

# Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 8 (2018)

8ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΑΘΗΝΩΝ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ



Υπό την αιγίδα του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και  
Θρησκευμάτων

8<sup>ο</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΧΑΡΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΣΤΗΝ  
ΕΛΛΑΔΑ

Ιδεολογικές – Πολιτικές – Ψυχολογικές – Παιδαγωγικές  
Προϋποθέσεις Εκπαίδευσης Χαρισματικών Ατόμων

ΤΟΜΟΣ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ  
ISSN: 2529-1157

Σε Συνεργασία με την Ένωση Ελλήνων Φυσικών και την  
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία  
ΞΕΝΟΔΟΧΕΙΟ DIVANICARAVEL  
14-17 Ιουνίου 2018

« Μαθητές στα χνάρια του μαέστρου του  
παράδοξου M.C. Escher »

Γεωργία Μαραγκού

doi: [10.12681/edusc.2714](https://doi.org/10.12681/edusc.2714)

## Βιβλιογραφική αναφορά:

Μαραγκού Γ. (2020). « Μαθητές στα χνάρια του μαέστρου του παράδοξου M.C. Escher ». *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, 8, 689–697. <https://doi.org/10.12681/edusc.2714>

## « Μαθητές στα χνάρια του μαέστρου του παράδοξου M.C. Escher »

Μαραγκού Γεωργία, καθηγήτρια Μαθηματικών στο 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού  
Αττικής

e-mail: [geomar1712@yahoo.gr](mailto:geomar1712@yahoo.gr)

### Περίληψη

Στοχεύοντας στην αλλαγή της διαδικασίας μάθησης από απομνημονευτική-ατομική σε διερευνητική-ομαδοσυνεργατική αλλά και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, στην καλλιέργεια θετικών στάσεων και συμπεριφορών των μαθητών, έχει γίνει εισαγωγή καινοτόμων προγραμμάτων στο εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας μας που θεωρείται στη σύγχρονη εποχή αναγκαία ώστε το σχολείο να ανταποκριθεί στις σύγχρονες παιδαγωγικές, πολιτιστικές και πολιτισμικές απαιτήσεις καθώς και στις κοινωνικο-οικονομικές και τεχνολογικές εξελίξεις. Οι μαθητές στα πλαίσια ενός τέτοιου προγράμματος που αφορά Μαθηματικά και Τέχνη καθοδηγήθηκαν να ερευνήσουν το έργο του Escher και να σχεδιάσουν τελικά και δικές τους πλακοστρώσεις. Έτσι μέσω αυτών των δραστηριοτήτων οι μαθητές απέκτησαν ευέλικτη γεωμετρική σκέψη, αυτοσχεδίασαν, συνεργάστηκαν, και πρωτοτύπησαν στην παρουσίαση των εργασιών τους όπως άλλωστε έξι σχολικές χρονιές στο **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙ** στο **1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού Αττικής**. Πείστηκαν για μια ακόμη φορά με τη λειτουργία του Εργαστηρίου αυτού, πως τα Μαθηματικά είναι πράγματι μια άλλη γλώσσα που αν ακούσουμε προσεκτικά, θα δούμε ότι όλα γύρω μας τη μιλάνε.

**Λέξεις-Κλειδιά:** Μαθηματικό Εργαστήρι; Πλακοστρώσεις

### Abstract

Aiming at the change of the learning process, from the memorizing-individual to an exploratory-group collaboration and on the other hand due to the development of skills and the cultivation of positive attitudes and behaviors of the students, has been introduced a schedule of innovative programs in the educational system of our country which is considered as a natural consequence of the needs of modern times, in an attempt so that the school responds to contemporary cultural demands as well as to the socio- economic and technological developments. The students, in the context of such an innovative Mathematics and Art program, were instructed to study the work of M.C. Escher, then to design their own tessellations not only with paper and scissors but also with dynamic Geometry software as well. They collaborated and after working intensively, they prepared a special presentation of their designs as they always do the last six school years in our MATHEMATICS LAB.

**Keywords:** Mathematics Lab; Tessellations.

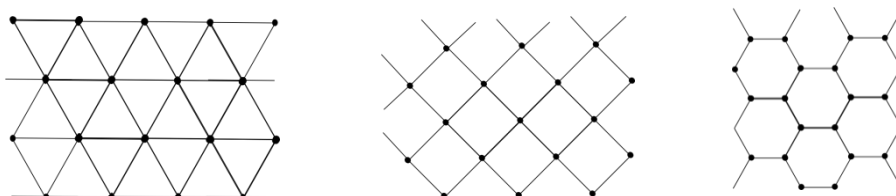
### Εισαγωγή

Δεν υπάρχει περίπτωση να γίνει λόγος για «Τέχνη και Μαθηματικά» χωρίς αναφορά στον Escher. Υπήρξε ένας από τους επιδραστικότερους εικαστικούς καλλιτέχνες του αιώνα που πέρασε. Ο Μάουριτς Κορνέλις Έσερ θεωρείται δικαίως ως ο χαρακτήρας που

οι ιδέες και οι δημιουργίες του έχουν τη μεγαλύτερη συνάφεια με τα Μαθηματικά. Επιτεύχθηκε οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου της σχολικής μονάδας να διακρίνουν τη λανθάνουσα μαθηματική ιδιοφυΐα που χαρακτηρίζει τα έργα του και αυτό με το να « πλησιάσουν » τα χαρακτηριστικά αυτού του μαέστρου του παράδοξου και στη συνέχεια να δημιουργήσουν κι εκείνοι τα δικά τους έργα που να τους μοιάζουν! Ωστόσο ενεπλάκησαν σε αυτήν την προσπάθεια και οι μικρότεροι μαθητές της Β΄ τάξης αφού τους τονίστηκε πόσο βοηθά η εφαρμογή μετασχηματισμών και η χρησιμοποίηση της συμμετρίας για την ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων.

### Θεωρητικό πλαίσιο

Οι μικροί μαθητές έρχονται στο σχολείο με διαισθητική γνώση (intuition) για το πως οι γεωμετρικές μορφές μπορούν να κινηθούν. Μπορούν να ερευνήσουν κινήσεις όπως η μετατόπιση (translation), η ανάκλαση (reflection) με τη χρησιμοποίηση καθρεφτών, χαρτιών που διπλώνουν και διαφανών χαρτιών αντιγραφής. Θα πρέπει όμως η γνώση των μαθητών για τους μετασχηματισμούς να γίνει πιο συστηματική και να μπορούν να ερευνήσουν τα αποτελέσματα τους και να τα περιγράφουν με μαθηματικούς όρους. Ωστόσο χάριν της οικοδομικής χρησιμότητάς της, και όχι μόνο, η γεωμετρική «πλακόστρωση», τόσο στο επίπεδο όσο και στον χώρο, έχει απασχολήσει τα μεγαλύτερα πνεύματα από την αρχαιότητα μέχρι και τη σύγχρονη εποχή. Τις πλακοστρώσεις τις διακρίνουμε καταρχήν στις ακόλουθες δύο κατηγορίες: 1) Απλές: είναι οι πλακοστρώσεις, όπου χρησιμοποιούμε μόνο ένα πολύγωνο και αντίγραφά του και 2) Μικτές: είναι οι πλακοστρώσεις που παράγονται από περισσότερα από ένα είδους κυρτών πολυγώνων, παρουσιάζουν μεγαλύτερη ποικιλία μορφών από τις απλές και έχουν προτιμηθεί ανά τους αιώνες στις διακοσμήσεις κτιρίων. Ωστόσο υπάρχει ένας ακόμη διαχωρισμός των πλακοστρώσεων σε περιοδικές και μη περιοδικές. Περιοδικές λέγονται οι πλακοστρώσεις που επαναλαμβάνονται. Μπορούν δηλαδή να μετακινηθούν κατάλληλα και να ταυτιστούν με την αρχική τους θέση. Έτσι μία πλακόστρωση τετραγώνων, ενωμένων πλευρά με πλευρά είναι περιοδική, αφού αν την μετακινήσουμε κατά μία πλευρά δεξιά ή αριστερά η εικόνα της δεν θα αλλάξει. Τα σημεία της που ήταν κόμβοι, θα παραμείνουν κόμβοι και στη νέα πλακόστρωση. Μη περιοδικές λέγονται οι πλακοστρώσεις που δεν είναι περιοδικές. Όσο δηλαδή και να τις μετατοπίζουμε δεν μπορούν να επανέλθουν στην αρχική τους θέση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μη περιοδικών πλακοστρώσεων είναι οι πλακοστρώσεις PENROSE. Τελικά για τη Γεωμετρία η έννοια της επικάλυψης ή επίστρωσης επιπέδου σημαίνει ότι τα σχήματα που θα τοποθετηθούν το ένα πλάι στο άλλο για να καλύψουν το επίπεδο δεν θα πρέπει να αφήνουν κενά μεταξύ τους ούτε να επικαλύπτουν το ένα το άλλο και τα μόνα κανονικά πολύγωνα που μπορούν να καλύψουν ένα επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις μεταξύ τους είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο.



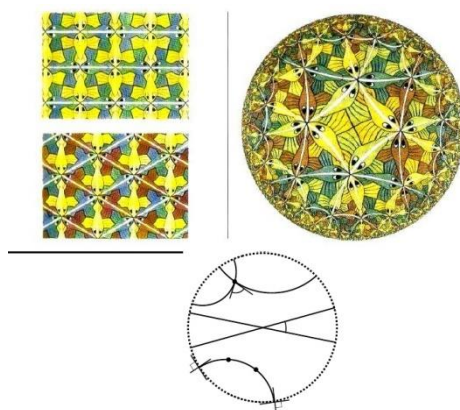
### Η Γεωμετρία στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Η Ε. Κολέζα (2000) γράφει πως η μελέτη της Γεωμετρίας είναι απαραίτητη γιατί εμπεριέχει τριών ειδών γνωστικές διαδικασίες: α) της οπτικοποίησης για την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, την επεξήγηση μιας πρότασης, τη συστηματική διερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης, ή για μια υποκειμενική επαλήθευση και τον έλεγχο κάποιων υποθέσεων, β) της κατασκευής με συγκεκριμένα εργαλεία και υπό συγκεκριμένες συνθήκες, γ) του συλλογισμού. Από την άλλη μεριά επίσης η Γεωμετρία γενικότερα ενέχει από τη φύση της παιδευτικό δυναμικό σε κατευθύνσεις που δύσκολα μπορεί να υπηρετήσει με συγκεκριμένη επάρκεια άλλο διδακτικό αντικείμενο στην προπανεπιστημιακή εκπαίδευση. Μια από τις κατευθύνσεις αυτές είναι η άσκηση των «εσωτερικών μηχανισμών» των μαθητών στις «ολιστικές συλλογιστικές διαδικασίες» δηλαδή σε συλλογισμούς που δεν στηρίζονται σε «στοιχειώδεις έννοιες» όπως «γωνίες» και «ευθείες» αλλά σε «έννοιες με όγκο» δηλαδή σε σύνθετα σχήματα τα οποία προσιδιάζουν σε «δομικά» στοιχεία της καλλιτεχνικής δημιουργίας. Οι Κ. Τζανάκης και Μ. Κούρκουλος (2000), υποστηρίζουν πως μέσω της μελέτης της Γεωμετρίας επιτυγχάνονται οι γενικοί σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών οι οποίοι διακρίνονται σε ελάχιστους και μέγιστους. Ο ελάχιστος σκοπός είναι η παροχή πρακτικών γνώσεων, χρήσιμων σε όλους στην καθημερινή ζωή, όπως αρίθμηση, εκτέλεση πράξεων, σωστή αντίληψη γεωμετρικών σχέσεων και των βασικών ιδιοτήτων τους (περίμετρος, εμβαδόν, όγκος, κ.λπ.). Ο μέγιστος σκοπός είναι η παροχή μαθηματικής παιδείας, δηλαδή η ανάπτυξη του ενδιαφέροντος για την επίλυση προβλημάτων, η ανάπτυξη της δυνατότητας εκτίμησης μεγεθών, η δημιουργία της ικανότητας σύλληψης, διατύπωσης και εμπειρικής επαλήθευσης εικασιών, η μέριμνα για νοητική αιτιολόγηση εικασιών, η ανάπτυξη της ικανότητας άρθρωσης και ελέγχου συλλογισμών, η δημιουργία της ικανότητας ορθολογικής οργάνωσης και ακριβούς διατύπωσης της σκέψης και η ανάπτυξη της ικανότητας μοντελοποίησης καταστάσεων. Πέρασαν ωστόσο πολλά χρόνια από τότε που η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν ένα κατ' εξοχή παιδευτικό μάθημα του νου των νέων παιδιών. Τώρα, εποχή εκπτώσεων πολλών αξιών της ζωής, υπάρχουν άνθρωποι που αγωνίζονται με πείσμα να επαναφέρουν την Ευκλείδεια και να δείξουν στους μαθητές τη Γεωμετρία ως ένα ανθρώπινο μέσο της καθημερινής ζωής.

### **Σύντομη αναφορά στο έργο του M. C. ESCHER**

Ωστόσο τον Escher, το έργο που τον έκανε πασίγνωστο, στο οποίο και υπερέχει η καθαρή γεωμετρία, ήταν η συστηματική διαίρεση του επιπέδου και οι περίφημες πλακοστρώσεις του. Κύριο στοιχείο της τέχνης του Escher για το οποίο είναι βέβαια περισσότερο γνωστός σήμερα είναι οι εικαστικές ταχυδακτυλουργίες του, η απεικόνιση «αδύνατων» παραδοξολογικών κατασκευών και γραφικών παραστάσεων που δημιουργούν την ψευδαίσθηση του απείρου. Στα έργα του επρόκειτο για έναν συνδυασμό γεωμετρικών χαράξεων που συνέθεταν μία παράδοξη πραγματικότητα. Εικόνες με μια φαινομενικά άψογη προοπτική ή αξονομετρία, συνδυασμένες κατά αφύσικο τρόπο, απεικονίζουν ένα κόσμο όπου δεν ισχύουν οι γνωστοί νόμοι της φύσης, όπως ο νόμος της βαρύτητας και όπου το κοίλο ή το κυρτό, το επάνω και το κάτω, το μέσα και το έξω, χάνουν το νόημα τους. Κάτι που ίσως δεν είναι ευρύτερα γνωστό είναι η επιρροή που δέχτηκε ο Escher στον τομέα αυτό από την επαφή του με την ισλαμική τέχνη της ψηφίδωσης (tessellation) ύστερα από επίσκεψή του στην Alhambra της Νότιας Ισπανίας. Αυτή η τεχνοτροπία μεταμορφώθηκε από τον Escher σε μια σειρά ξυλόγλυπτα, από το 1936 και ύστερα, τα οποία ο ίδιος δημοσίευσε το 1958 στο βιβλίο του "The Regular Division of the Plane". Αντλώντας έμπνευση ο Escher από την αίσθηση συμμετρίας και τη γεωμετρική τελειότητα που χαρακτηρίζει τα ισλαμικά περίτεχνα διακοσμητικά σχέδια με τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα, θα

εισάγει και στα δικά του σχέδια, σύμβολα με ευθείς αναφορές στον φυσικό κόσμο (ανθρώπινες φιγούρες, ερπετά, κτλ.), σε μια προσπάθεια να δώσει περισσότερο νόημα στα αφηρημένα γεωμετρικά. Ασχολείται και με την κρυσταλλογραφία και τα χρόνια που ακολουθούν γεμίζει τετράδια επί τετραδίων με ασκήσεις και σχέδια, δουλεύοντας πάνω σε μια δικιά του «ερασιτεχνική» θεωρία περί κανονικής διαίρεσης του επιπέδου. Στη γραφική του τέχνη, απεικόνιζε μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, των μορφών και του χώρου. Επιπλέον, εξερεύνησε την αλληλοσύνδεση των μορφών χρησιμοποιώντας άσπρο και μαύρο χρώμα, για να τονίσει τις διαφορετικές διαστάσεις. Άλλωστε τα σκίτσα του Escher αποδίδουν εύστοχα το πώς μπορεί κανείς να ακροβατεί ανάμεσα σε συστήματα με διαφορετικό αριθμό διαστάσεων. Στα έργα του είχε επίσης συμπεριλάβει κατοπτρικά είδωλα από κώνους, σφαίρες, κύβους, δακτύλιους και έλικες. Η μαθηματική επιρροή στα έργα του προέκυψε γύρω στο 1936, όταν ταξίδεψε στη Μεσόγειο. Άρχισε να ενδιαφέρεται για την τάξη και τη συμμετρία. Οι πρώτες ενδεδειγμένες μελέτες στα μαθηματικά, που αργότερα τα ενσωμάτωσε σε έργα τέχνης του, ξεκίνησαν με τη δημοσιευμένη ακαδημαϊκή μελέτη του Τζόρτζ Πόλυα, πάνω σε ομάδες συμμετρίας του επιπέδου,. Αυτή η δημοσίευση τον ενέπνευσε να κατανοήσει την έννοια των 17 ομάδων συμμετρίας επιπέδου κι έτσι δημιούργησε περιοδικές επικαλύψεις με 43 χρωματιστά σχέδια διαφόρων τύπων συμμετρίας, ενώ ανέπτυξε και μια μαθηματική προσέγγιση στην έκφραση της συμμετρίας στα έργα τέχνης του. Γύρω στο 1956, ο Έσερ εξερεύνησε την ιδέα της απεικόνισης του άπειρου σε ένα δισδιάστατο πεδίο και μελέτησε τοπολογία καθώς και πρόσθετες έννοιες στα μαθηματικά από το Βρετανό μαθηματικό Ρότζερ Πένροουζ. Το 1937 τύπωσε το "*Μεταμόρφωση Ι*", που ήταν η αρχή από μία σειρά έργων που διηγούνταν μία ιστορία χρησιμοποιώντας εικόνες αφού μετέτρεπε ένα κυρτό πολύγωνο σε κανονικό σχέδιο στο επίπεδο, και ήταν αυτά που επέδειξαν το αποκορύφωμα της ικανότητας του να ενσωματώνει



τα μαθηματικά σε τέχνη. Έπειτα από πολύχρονη και επίπονη μελέτη, είχε καταφέρει τελικά να απεικονίσει τόσο αριστοτεχνικά το άπειρο και την αιωνιότητα στο πλούσιο έργο του.

## Περιγραφή της δράσης

Με δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας στο πλαίσιο της προετοιμασίας της 6<sup>ης</sup> ΕΚΘΕΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ την προηγούμενη σχολική χρονιά οι μαθητές άρχισαν να επισημαίνουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα που απαιτούνται για να προσδιορίσουν έναν μετασχηματισμό (transformation), όπως για να μετασχηματίσουν ένα γεωμετρικό σχήμα χρησιμοποιώντας περιστροφή (rotation), ήξεραν πια πως έπρεπε να καθορίσουν το κέντρο περιστροφής, την κατεύθυνση περιστροφής και τη γωνία περιστροφής. Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί δηλαδή οι «1-1» και «επί» απεικονίσεις του εκάστοτε θεωρούμενου γεωμετρικού επιπέδου αλληλεπιδρούσαν πάντα, έστω και έμμεσα, κατά ουσιαστικό τρόπο με την Τέχνη, την Τεχνική και την Επιστήμη. Οι μαθητές του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού Αττικής την προηγούμενη σχολική χρονιά καθοδηγήθηκαν στο να δημιουργήσουν κι αυτοί πλακοστρώσεις (tessellations). Η αρχή έγινε με τη δημιουργία μωσαϊκών χρησιμοποιώντας το τετράγωνο και την τεχνική της συμμετρίας με ολίσθηση και όχι μόνο, καθώς και με τη χρήση ισόπλευρου τριγώνου και εξαγώνου στη συνέχεια. Το πρόβλημα λοιπόν στις πλακοστρώσεις είναι να «γεμίσουμε» το επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις, με τα πλακάκια – κομματάκια που μας δίνονται και αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Οι μαθητές αξιοποίησαν βασικές γεωμετρικές γνώσεις που ήδη είχαν για επίπεδα σχήματα και τις ιδιότητες τους καθώς και βασικές γνώσεις τους στη συμμετρία που χρειάστηκε να τις επανακτήσουν με επανάληψη της σχετικής θεωρίας καθώς και με επίμονη εξάσκηση στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Ωστόσο μέσω των γεωμετρικών μετασχηματισμών των οποίων η αξία και σημασία στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ευρύτατα αναγνωρισμένη από τη μαθηματική κοινότητα, επεδίωξε η διδάσκουσα να αποκτήσουν οι μαθητές ευελιξία στον τρόπο της γεωμετρικής τους σκέψης και να τους χρησιμοποιούν ως εργαλείο για τη μελέτη και αιτιολόγηση των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Η διδάσκουσα με την ύπαρξη εκπαιδευτικών λογισμικών είχε τη δυνατότητα να καθοδηγήσει τους μαθητές στη μελέτη των μετασχηματισμών με απλούστερο και πιο κατανοητό έτσι τρόπο. Συχνά στην καθομιλουμένη γλώσσα οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί περιγράφονται ως διαδικασίες που όταν εφαρμοστούν σε ένα γεωμετρικό σχήμα, μπορούν να αλλάξουν τη θέση του στο επίπεδο ή και μερικές ιδιότητές του, ενώ αλλιώς μπορεί κανείς να τις εννοήσει ως απεικονίσεις των σημείων ενός αρχικού σχήματος σε ένα δεύτερο. Εμείς ενδιαφερθήκαμε για εκείνη την κατηγορία που αφορά τους «ευκλείδειους» μετασχηματισμούς που ήταν δυνατό να ενταχθούν σε μια διδασκαλία ως εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης των διδασκόμενων αντικειμένων. Έτσι λοιπόν αναφερθήκαμε μόνο στους : α) ανάκλαση (συμμετρία) ως προς σημείο και ευθεία, β) μεταφορά κατά διάνυσμα και γ) στροφή ως προς σημείο κατά γωνία. Αυτοί διατηρούν το μήκος και το μέτρο της γωνίας, ώστε να μη μεταβάλλεται η μορφή ενός γεωμετρικού αντικειμένου. Αλλάζουν μόνο η θέση και ο προσανατολισμός των αντικειμένων. Οι μετασχηματισμοί με τους οποίους ασχολήθηκαν οι μαθητές ήταν εκείνοι στους οποίους δεν αλλάζουν μορφή τα σχήματα και τους ήταν τελικά χρήσιμοι στο να σχεδιάσουν και τις δικές τους πλακοστρώσεις. Επίσης η μελέτη της συμμετρίας διεύρυνε και αυτή το γνωστικό πεδίο των μαθητών στα Μαθηματικά, στην Τέχνη και την Αισθητική. Το ετήσιο πλάνο για την προετοιμασία της 6<sup>ης</sup> ΕΚΘΕΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ που ακολούθησε η διδάσκουσα ήταν ως εξής :

1<sup>ος</sup> ΜΗΝΑΣ: προσπάθεια για την επίτευξη της σύνδεσης του συγκεκριμένου με το αφηρημένο στάδιο σκέψης και να οδηγηθούν έτσι οι μαθητές στο να κατανοήσουν καλύτερα.

2<sup>ος</sup> ΜΗΝΑΣ: Συζήτηση για την επιλογή υλικών και τεχνικών ώστε να προχωρήσουν οι μαθητές στα σχέδια και τις κατασκευές τους.

3<sup>ος</sup> ΜΗΝΑΣ: Στις συναντήσεις με τις ομάδες των μαθητών να γίνει πειραματισμός με τη χρήση εναλλακτικών υλικών και να ληφθούν συλλογικά οι τελικές αποφάσεις και επιλογές.

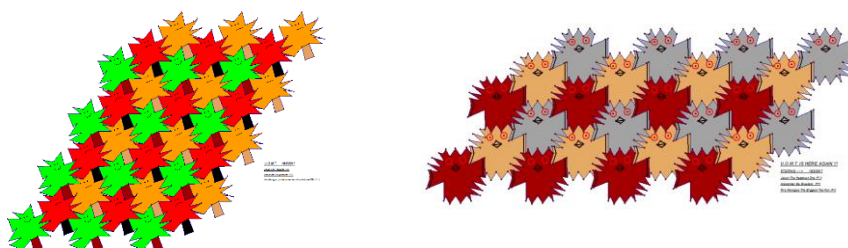
4<sup>ος</sup> ΜΗΝΑΣ: να γίνουν τα γεωμετρικά σχέδια επί χάρτου, να σχεδιαστούν και να διακοσμηθούν σε άλλα υλικά όπως χαρτόνι, ξύλο, πλαστικό και στη συνέχεια να συναρμολογηθούν καταλλήλως.

5<sup>ος</sup> ΜΗΝΑΣ: να οργανωθεί για 6<sup>η</sup> σχολική χρονιά στο Μαθηματικό Εργαστήρι η τρίωρη παρουσίαση των κατασκευών–εκθεμάτων των μαθητών-δημιουργών καθώς και των πλακοστρώσεων τους που σχεδιάστηκαν και με τα γεωμετρικά όργανα σε χαρτόνι και στη συνέχεια και με χρήση ψαλιδιού αλλά και με τη βοήθεια του δυναμικού λογισμικού Γεωμετρίας Sketchpad.

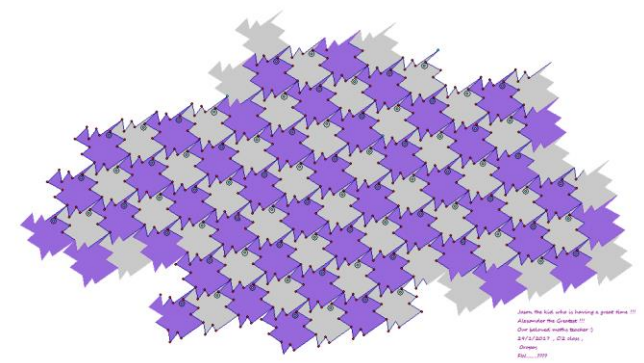
### Συμπεράσματα της δράσης

Στην τελευταία φάση της δράσης που έχει ολιστικό χαρακτήρα οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες κλήθηκαν όπως και τις προηγούμενες χρονιές να παρουσιάσουν αυτά για τα οποία εργάστηκαν αξιοποιώντας λογισμικά και το πέτυχαν. Αξιοποιήθηκαν οι δυνατότητες δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού και οι μαθητές ασκήθηκαν στη χρήση των εργαλείων του και των δυνατοτήτων που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες δημιουργώντας καλλιτεχνικές συνθέσεις και δίνοντας και διέξοδο στη δημιουργική τους φαντασία και το καλλιτεχνικό τους ένστικτο. Επιπλέον η δημιουργικότητα, η αποτελεσματικότητα και οι καλλιτεχνικές δεξιότητες των μαθητών αποτυπώθηκαν για μια ακόμη φορά σε πρωτότυπες κατασκευές και χειροτεχνίες. Και το κόψιμο ακόμα του χαρτιού από τους μαθητές μετά το σχεδιασμό, μπόρεσε να ενισχύσει για μια ακόμη φορά τη νοερή απεικόνιση (visualization) και τη χωροταξική λογική (spatial reasoning) για την επίλυση προβλημάτων και οι μαθητές έτσι έγιναν ακόμα ικανότεροι στην περιγραφή, στην αναπαράσταση και στο χειρισμό του περιβάλλοντός τους. Έτσι λοιπόν οι μαθητές μελέτησαν στη διάρκεια της προηγούμενης σχολικής χρονιάς 2016-2017 πως ο Escher, που αφού είχε συζητήσει διεξοδικά μαθηματικές λεπτομέρειες με έναν από τους μεγαλύτερους γεωμέτρους του 20<sup>ου</sup> αιώνα, τον Coxeter, είχε εντάξει σε σημαντικά έργα του τους μετασχηματισμούς της Ευκλείδειας και της Υπερβολικής Γεωμετρίας και επίσης είχε αξιοποιήσει και το “καρτεσιανό μοντέλο” για την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Επιπέδου και το “μοντέλο του (ανοικτού μοναδιαίου) δίσκου του Poincaré” για την Υπερβολική (Αθανάσιος Στράντζαλος, 2014). Για τα παιδιά η ομορφιά έρχεται πριν τη λογική και τις θεωρίες άρα η Γεωμετρία ως Τέχνη είναι μια πιο φυσική προσέγγιση για τη διδασκαλία του μαθήματος.

### Πλακοστρώσεις των μαθητών με το λογισμικό SKETCHPAD







### Πλακοστρώσεις των μαθητών με χειραπτικά υλικά



Ο διεθνής όρος «Γεωμετρία» που υπογραμμίζει το αυθεντικό Ελληνικό νόημα «γη» και «μετρείν», προσφέρει στους μαθητές μια πτυχή της μαθηματικής σκέψης που είναι διαφορετική από τον κόσμο των αριθμών, αλλά συνδέεται με αυτόν. Καθώς οι μαθητές γίνονται οικείοι με τη μορφή-σχήμα, με τις δομές, τις θέσεις, τους μετασχηματισμούς και καθώς αναπτύσσουν τη χωροταξική λογική, θέτουν τα θεμέλια για την κατανόηση

όχι μόνο του χώρου που τους περιβάλλει αλλά και άλλων θεματικών περιοχών στα Μαθηματικά και την Τέχνη, την Επιστήμη και τις Κοινωνικές Σπουδές. Οι ικανότητες μερικών μαθητών με τις γεωμετρικές και χωροταξικές έννοιες υπερβαίνουν τις ικανότητες που έχουν με τους αριθμούς. Η ύπαρξη γεωμετρικών ικανοτήτων καλλιεργεί την αγάπη για τα Μαθηματικά και παρέχει ένα πλαίσιο ανάπτυξης του αριθμού, καθώς και άλλων μαθηματικών εννοιών (Razel,&Eylon, 1991). Η διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών είναι ένα πολύπλοκο έργο σε όλες τις ηλικίες και συνθήκες εκπαίδευσης, με διακριτούς στόχους και μεθοδολογικές ιδιαιτερότητες ανάμεσα στην προσχολική, στην πρωτοβάθμια, στη δευτεροβάθμια και στην τεχνική εκπαίδευση. Οι μαθητές στη διάρκεια της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας και μάθησης, συζήτησαν, ανέλυσαν, διετύπωσαν απορίες, και επίλυσαν προβλήματα αφού επετεύχθη η εμπέδωση και συστηματική μελέτη των πρωταρχικών εννοιών: σημείο, ευθεία, επίπεδο καθώς και των βασικών γεωμετρικών σχημάτων:



ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα επίσης τα είδη συμμετρίας. Το Μαθηματικό Εργαστήρι με τη λειτουργία του τα έξι τελευταία χρόνια στο 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού Αττικής έχει οδηγήσει τη μαθητική κοινότητα στο να πειστεί πως τα Μαθηματικά είναι μια άλλη γλώσσα που αν ακούσουμε προσεκτικά, θα δούμε ότι όλα γύρω μας τη μιλάνε. Για έκτη χρονιά συνεχίσαμε να βλέπουμε τα ελπιδοφόρα αποτελέσματα με το να δοθεί και τη σχολική χρονιά 2017-2018 , έμφαση στην επίδραση των Μαθηματικών σε εκφάνσεις της κοινωνικής ζωής του ανθρώπου όπως οι Τέχνες.

### **Ενδεικτική ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:**

1. Τζανάκης, Κ., & Κούρκουλος, Μ. (2000). Η παροχή μαθηματικής Παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τ.111, 66-73.
2. Αθανάσιος Στράντζαλος, (2014). Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο λύκειο ως διδακτικό αντικείμενο παροχής στοιχείων παιδείας με προεκτάσεις προς τον πολιτισμό, στο «*Θέματα Μαθηματικής Εκπαίδευσης και Επιμόρφωσης* », Τόμος 2ος, εκδ. ΒΙΒΛΙΟΤΡΟΠΙΑ, Αθήνα, 2014, σελ. 43-64.
3. Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Αθήνα: Leader Books, 257-259.
4. (Razel, M., & Eylon, B. (1991). *Developing Mathematics Readiness in Young Children with the Agam Program*. Paper presented at the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Genoa,