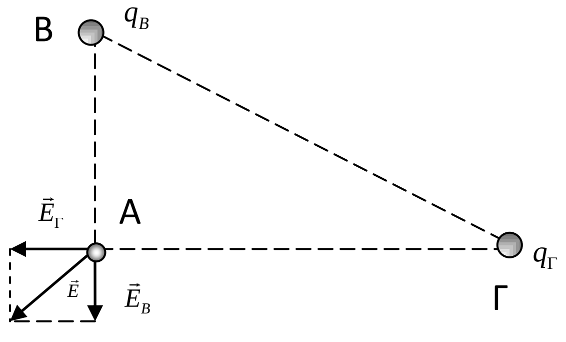
4. Στο φορτίο θα ασκηθεί δύναμη μέτρου $F' = qE = 0{,}9\sqrt{2}$ N.

Πρόβλημα 4ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) όπου (ΑΓ)=6m και (ΑΒ)=3m τοποθετούμε στις κορυφές Β και Γ τα σημειακά φορτία q_B=-3μC και q_Γ=-12μC αντίστοιχα.

1. Να σχεδιάσετε τις εντάσεις $\vec{E}_B$ και $\vec{E}_\Gamma$ των πεδίων που δημιουργούν τα q_B και q_Γ στο σημείο Α και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.
2. Ποια είναι η διεύθυνση και ποιο το μέτρο της έντασης πεδίου που δημιουργούν τα φορτία q_B και q_Γ στο σημείο Α;

Λύση



Τα μέτρα των εντάσεων των πεδίων που δημιουργούν τα q_B και q_Γ στην κορυφή Α είναι:

$E_B = K_{\eta\lambda}\dfrac{|q_B|}{(AB)^2} = \dfrac{3}{9}.9.10^9\dfrac{N}{C} = 3.10^9\dfrac{N}{C}$

και

$E_\Gamma = K_{\eta\lambda}\dfrac{|q_\Gamma|}{(A\Gamma)^2} = \dfrac{12}{36}.9.10^9\dfrac{N}{C} = 3.10^9\dfrac{N}{C}$

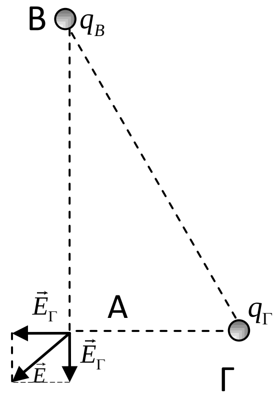
οπότε $E_B = E_\Gamma = 3.10^9\dfrac{N}{C}$.

2. Η συνισταμένη των $\vec{E}_B$ και $\vec{E}_\Gamma$ σχηματίζει με την πλευρά ΑΒ γωνία φ όπου εφφ= $\dfrac{E_\Gamma}{E_B} = 1$ ή $\varphi = 45^0$. Δηλαδή η διεύθυνσή της στο σημείο Α διχοτομεί τη γωνία Α. Το μέτρο της έντασης του πεδίου στο σημείο Α είναι: $E = \sqrt{E_B^2 + E_\Gamma^2} = 9\sqrt{2}.10^9\dfrac{N}{C}$.

Πρόβλημα 5ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0) με Β=30^0 και πλευρά ΑΓ=4m τοποθετούμε στις κορυφές Β και Γ τα ακλόνητα σημειακά φορτία q_B=+16μC και $q_Γ$=+16μC αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το μέτρο της συνολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α. Δίνονται $k_{ηλ}=9.10^9\ \frac{Nm^2}{Cb^2}$

Λύση



Αφού η γωνία είναι Β=30^0 και η πλευρά ΑΓ=4m , η υποτείνουσα ΒΓ θα είναι ΒΓ=8m. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2 \Leftrightarrow ΑΒ=4\sqrt{3}$ m.

Τα μέτρα των εντάσεων των πεδίων που δημιουργούν τα q_B και $q_Γ$ στην κορυφή Α είναι:

$$E_B = K_{ηλ}\frac{q_B}{(AB)^2} = 9.10^9.\frac{16}{\left(4\sqrt{3}\right)^2}\ \frac{N}{C} = 3.10^9\ \frac{N}{m}$$

και $E_Γ = K_{ηλ}\frac{q_Γ}{(AΓ)^2} = 9.10^9.\frac{16}{4^2}\ \frac{N}{C} = 9.10^9\ \frac{N}{C}$,

οπότε το μέτρο της συνολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α θα είναι:

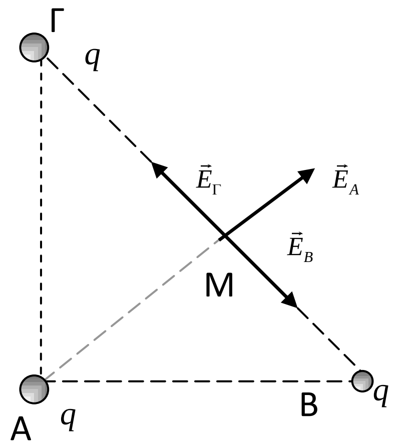
$$E_{ολ} = \sqrt{E_B^2 + E_Γ^2} = \sqrt{\left(3.10^9\right)^2 + \left(9.10^9\right)^2} =$$

$$= \sqrt{90.10^{18}} = 3.10^9.\sqrt{10}\ \frac{N}{C},$$

Πρόβλημα 6ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^0) με υποτείνουσα ΒΓ=1m και διάμεσο ΑΜ τοποθετούμε στις κορυφές Α, Β και Γ τα ακλόνητα σημειακά ηλεκτρικά φορτία $q_A=q_B=q_Γ=q$=+1μC αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το μέτρο της συνολικής έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο μέσο Μ της ΒΓ. Δίνονται $k_{ηλ}=9.10^9\ \frac{Nm^2}{Cb^2}$

Λύση



Είναι: $q_A=q_B=q_Γ=q$=+1μC.

Επειδή ΑΜ διάμεσος θα ισχύει ΜΒ=ΜΓ και επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο θα ισχύει:

$AM=\frac{BΓ}{2}$=0,5.

$$E_{B,Γ}=E_B - E_Γ = {}_{ηλ}\frac{q_B}{(MB)^2} - K_{ηλ}\frac{q_Γ}{(MΓ)^2} = 0.$$

$$E_{ολ} = E_A = K_{ηλ}\frac{q_A}{(AM)^2} = 9.10^9.\ \frac{1.10^{-6}}{(0,5)^2} = 36.10^3\frac{N}{C}.$$

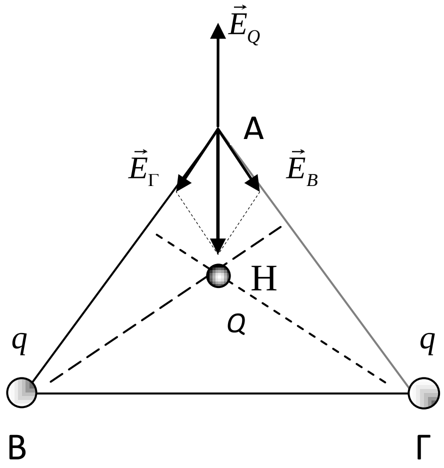
Γ. Προβλήματα γνώσης σχέσεων στο ισόπλευρο τρίγωνο

Πρόβλημα 7ο

Στις κορυφές Β και Γ ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ υπάρχουν τα σημειακά ηλεκτρικά φορτία q_B=$q_Γ$=q=-5μC.

1. Να σχεδιάσετε τις εντάσεις $\vec{E}_B$ και $\vec{E}_Γ$ των πεδίων που δημιουργούν τα q_B και $q_Γ$ αντίστοιχα στην κορυφή Α και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.
2. Να βρείτε το φορτίο που πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο τομής Η των υψών του τριγώνου, ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Α να είναι μηδέν.

Λύση



2. Τα μέτρα των εντάσεων των πεδίων που δημιουργούν τα φορτία q_B και $q_Γ$ και Q, όπου Q το φορτίο στο σημείο τομής των υψών Η στην κορυφή Α είναι:

$E_B = K_{ηλ}\dfrac{|q_B|}{\alpha^2}$, $E_Γ = K_{ηλ}\dfrac{|q_Γ|}{\alpha^2}$ και

$E_H = K_{ηλ}\dfrac{|Q|}{(AH)^2}$ αντίστοιχα , όπου α το μήκος της πλευράς του τριγώνου και

(ΑΗ)= $\dfrac{2}{3}.\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

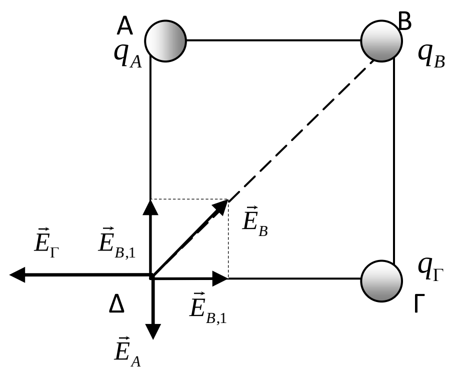
Θα πρέπει η συνισταμένη $\vec{E}$ των $\vec{E}_B$, $\vec{E}_Γ$ και $\vec{E}_H$ να είναι μηδέν. Τελικά …… βρίσκουμε Q = +$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ μC.

Δ. Προβλήματα γνώσης σχέσεων στο τετράγωνο

Πρόβλημα 8ο

Στις κορυφές Α και Γ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α, υπάρχουν τα σημειακά φορτία q_A=$q_Γ$=+5μC αντίστοιχα. Τι φορτίο πρέπει να υπάρχει στην κορυφή Β ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή Δ να είναι μηδέν;

Λύση



$E_B = K_{ηλ}\dfrac{|q_B|}{\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2}$ και $E_A = E_Γ = K_{ηλ}\dfrac{q_A}{\alpha^2}$.

Πρέπει $E_A = E_{B,1} = E_B.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$K_{ηλ}\dfrac{q_A}{\alpha^2} = K_{ηλ}\dfrac{|q_B|}{2\alpha^2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Στην κορυφή Δ έχουμε:

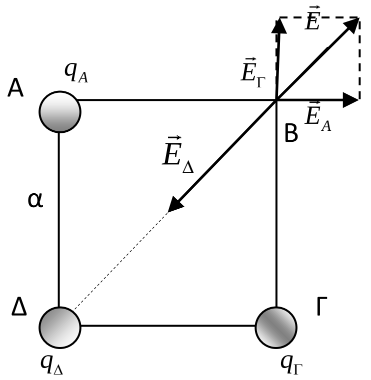
$|q_B| = \dfrac{5}{\sqrt{2}}.q_A = 5\sqrt{2}$ με C αρνητικό.

Πρόβλημα 9ο

Στις κορυφές Α, Γ και Δ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α τοποθετούμε αντίστοιχα τα σημειακά φορτία q_A, q_Γ και q_Δ με $q_A=q_\Gamma=+\sqrt{2}$ μC και $q_\Delta = -4$ μC.

1. Να σχεδιάσετε τις εντάσεις των πεδίων που δημιουργούν τα φορτία q_A, q_Γ και q_Δ στην κορυφή Β.
2. Ποια είναι η διεύθυνση της έντασης του πεδίου που δημιουργεί το φορτίο q_Δ στην κορυφή Β;
3. Ποιο είναι το μέτρο και ποια η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην κορυφή Β;

Λύση



1. Σχήμα.

2. Έχουμε:

$(B\Delta)^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$

Οι εντάσεις των πεδίων που δημιουργούν τα φορτία q_A, q_Γ και q_Δ στο Β έχουν αντίστοιχα μέτρα:

$$E_A = K_{\eta\lambda}\frac{|q_A|}{\alpha^2} = K_{\eta\lambda}\frac{\sqrt{2}.10^{-6}}{\alpha^2}$$

$$E_\Gamma = K_{\eta\lambda}\frac{|q_\Gamma|}{\alpha^2} = K_{\eta\lambda}\frac{\sqrt{2}.10^{-6}}{\alpha^2} \text{ και}$$

$$E_\Delta = K_{\eta\lambda}\frac{|q_\Delta|}{(B\Delta)^2} = K_{\eta\lambda}\frac{\sqrt{2}.10^{-6}}{\alpha^2}.$$

Η συνισταμένη των $\vec{E}_A$ και $\vec{E}_\Gamma$ έχει μέτρο $E' = \sqrt{E_A^2 + E_\Gamma^2} = K_{\eta\lambda}\frac{2.10^{-6}}{\alpha^2} = E_\Delta$

και κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη της $\vec{E}_\Delta$. Συνεπώς η ολική ένταση στην κορυφή Β θα είναι μηδέν.

Συμπεράσματα

Από τη λύση των προβλημάτων Φυσικής που παρουσιάσαμε στην εργασία μας προκύπτει ότι απαιτείται ένα μαθηματικό υπόβαθρο τόσο για την ανάπτυξη των μοντέλων των διαφόρων προβλημάτων όσο και για την επίλυσή τους.

Η εναρμόνιση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας με τη Φυσική είναι απαραίτητη στην εκπαίδευση. Η προσπάθεια αυτή μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλες τροποποιήσεις και αλλαγές τόσο στα αναλυτικά προγράμματα όσο και στα σχολικά βιβλία των δύο μαθημάτων κατά τάξη.

Στα βιβλία της Γεωμετρίας και σε κάθε ενότητα θα ήταν χρήσιμο εκτός από τα παραδείγματα, τις εφαρμογές και τα προβλήματα γεωμετρικής φύσης, τα οποία υπάρχουν σε κάθε κεφάλαιο σήμερα, να συμπεριληφθούν και εφαρμογές της Φυσικής και άλλων μαθημάτων με σκοπό την αξιοποίηση και χρήση του μαθήματος σε άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Στην αρχή της κάθε ενότητας στη Φυσική θα πρέπει να περιγράφονται οι απαραίτητες μαθηματικές έννοιες οι οποίες χρειάζονται για τη σωστή διδασκαλία του μαθήματος.

Οι σκοποί και οι στόχοι της διδασκαλίας των μαθημάτων της Φυσικής και της Γεωμετρίας στην περίπτωσή μας δεν θα πρέπει να είναι στεγανοποιημένοι σε επίπεδο περιεχομένου και μαθησιακού αποτελέσματος, αλλά να είναι κοινοί και να προσβλέπουν στην άρτια και ολοκληρωμένη επιστημονική κατάρτιση του μαθητή.
Οι δάσκαλοι και οι καθηγητές Φυσικής θα πρέπει να διδάσκονται σε επίπεδο βασικής εκπαίδευσης αλλά και αργότερα στην επιμόρφωση ή μετεκπαίδευση την αναγκαιότητα γνώσης βασικών θεμάτων Γεωμετρίας τα οποία είναι απαραίτητα για τη σωστή διδασκαλία του μαθήματος.

Βιβλιογραφία

1. Arnold.B.Arons. (1992), "Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής". Μετάφραση Α.Βαλαδάκης. Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.
2. Butterfield.H. (1988), "Η καταγωγή της σύγχρονης επιστήμης (1300 – 1800)". Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.
3. Βλάχος.Α.Γ-Καρανίκας.Γ-Κόκκοτας.Π. (1993), "Το Μαθηματικό περιεχόμενο της Φυσικής και τα Μαθηματικά όπως καταγράφονται στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου – Λυκείου. Μια κριτική θεώρηση." Πρακτικά 10[ου] Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα.
4. Einstein.A. (1997), "Αιθέρας, Γεωμετρία και Εμπειρία". Άρθρα για τα επιστημολογικά θεμέλια των σχετικιστικών θεωριών. Μετάφραση-Σημειώσεις Θ.Χριστακόπουλος. Εκδόσεις Βάνιας, Θεσσαλονίκη.
5. Εξαρχάκος.Θ (1988), "Διδακτική των Μαθηματικών". Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.
6. Καλκάνης Γ.- Κωστόπουλος. Δ. (1995), "Φυσική" Από το Μικρόκοσμο στο Μακρόκοσμο.
7. Kline.M. "Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό". Εκδώσεις Κώδικας, Αθήνα.
8. Κόκκοτας.Π. (2003), «Διδακτική των Φυσικών Επιστημών», Αθήνα.
9. Κολέζα.Ε. – Σκορδούλης.Κ. (1996), "Διδακτικές προεκτάσεις της μαθηματικοφυσικής ιδιοποίησης του προβλήματος των τριών σωμάτων από τον H.Poincare.". Πρακτικά 1[ου] Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα.
10. Lindberg.C.D (1999), "Οι απαρχές της Δυτικής επιστήμης". Εκδ. Ε.Μ.Π.
11. "Μαθηματικά", Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης, Γ΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.
12. Παπακωνσταντίνου Χρήστος (1994), "Μαθηματικά – Φυσική. Υποχρεωτική συμβίωση με ανασφαλείς σχέσεις …". Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών ΙΙ,. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
13. Σαββάλας.Α – Σαββάλας.Κ. (2003), "Φυσική", Β΄ Λυκείου, Α΄ τεύχος. Εκδ. Σαββάλας, Αθήνα.
14. Σκορδούλης.Δ.Κ. (2008), "Ζητήματα θεωρίας των Επιστημών της Φυσικής". Εκδόσεις Τόπος.
15. "Φυσικά Ε΄ Δημοτικού. Ερευνώ και Ανακαλύπτω". Βιβλίο μαθητή, Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα.
16. "Φυσική Γενικής Παιδείας", Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β.
17. Wheatley.G. (1991), "Constructivist Perspectives in Science and Mathematics Learning", Science Education 75.
18. Wilder.L.R. (1986), "Εξέλιξη των Μαθηματικών εννοιών". The Open University. Εκδ. Π.Κουτσούμπος