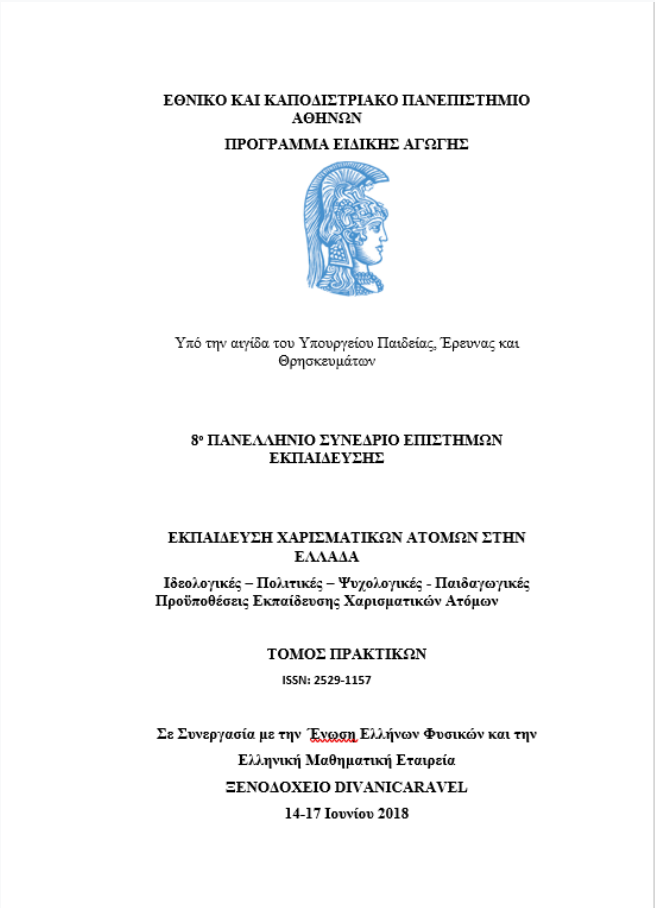
ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 8 (2018)

8ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

Υπό την αιγίδα του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων

8ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΧΑΡΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Ιδεολογικές – Πολιτικές – Ψυχολογικές - Παιδαγωγικές Προϋποθέσεις Εκπαίδευσης Χαρισματικών Ατόμων

ΤΟΜΟΣ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ

ISSN: 2529-1157

Σε Συνεργασία με την Ένωση Ελλήνων Φυσικών και την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΞΕΝΟΔΟΧΕΙΟ DIVANICARAVEL

14-17 Ιουνίου 2018

Διερεύνηση μαθηματικών δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη διαχείριση κλασματικών αριθμών μαθητών Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού με δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση

Ελένη Καντεμνίδη

doi: 10.12681/edusc.2682

Βιβλιογραφική αναφορά:

Καντεμνίδη Ε. (2020). Διερεύνηση μαθηματικών δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη διαχείριση κλασματικών αριθμών μαθητών Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού με δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, *8*, 335–347. https://doi.org/10.12681/edusc.2682

Διερεύνηση μαθηματικών δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη διαχείριση κλασματικών αριθμών μαθητών Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού με δυσκολίες στα μαθηματικά και την ανάγνωση

Ελένη Καντεμνίδη

M.Ed., Εκπαιδευτικός Α΄/βάθμιας Εκπαίδευσης

elena_k1992@hotmail.com

Περίληψη

Οι μέχρι σήμερα έρευνες που αφορούν στις δυσκολίες στα κλάσματα δεν έχουν εστιάσει στις δεξιότητες που απαιτούνται για τη διαχείριση αυτών, ούτε στις δεξιότητες που συνδέονται με τα δυο είδη γνώσης των κλασμάτων: την εννοιολογική και τη διαδικαστική. Στόχος της παρούσας μελέτης αποτελεί η ανάδειξη των μαθηματικών δεξιοτήτων που απαιτούνται για τη διαχείριση κλασματικών αριθμών μαθητών Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού, καθώς και η διερεύνηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης των κλασμάτων μαθητών με ή χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά ή την ανάγνωση. Για τους σκοπούς της έρευνας χρησιμοποιήθηκε το Τεστ ΜαθΠρο το οποίο αξιολογεί μαθηματικές δεξιότητες στους τομείς: επίγνωσης αριθμού, μνήμης, οπτικο-χωρικός και συλλογιστικής, ένα τεστ κλασμάτων που αξιολογεί την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση, ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης της επίδοσης στα μαθηματικά και την ανάγνωση από το δάσκαλο της τάξης και ένα τεστ αναγνωστικής ευχέρειας. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως οι μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά ή την ανάγνωση σημείωσαν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερη επίδοση στα κλάσματα συνολικά, αλλά και επιμέρους στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των κλασμάτων. Οι δεξιότητες που φαίνεται να προβλέπουν την επίδοση στα κλάσματα σχετίζονται με μαθηματικές δεξιότητες στους τομείς επίγνωσης αριθμού, μνήμης και συλλογιστικής.

Λέξεις-Κλειδιά: μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά; Δεξιότητες; Κλάσματα; εννοιολογική γνώση; διαδικαστική γνώση; αναγνωστική ικανότητα

Abstract

Most resent research on difficulties with fractions has not focused on the skills required to manage them and what are the skills connected to conceptual and procedural knowledge of the fractions. The aim of this study is to highlight the basic mathematical skills required to manage the fractional numbers of primary school pupils on 5th and 6th grade, as well as to explore the conceptual and procedural knowledge of students with or without difficulties in mathematics or reading. For the purposes of the research, the MathPro Test has been used to evaluate mathematical skills in the areas of number awareness, memory, visual-spatial and reasoning, a fractional test that evaluates conceptual and procedural knowledge, a questionnaire in which the mathematical and reading performance of students is evaluated by the class teacher and a test that evaluates the ability of reading. The results showed that students with math or reading difficulties had statistically significantly lower performance in the fractions as a whole,

but also, partial in the procedural and conceptual knowledge of fractions. Skills that seem to predict fractional performance are related to mathematical skills in the areas of number awareness, memory and reasoning.

Keywords: learning difficulties in mathematics; Skills; Fractions; conceptual knowledge; procedural knowledge; reading ability

Υποθέσεις Προέλευσης Δυσκολιών στα Μαθηματικά

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα σύνθετο γνωστικό αντικείμενο (Hecht, Vagi, & Torgesen, 2007), μιας και περιλαμβάνουν πολλούς και διαφορετικούς τομείς. Σαν αποτέλεσμα, για την εκμάθηση τους απαιτούνται πολλές δεξιότητες, όπως είναι αυτές που σχετίζονται με την κατανόηση της έννοιας της ποσότητας, την αποκωδικοποίηση των συμβόλων, τη μνήμη, την οπτικοχωρική ικανότητα και τη συλλογιστική (Karagiannakis, Baccaglini-Frank, & Papadatos, 2014).

Παρόλο που έχουν αναπτυχθεί πολλά μοντέλα που προσπαθούν να εξηγήσουν τα πιθανά ελλείμματα που οδηγούν σε δυσκολίες στα μαθηματικά, εξ' όσων είναι γνωστών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κανένα ενιαίο πλαίσιο ή μοντέλο για μια ολοκληρωμένη και λεπτή ερμηνεία των μαθηματικών δυσκολιών, όχι μόνο για επιστημονικούς σκοπούς, αλλά και για την ενημέρωση των δασκάλων (Karagiannakis et al., 2014). Στη βιβλιογραφία οι υποθέσεις προέλευσης των δυσκολιών στα μαθηματικά στρέφονται σε δυο κατευθύνσεις: σε αυτές που θεωρούν ότι οι μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (ΜΔΜ) είναι έλλειμμα ειδικού γνωστικού τομέα στην επεξεργασία αριθμών και σε αυτές που θεωρούν ότι είναι γενικού γνωστικού τομέα.

Αναφορικά με τη πρώτη κατεύθυνση, οι επιστήμονες προσπαθούν να εξηγήσουν τις δυσκολίες στα μαθηματικά ως αποτέλεσμα ελλείμμάτων σε συγκεκριμένους τομείς όπως είναι αυτός της επίγνωσης αριθμού, δηλαδή ο τομέας που σχετίζεται με την επεξεργασία του αριθμού (Andersson & Ostergren, 2012· Karagiannakis et al., 2014).

Οι Geary & Hoard (2005) ερμήνευαν τις δυσκολίες στα μαθηματικά ως αποτέλεσμα ελλειμμάτων στη λεκτική μνήμη εργασίας, στην εννοιολογική γνώση, στη σημασιολογική μνήμη ή στη χωροταξική ικανότητα των ατόμων.

Άλλοι επιστήμονες έδιναν έμφαση στο ρόλο που παίζει η μνήμη εργασίας και οι εκτελεστικές λειτουργίες στις δυσκολίες στα μαθηματικά. Φάνηκε ότι λειτουργίες όπως η αναχαίτηση, η μετατόπιση και η συνεχής ενημέρωση της μνήμης εργασίας με τις νέες πληροφορίες που εισάγονται στο γνωστικό σύστημα είναι πολύ σημαντικές και σχετίζονται με τη μαθηματική επιτυχία (Bull & Lee, 2014· Cragg & Gilmore, 2014).

Από την άλλη, όμως, όπως αναφέρθηκε υπάρχει και η υπόθεση του γενικευμένου γνωστικού ελλείμματος. Αυτή λαμβάνει υπόψη της ταυτόχρονα πολλά βασικά γνωστικά συστήματα και εξετάζει το ρόλο που παίζουν στη μαθηματική επίδοση. Τέτοια είναι η μνήμη εργασίας, οι εκτελεστικές λειτουργίες, η σημασιολογική μνήμη, η ανάκληση γεγονότων και κατ' επέκταση ο υπολογισμός και η ευχέρεια. Από στοιχεία προκύπτει ότι αυτά τα γνωστικά συστήματα και οι λειτουργίες που καλύπτουν είναι που εμπλέκονται στη μαθηματική επίδοση παιδιών και ενηλίκων (Karagiannakis et al., 2014).

Εκεί υπάγεται και το τετραπλό μοντέλο ταξινόμησης των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά που υιοθετήθηκε στη συγκεκριμένη μελέτη το οποίο λάμβανε υπόψη του όλες τις υποθέσεις προέλευσης των ΜΔΜ. Αυτό βασίζεται σε τέσσερις βασικούς γνωστικούς τομείς στους οποίους ίσως παρουσιάζονται γνωστικά ελλείμματα που να οδηγούν σε δυσκολίες στα μαθηματικά. Οι τομείς αυτοί είναι: 1.

επίγνωσης αριθμού, 2. οπτικο-χωρικός, 3. μνήμης και 4. συλλογιστικής (Karagiannakis et al., 2014). Όταν παρουσιαστούν ελλείμματα σε κάποιους από αυτούς τους τομείς το παιδί οδηγείται σε μαθηματικές δυσκολίες, ενώ όταν είναι πολύ καλό και έχει ισχυρά τα επιμέρους συστήματα που σχετίζονται με αυτούς τους τομείς σημαίνει πως έχει τις κατάλληλες μαθηματικές δεξιότητες.

Δυσκολίες στα Κλάσματα: Σύγχρονα Αποτελέσματα

Τα κλάσματα είναι ένα από τα πιο απαιτητικά ζητήματα που καλούνται να πραγματευθούν οι μαθητές και αδιαμφισβήτητα το πιο δύσκολο θέμα για διδασκαλία που έχουν να αντιμετωπίσουν οι δάσκαλοι (Lamon, 2007· Μαγκλάρα & Αργυρόπουλος, 2016).

Ερευνητικά δεδομένα αποδεικνύουν ότι μαθητές από όλο τον κόσμο έχουν δυσκολίες στο να μάθουν τα κλάσματα και μάλιστα σε πολλές χώρες ο μέσος όρος των μαθητών ποτέ δεν καταφέρνει να έχει μια στοιχειώδη γνώση των κλασματικών αριθμών (Fazio & Siegler, 2015). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί και από το γεγονός ότι σε ένα τεστ κλασμάτων που έγινε σε πολλά σχολεία της Αμερικής το 2004, στα πλαίσια της αξιολόγησης της εκπαιδευτικής προόδου σε μαθητές Β΄ Γυμνασίου, μόνο το 50% αυτών κατάφερε να βάλει στη σωστή σειρά τρία κλάσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Ακόμα, στην Κίνα και στην Ιαπωνία αν και καταφέρνουν να έχουν μια καλή εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων συνεχίζουν να τα θεωρούν δύσκολα (Fazio & Siegler, 2015· Tian & Siegler, 2016).

Επιπρόσθετα, άλλη έρευνα το 2008 παρουσίασε ότι μόνο το 59% των μαθητών της έκτης τάξης κατάφερε να βάλει στη σωστή σειρά δέκα κλάσματα (Mazzocco & Devlin, 2008). Άλλες έρευνες αποδεικνύουν ότι δυσκολίες στα κλάσματα δεν έχουν μόνο τα παιδιά αλλά και ενήλικες. Μελέτη έδειξε ότι το 77% του δείγματος 1643 φοιτητών απέτυχαν στην αναγνώριση του μεγαλύτερου από τέσσερα κλάσματα (Stigler, Givvin, & Thompson, 2010, ό.α. στο Tian & Siegler, 2017).

Όμως, αυτό το ζήτημα πρέπει να αντιμετωπιστεί καθώς σύμφωνα με τη βιβλιογραφία η επάρκεια στα κλάσματα μπορεί να προβλέψει τη μετέπειτα μαθηματική επιτυχία (Jayanthi, Gersten, Taylor, Smolkowski, & Dimino, 2017), αλλά και τη γενικότερη επιτυχία των παιδιών (Siegler, Fazio, Bailey, & Zhou, 2013· Tian & Siegler, 2016).

Εννοιολογική και Διαδικαστική Γνώση Κλασμάτων

Η διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, έχει τις ρίζες της στη Γνωστική Ψυχολογία, αλλά χρησιμοποιείται ευρέως και στο χώρο της μάθησης των μαθηματικών (Μπεμπένη, 2011). Οι Hecht & Vagi (2012) αναφέρουν ότι τα δυο αυτά διαφορετικά είδη γνώσεων είναι απαραίτητα για τη μαθηματική ικανότητα.

Αναφορικά με την εννοιολογική γνώση των κλασμάτων, πρόκειται για ένα είδος γνώσης που είναι αφηρημένο και αφορά την ουσία των μαθηματικών αρχών και τις σχέσεις μεταξύ τους (Hull & Miles, 2015· Khashan, 2014). Πρόκειται για ένα δίκτυο στο οποίο οι μαθηματικές έννοιες είναι το ίδιο σημαντικές με τις σχέσεις μεταξύ τους. Η εννοιολογική κατανόηση, επομένως, δεν επιτυγχάνεται με τη στείρα απομνημόνευση γνώσεων, κανόνων και αλγορίθμων, αλλά επιτυγχάνεται μέσω της πραγματικής κατανόησης ενός δεδομένου προβλήματος και της σχέσης του με ευρύτερες μαθηματικές έννοιες (Παπαθεοδώρου, 2016). Έχοντας λοιπόν εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων, υπάρχει η δυνατότητα να γίνονται διασυνδέσεις στη γνώση, να υπάρχει η αντίληψη των πολλών αναπαραστάσεων του κλάσματος, να

μπορεί να επιλεχθεί η κατάλληλη λύση για ένα πρόβλημα, να γίνονται συσχετίσεις και η τυπική γλώσσα να χρησιμοποιείται σε μια προσωπική βάση (Μπεμπένη, 2011).

Από την άλλη, η διαδικαστική γνώση των κλασμάτων αποτελείται από τα σύμβολα, τις συνθήκες και τις διαδικασίες που μπορούν να εφαρμοστούν ώστε να λυθεί μια μαθηματική άσκηση. Αναφέρεται μάλιστα, ότι η διαδικαστική γνώση έχει σημασία μόνο όταν σχετίζεται με ένα εννοιολογικό πλαίσιο (Khashan, 2014). Γενικά, η διαδικαστική γνώση μπορεί να οριστεί ως η εκτέλεση μιας καθορισμένης σειράς βημάτων που οδηγούν στην εκτέλεση συγκεκριμένων προβλημάτων. Αυτά τα βήματα ή οι διαδικασίες καλούνται αλγόριθμοι ή στρατηγικές. Η χρήση της διαδικαστικής γνώσης από τον μαθητή δεν απαιτεί κατανόηση, καθώς απλώς καλείται να εκτελέσει μια σειρά βημάτων (Παπαθεοδώρου, 2016).

Υποθέσεις Προέλευσης των Δυσκολιών στα Κλάσματα

Μιας και οι δυσκολίες στα κλάσματα είναι ένα ζήτημα που αφορά πολλούς μαθητές του Δημοτικού σχολείου, οι ερευνητές έχουν προσπαθήσει να εξηγήσουν από που πηγάζουν αυτές οι δυσκολίες.

Κάποιοι το αποδίδουν ως αποτέλεσμα του ότι τα κλάσματα πραγματεύονται πολλές έννοιες που δύσκολα γίνονται αντιληπτές από τους μαθητές όπως είναι οι εξής:μέρος-όλο, πηλίκο, μέτρο, αναλογία και τελεστής (Fronger, Tran & Elliott, 2015· Ορφανός, 2003).

Οι Siegler & Pyke (2013) εξηγούν τα λάθη στα κλάσματα ως αποτέλεσμα χρήσης λάθος στρατηγικών από τα παιδιά. Αυτές είναι η στρατηγική ενεξάρτητου ακεραίου αριθμού και η στρατηγική λανθασμένης εκτέλεσης πράξης στα κλάσματα. Κατά την πρώτη οι μαθητές εκτελούν τις πράξεις ξεχωριστά για τους αριθμητές και ξεχωριστά για τους παρονομαστές σε περιπτώσεις που δεν θα έπρεπε, όπως είναι στην πρόσθεση κλασμάτων. Κατά τη δεύτερη στρατηγική οι μαθητές έκαναν κάποιες λάθος πράξεις σε δοκιμασίες με κλάσματα, διότι γενίκευαν τον τρόπο με τον οποίο εκτελείται μια πράξη και τον εφάρμοζαν λανθασμένα σε μια άλλη.

Οι Fazio & Siegler (2015) αναφέρουν ότι πολλές φορές τα παιδιά κάνουν λάθη στα κλάσματα καθώς δυσκολεύονται να αντιληφθούν ότι πολλές ιδιότητες που είχαν μάθει ότι ίσχυαν για τους ακεραίους, δεν ισχύουν στην περίπτωση των κλασματικών αριθμών (Fazio & Siegler, 2015· Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015). Για παράδειγμα, κατά τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων δεν οδηγούμαστε πάντα σε ένα αποτέλεσμα μεγαλύτερο από τους παράγοντες (Prediger, 2008).

Ακόμα, σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, η τακτική των δασκάλων να τονίζουν ότι το κλάσμα είναι μέρος του όλου μπορεί να οδηγήσει σε σύγχυση τους μαθητές που καταλήγουν στο να μην αντιλαμβάνονται ότι και τα κλάσματα είναι αριθμοί με μεγέθη που μπορούν να αναπαρασταθούν σε αριθμογραμμή (Booth, Newton, & Twiss-Garrity, 2014) και γι' αυτό μπορούν να συγκριθούν ή να είναι ισοδύναμα. Μάλιστα, τα παιδιά που καταλαβαίνουν μόνο την προσέγγιση μέρους-όλου, συχνά κάνουν λάθη και δεν αντιλαμβάνονται τα καταχρηστικά κλάσματα, λέγοντας για παράδειγμα ότι τα 4/3 δεν είναι αριθμός επειδή σε ένα άτομο δεν μπορούν να δοθούν τέσσερα τμήματα από κάτι που είναι χωρισμένο σε τρία τμήματα. Ακόμα, πολλές φορές οδηγούνται σε λάθη κατά τη διαδικασία των πράξεων των κλασμάτων, όπως για παράδειγμα στην πρόσθεση όπου προσθέτουν αριθμητές και παρονομαστές και πάλι ο λόγος είναι επειδή δεν κατανοούν τα μεγέθη των κλασμάτων.

Δυσκολίες στην Ανάγνωση

Σύμφωνα με τους Παντελιάδου & Αντωνίου (2008), η αναγνωστική ευχέρεια είναι η ικανότητα ανάγνωσης των λέξεων με ακρίβεια, έκφραση και προσωδία. Το να μπορεί δηλαδή το άτομο να διαβάζει ένα κείμενο αυτόματα, γρήγορα και ομαλά χωρίς να καταβάλει προσπάθεια και έχοντας χαμηλή επικέντρωση προσοχής στην αποκωδικοποίηση.

Σύμφωνα με τη θεωρία της επεξεργασίας πληροφοριών, όταν εκτελείται μια σύνθετη εργασία πρέπει να υπάρξει συγχρονισμός πολλών εργασιών σε σύντομο χρονικό διάστημα (LaBerge & Samuels, 1974, στο Αντωνίου, 2008). Για να ολοκληρωθεί η εργασία επιτυχώς πρέπει οι διεργασίες αυτές να γίνονται αυτόματα και γρήγορα. Στην επιτυχή αναγνωστική κατανόηση των μαθητών συμβάλλει η ευχέρεια στην αποκωδικοποίηση κι όταν υπάρχει ευχέρεια οι μαθητές οδηγούνται και στη μείωση λαθών αποκωδικοποίησης. Για το λόγο αυτό, η ευχέρεια αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό της αναγνωστικής διαδικασίας και αποτελεί την πρώτη ένδειξη για την ύπαρξη αναγνωστικών δυσκολιών. Ιδιαίτερα για τις τάξεις του Δημοτικού (από τις οποίες προέρχονται και οι συμμετέχοντες της παρούσας έρευνας), όπου παρουσιάζεται η μεγαλύτερη επίδοση στην εξέλιξη της αναγνωστικής ευχέρειας, φαίνεται πως υπάρχει υψηλότερη συσχέτιση μεταξύ της ευχέρειας και της αποκωδικοποίησης (Αντωνίου, 2008).

Γι' αυτό τον λόγο ένα από τα τεστ που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη έρευνα εξέταζε κατά πόσον οι μαθητές είχαν ευχέρεια στην ανάγνωση.

Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα

Δεδομένων των ερευνητικών κενών που υπάρχουν ως προς τις δεξιότητες που απαιτούνται για τη διαχείριση κλασματικών αριθμών, ο σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας ήταν να αναδείξει ποιες είναι αυτές οι δεξιότητες σε μαθητές Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού που φοιτούν σε σχολεία της Αττικής.

Τα ερευνητικά ερωτήματα της μελέτης ήταν:

- Διαφοροποιείται η επίδοση στα κλάσματα μεταξύ των παιδιών με και χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά, ολικά, εννοιολογικά και διαδικαστικά; Αν ναι, με ποιον τρόπο;
- Ποιες μαθηματικές δεξιότητες προβλέπουν την επίδοση στα κλάσματα σε παιδιά με και χωρίς δυσκολίες στα κλάσματα; Ποιες μαθηματικές δεξιότητες προβλέπουν την επίδοση στην εννοιολογική και ποιες στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων;
- Διαφοροποιείται η επίδοση στα κλάσματα μεταξύ των παιδιών με χαμηλή και καλή αναγνωστική ευχέρεια, ολικά, εννοιολογικά και διαδικαστικά; Αν ναι, με ποιον τρόπο;

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στη συγκεκριμένη μελέτη πήραν μέρος 156 μαθητές (80 κορίτσια και 76 αγόρια) που φοιτούσαν στην πέμπτη και έκτη Δημοτικού σε γενικά Δημόσια Δημοτικά σχολεία του νομού Αττικής το σχολικό έτος 2017-2018. Συγκεκριμένα, από τα 156 παιδιά τα 76 φοιτούσαν στην πέμπτη δημοτικού και τα 80 στην έκτη. Τα παιδιά ήταν χρονολογικής ηλικίας εύρους 9,91-12,25 ετών.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Τεστ Μαθηματικού Προφίλ & Δυσαριθμησίας (Τεστ ΜαθΠρο). Το συγκεκριμένο εργαλείο αναπτύχθηκε από τους τους Karagiannakis et al. (2014), σε μια προσπάθεια δημιουργίας ενός εργαλείου που ταυτοποιεί τα κεντρικά χαρακτηριστικά ατόμων με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά. Ήταν ένα διαδικτυακό εργαλείο σε υπολογιστή και περιλάμβανε 19 δραστηριότητες μέσω των οποίων προέκυπταν τα μαθηματικά προφίλ των παιδιών και φαινόταν αν έχουν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά ή δυσαριθμησία. Οι δραστηριότητες μέτραγαν τις δεξιότητες στους τομείς της επίγνωσης αριθμού, μνήμης, οπτικο-χωρικής ικανότητας και συλλογιστικής. Οι μαθητές έδιναν τις απαντήσεις τους μόνοι τους, μέσω ποντικιού σε υπολογιστή και άκουγαν τις οδηγίες μέσω ακουστικών. Άκουγαν παραδείγματα και μπορούσαν να κάνουν δοκιμές πριν ξεκινήσει η κανονική δραστηριότητα. Το Τεστ ΜαθΠρο δεν είναι ένα απλό διαγνωστικό εργαλείο, αλλά κάτι περισσότερο, αφού παρουσιάζει τόσο τα δυνατά όσο και τα αδύναμα σημεία κάθε παιδιού στα μαθηματικά και δίνει τη δυνατότητα να επιλεχθεί η κατάλληλη παρέμβαση για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά.

Χειρόγραφο Τεστ Κλασμάτων. Μέσω αυτού του τεστ αξιολογήθηκε η γνώση των παιδιών στα κλάσματα τόσο ολικά όσο και επιμέρους ως προς τα δυο είδη γνώσης της εννοιολογικής και της διαδικαστικής. Οι ασκήσεις του ήταν δομημένες πάνω σε επτά υποενότητες (μια άσκηση για κάθε υποενότητα), από τις οποίες οι τρεις αξιολογούσαν την εννοιολογική γνώση των παιδιών και οι υπόλοιπες τέσσερις τη διαδικαστική γνώση.

Η προαναφερθείσα επιλογή των υποενοτήτων, καθεμία από τις οποίες μελετά έναν τύπο γνώσης, αλλά και ο τρόπος βαθμολόγησης του τεστ έγιναν σύμφωνα με το εργαλείο της έρευνας του Dr. Khashan (2014).

Ερωτηματολόγιο προς Δασκάλους. Στους δασκάλους δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε τα ονόματα των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα και τους ζητούνταν να χαρακτηρίσουν την επίδοση των παιδιών στα μαθηματικά και την ανάγνωση ως πολύ καλή, καλή, μέτρια, χαμηλή και πολύ χαμηλή ανάλογα με την πορεία τους στην τάξη (βαθμολογίες 5,4,3,2 ή 1 αντίστοιχα). Τα παιδιά που η επίδοση τους χαρακτηρίζονταν ως χαμηλή ή πολύ χαμηλή στην ανάγνωση έκαναν ένα επιπλέον τεστ που εξέταζε την αναγνωστική τους ευχέρεια.

Τεστ Αναγνωστικής Ευχέρειας. Για να ελεγχθεί η αναγνωστική ικανότητα των μαθητών που είχε υποδείξει ο δάσκαλος χορηγήθηκε στους μαθητές η δραστηριότητα Ευχέρεια του σταθμισμένου στην Ελλάδα εργαλείου Τεστ Ανάγνωσης ή Τεστ-Α. Η κατασκευή και στάθμιση του Τεστ-Α είχε ενταχθεί στο ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ – ΥΠΕΠΘ και πραγματοποιήθηκε από το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας με υπεύθυνη την καθηγήτρια Σουζάνα Παντελιάδου.

Η αξιολόγηση της αναγνωστικής ευχέρειας επιτυγχάνονταν μόνο με την φωναχτή ανάγνωση ενός κειμένου που περιείχε 279 λέξεις. Η ανάγνωση του κειμένου δεν απαιτούσε την κατανόηση του, αλλά στόχο είχε την αξιολόγηση της ακριβούς και γρήγορης αποκωδικοποίησης του. Ο μαθητής καλούνταν να διαβάσει φωναχτά το κείμενο για ένα λεπτό της ώρας. Το πλήθος των λέξεων που διάβαζε σωστά ο μαθητής στη διάρκεια αυτή αποτελούσε το μέτρο της μεταβλητής Ανάγνωση.

Διαδικασία και Τρόπος Κατηγοριοποίησης Συμμετεχόντων σε Ομάδες

Οι αναλύσεις έγιναν σε τρία επίπεδα ανάλογα με το ερευνητικό ερώτημα που ελέγχονταν κάθε φορά. Κατά την πρώτη ανάλυση ελέγχονταν αν διαφοροποιείται η επίδοση στα κλάσματα ολικά, εννοιολογικά και διαδικαστικά μεταξύ παιδιών με και

χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά. Για να γίνει ο χωρισμός των παιδιών σε αυτές τις δυο ομάδες χρησιμοποιήθηκε ως μέτρο η επίδοση τους στους υπολογισμούς με το μυαλό που υπήρχαν στο Τεστ ΜαθΠρο. Έχει φανεί σύμφωνα με τη βιβλιογραφία ότι παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά δυσκολεύονται να κάνουν βασικούς μαθηματικούς υπολογισμούς (APA, 2013· Μοσχίδης, 2010). Αυτό μπορεί να εξηγηθεί και από το γεγονός ότι οι νοεροί υπολογισμοί χαρακτηρίζονται ως μια σκέψη υψηλής διαδικασίας (Δεσποτοπούλου, 2014).

Αφού ελέγχθηκε και φάνηκε ότι ισχύει η κανονική κατανομή στους νοερούς υπολογισμούς, οι μαθητές χωρίστηκαν σύμφωνα με την επίδοση τους σ' αυτή τη δραστηριότητα. Αυτοί που βρίσκονταν κάτω από το 15^{ο} εκατοστημόριο σύμφωνα με την επίδοση τους χαρακτηρίστηκαν ως μαθητές με δυσκολίες στα μαθηματικά (ΔΜ) και αυτοί που βρίσκονταν πάνω από το 30^{ο} εκατοστημόριο θεωρήθηκαν ως μαθητές χωρίς δυσκολίες στα μαθηματικά (χΔΜ). Μάλιστα, για την τελική επιλογή των μαθητών στην ομάδα με δυσκολίες στα μαθηματικά, από αυτούς που βρίσκονταν κάτω από το 15^{ο} εκατοστημόριο έμειναν στην ομάδα αυτοί που επιβεβαιώνονταν και από τη γνώμη του δασκάλου τους, που είχε δηλαδή χαρακτηρίσει την επίδοση τους μέτρια, χαμηλή ή πολύ χαμηλή στα μαθηματικά. Η ενδιάμεση ομάδα επειδή δεν μπορούσε να αναδειχθεί με ασφάλεια σε ποια ομάδα ανήκει αποκλείστηκε από την ανάλυση.

Κατά τη δεύτερη ανάλυση, αφού ελέγχθηκε και φάνηκε ότι ισχύει η κανονικότητα για την επίδοση στα κλάσματα, τα παιδιά χωρίστηκαν σε δυο ομάδες σύμφωνα με αυτήν τους την επίδοση. Αυτές ήταν οι μαθητές με δυσκολίες στα κλάσματα (ΔΚ), με επίδοση κάτω από το 15^{ο} εκατοστημόριο και μαθητές χωρίς δυσκολίες στα κλάσματα (χΔΚ), με επίδοση πάνω από το 30^{ο} εκατοστημόριο.

Τέλος, στην τελευταία ανάλυση οι μαθητές χωρίστηκαν σε δυο ομάδες, σε μαθητές με καλή αναγνωστική ικανότητα (ευχέρεια) και σε μαθητές με χαμηλή αναγνωστική ικανότητα. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιήθηκε ως κριτήριο η γνώμη του δασκάλου από το ερωτηματολόγιο. Για να επιβεβαιωθεί η γνώμη του δασκάλου για τους μαθητές που χαρακτήρισε με επίδοση στην ανάγνωση χαμηλή ή πολύ χαμηλή χρησιμοποιήθηκε το τεστ αναγνωστικής ευχέρειας, όπου μαθητές που παρουσίασαν και εκεί σκορ κάτω από το 15^{ο} εκατοστημόριο θεωρήθηκαν παιδιά με χαμηλή αναγνωστική ικανότητα. Με καλή αναγνωστική ικανότητα χαρακτηρίστηκαν τα παιδιά που ο εκπαιδευτικός έκρινε την επίδοση τους στην ανάγνωση ως καλή ή πολύ καλή.

Αποτελέσματα

Κατα τον έλεγχο του 1^{ου} ερευνητικού ερωτήματος προέκυψε ότι τα παιδιά με ΔΜ παρουσίαζαν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερη βαθμολογία στις δραστηριότητες σε σχέση με τα παιδιά χΔΜ, τόσο σ' αυτές που μετρούσαν τη συνολική επίδοση στα κλάσματα όσο και σ' αυτές που μετρούσαν την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση. Αυτό φαίνεται και στους πίνακες που ακολουθούν από τα Τ-τεστ που έγιναν:

Πίνακας 1

Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και Τ-τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων με εξαρτημένη μεταβλητή τη συνολική επίδοση στο τεστ κλασμάτων και ανεξάρτητη τη δυσκολία στα μαθηματικά

			Τ-τεστ	
	ΜΟ[a]	ΤΑ[b]	Τ	p
ΔΜ (N=20)	50,05	22,14	t(127)=-9,123	<.001
χΔΜ (N=109)	90,77	17,60		

[a]ΜΟ = Μέσος όρος
[b]ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Πίνακας 2
Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και Τ-τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στην εννοιολογική γνώση των κλασμάτων και ανεξάρτητη τη δυσκολία στα μαθηματικά

			Τ-τεστ	
	ΜΟ[a]	ΤΑ[b]	Τ	p
ΔΜ (N=20)	29,25	13,939	t(127)=-8,850	<.001
χΔΜ (N=109)	49,28	8,225		

[a]ΜΟ = Μέσος όρος
[b]ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Πίνακας 3
Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και Τ-τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων και ανεξάρτητη τη δυσκολία στα μαθηματικά

			Τ-τεστ	
	ΜΟ[a]	ΤΑ[b]	Τ	p
ΔΜ (N=20)	20,80	12,383	t(127)=-7,391	<.001
χΔΜ (N=109)	41,39	11,284		

[a]ΜΟ = Μέσος όρος
[b]ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Κατά τον έλεγχο του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος προέκυψε κατά τη πολυμεταβλητή ανάλυση διακύμανσης ότι η επίδοση στα κλάσματα σχετίζεται και με τους 4 τομείς: επίγνωση αριθμού, μνήμη, οπτικο-χωρική ικανότητα και συλλογιστική. Ακόμα, από την ανάλυση παλινδρόμησης φάνηκε ότι την επίδοση στα κλάσματα την προβλέπουν η σύγκριση κουκίδων ($p<0,05$), η επίλυση προβήμάτων ($p<0,05$) και οι υπολογισμοί με το μυαλό ($p<0,001$). Την επίδοση στην εννοιολογική γνώση την προβλέπουν η σύγκριση κουκίδων ($p<0,05$) και οι νοεροί υπολογισμοί ($p<0,001$), ενώ τη διαδικαστική η επίλυση προβλημάτων ($p<0,05$) και οι υπολογισμοί με το μυαλό ($p<0,05$).

Κατά τον έλεγχο του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος προέκυψε ότι οι μαθητές με χαμηλή αναγνωστική ικανότητα παρουσιάζουν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερη επίδοση στα κλάσματα σε σχέση με τους μαθητές με καλή αναγνωστική ικανότητα, τόσο ολικά όσο και εννοιολογικά και διαδικαστικά. Αυτό αποδεικνύεται από τα αποτελέσματα των παρακάτω πινάκων:

Πίνακας 4
Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και Τ-τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στα κλάσματα και ανεξάρτητη τη δυσκολία στην ανάγνωση

			Τ-τεστ	
	ΜΟ[a]	ΤΑ[b]	Τ	p

Χαμηλή αναγνωστική ικανότητα (N=11)	61,36	25,196	t(130)=-4,012	<.001
Καλή αναγνωστική ικανότητα (N=121)	87,40	20,181		

[a]ΜΟ = Μέσος όρος
[b]ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Πίνακας 5
Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και Τ-τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στην εννοιολογική γνώση των κλασμάτων και ανεξάρτητη τη δυσκολία στην ανάγνωση

			Τ-τεστ	
	ΜΟ[a]	ΤΑ[b]	Τ	p
Χαμηλή αναγνωστική ικανότητα (N=11)	32,82	14,824	t(130)=-4,922	<.001
Καλή αναγνωστική ικανότητα (N=121)	47,88	9,168		

[a]ΜΟ = Μέσος όρος
[b]ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Πίνακας 6
Μέσοι όροι, τυπικές αποκλίσεις και Τ-τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων με εξαρτημένη μεταβλητή την επίδοση στη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων και ανεξάρτητη τη δυσκολία στην ανάγνωση

			Τ-τεστ	
	ΜΟ[a]	ΤΑ[b]	Τ	p
Χαμηλή αναγνωστική ικανότητα (N=11)	28,55	14,969	t(130)=-2,680	,008
Καλή αναγνωστική ικανότητα (N=121)	39,44	12,721		

[a]ΜΟ = Μέσος όρος
[b]ΤΑ = Τυπική απόκλιση

Συζήτηση

Με την ολοκλήρωση της συγκεκριμένης έρευνας, αρχικά, προέκυψε ότι παιδιά με δυσκολίες στα μαθηματικά ή την ανάγνωση σημείωσαν στατιστικά σημαντικά χαμηλότερη επίδοση στα κλάσματα συνολικά, αλλά και επιμέρους στη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση.

Ακόμα, οι δεξιότητες που φάνηκαν να προβλέπουν την επίδοση στα κλάσματα σχετίζονται με μαθηματικές δεξιότητες στους τομείς της επίγνωσης αριθμού, της μνήμης και της συλλογιστικής.

Άρα, από τα ανωτέρω αποτελέσματα προκύπτει ότι οι μαθητές της Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού για να είναι ικανοί να διαχειρίζονται τα κλάσματα πρέπει να κατακτήσουν τις παρακάτω δεξιότητες που σχετίζονται με αυτούς τους τρεις τομείς και είναι:

- Να έχουν βασική αίσθηση της αρίθμησης και να εκτιμούν μικρές ποσότητες αντικειμένων
- Να εκτιμούν διαφορετικές ποσότητες προσεγγιστικά
- Να τοποθετούν αριθμούς σε αριθμογραμμές
- Να μπορούν να μετατρέπουν έναν αριθμό από τη μια αναπαράσταση στην άλλη (αναλογική-αραβική-λεκτική)
- Να αντιλαμβάνονται τις βασικές αρχές μέτρησης
- Να χειρίζονται τα αραβικά σύμβολα
- Να αντιλαμβάνονται πως αλλάζει η σημασία ενός αριθμού ανάλογα με την τοποθέτηση του ψηφίου (μονάδες, δεκάδες και αντίληψη των δεκαδικών)
- Να αναγνωρίζουν και να κάνουν σωστή χρήση των συμβόλων κάθε πράξης
- Να κατανοούν μαθηματικές ιδέες και έννοιες
- Να καταλαβαίνουν τα ποικίλα βήματα σε πολύπλοκες διαδικασίες
- Να κατανοούν βασικές λογικές αρχές (του τύπου εάν….τότε, ή αντίστροφες σχέσεις)
- Να είναι ικανοί να επιλύουν προβλήματα
- Να μπορούν να ανακαλούν μαθηματικά δεδομένα
- Να αποκωδικοποιούν σωστά την ορολογία (αριθμητής, παρονομαστής κλπ)
- Να αποκωδικοποιούν λεκτικές οδηγίες
- Να εκτελούν νοητικούς υπολογισμούς
- Να απομνημονεύουν και να εκτελούν διαδικασίες όπως κανόνες και φόρμουλες
- Να επιλύουν προβλήματα μέσω συγκεκριμένων βημάτων (Karagiannakis et al., 2014)

Οπότε, ο δάσκαλος ανάλογα με τις ανάγκες του εκάστοτε μαθητή μπορεί να ενισχύσει τις ανωτέρω δεξιότητες, ώστε το οποιοδήποτε παιδί που αντιμετωπίζει δυσκολίες με τα κλάσματα να τις ξεπεράσει.

Βιβλιογραφικές αναφορές

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed.).* DSM-5. Author.

Andersson, U., & Ostergren, R. (2012). Number magnitude processing and basic cognitive functions in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 22*, 701–714.

Αντωνίου, Φ. (2008). Ενίσχυση της αναγνωστικής κατανόησης. Στο Σ. Παντελιάδου & Φ. Αντωνίου (Επιμ.), *Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες*. Βόλος: Εκδόσεις Γράφημα.

Booth, L. J., Newton, J. K., & Twiss-Garrity, K. L. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology, 118*, 110-118.

Bull, E., & Lee, K. (2014). Executive functioning and mathematics achievement. *Child Development Perspectives, 8*(1), 36-41.

Cragg, L., & Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in neuroscience and education, 3,* 63-68.

Δεσποτοπούλου, Α. (2014). *Νοεροί αριθμητικοί υπολογισμοί των μαθητών της Δ΄τάξης του δημοτικού σχολείου, με και χωρίς μαθησιακές δυσκολίες σταμαθηματικά, στην πρόσθεση και αφαίρεση διψήφιων αριθμών* (Διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Πατρών. Πάτρα.

Fazio, L., & Siegler, R. (2015). Teaching fractions. In *International Academy of education.* Retrieved from http://www.iaoed.org/.

Fronger, L. N., Tran, D., & Elliott, N. (2015, April). *Variation in children's understandings of fractions: Preliminary findings.* Paper session presented at the meeting of National council of teachers of mathematics, Boston.

Geary, D. C., & Hoard, M. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: theoretical and empirical perspectives. *Handbook of Mathematical Cognition* (J. I. D. Campbell eds) New York, NY: Psychology Press, 253–267.

Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology 111*, 212–229.

Hecht, S. A., Vagi, K. J., & Torgesen, J. K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*, 121-132.

Hull, B., & Miles, H. (2015, April). *What is conceptual understanding?* Paper session presented at the meeting of National council of teachers of mathematics, Boston.

Jayanthi, M., Gersten, R., Taylor, J. M., Smolkowski, K., & Dimino, J. (2017). Impact of the developing mathematical ideas professional development program on grade 4 students' and teachers' understanding of fractions. *Institute of education science*, 1-47.

Karagiannakis, N. G., & Baccaglini-Frank, E. A. (2014). The DeDiMa battery: a tool of identifying students' mathematical learning profiles. *Health psychology report, 2*(4), 1-7.

Karagiannakis, N. G., Baccaglini-Frank, E. A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in human neuroscience, 8*(57), 1-5.

Khashan, K. H. (2014). Conceptual and Procedural Knowledge of Rational Numbers for Riyadh Elementary School Teachers. *Journal of Education and Human Development, 3*(4), 181-197.

LaBerge, D. & Samuels, S. J. (1974). Toward a theory of automatic information processing in reading. *Cognitive Psychology, 6*(2), 293-323.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning. In F. K. Lester (Eds), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age, 629-667.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, S. R. (2015). Why is learning fractions and decimal arithmetic so difficult? *Developmental review, 38,* 201-221.

Μαγκλάρα, Γ., & Αργυρόπουλος, Β. (2016). *Η Προσέγγιση της κλασματικής έννοιας από Άτομα με Αναπηρία Όρασης: Μια πιλοτική έρευνα*. Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης, 2014, 135-145.

Mazzocco, M. M., & Devlin, K. T. (2008). Parts and 'holes': Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental science,* 11(5), 681-691.

Μοσχίδης, Χ. (2010). *Αναπτυξιακή προσέγγιση της εργαζόμενης μνήμης στη μαθηματική ικανότητα παιδιών δημοτικού σχολείου* (Διπλωματική εργασία). Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Αλεξανδρούπολη.

Μπεμπένη, Μ. (2011). *Εννοιολογικές και διαδικαστικές στρατηγικές σε έργα για τους ρητούς και η σχέση τους με τις προσεγγίσεις των μαθητών στη μελέτη των μαθηματικών* (Διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Ορφανός, Σ. (2003). *Η σημασία των ετερογενών συλλογισμών στη μάθηση και την διδασκαλία σχέσεων και πράξεων με κλάσματα* (Διδακτορική διατριβή).Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.

Παντελιάδου, Σ., & Αντωνίου, Φ. (2008). *Διδακτικές προσεγγίσεις και πρακτικές για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες.* Βόλος: Εκδόσεις Γράφημα.

Παπαθεοδώρου, Ε. (2016). *Αξιολόγηση της κατανόησης των κλασμάτων μαθητών Ε΄ και Στ΄ δημοτικού με τυπική ανάπτυξη και μαθητών με ήπιες εκπαιδευτικέςανάγκες: Είδη γνώσης και τρόποι αναπαράστασης* (Διπλωματική εργασία). Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη.

Prediger, S. (2008). Discontinuities for mental models- A source for difficulties with the multiplication of fractions. In D. D. Bock (eds*), Research and development of number systems and arithmetic,* 29-37.

Siegler, S. R., Fazio, K. L., Bailey, H. D., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive science,17*(1), 13-19.

Siegler, S. R., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology, 49*(10), 1994-2004.

Stigler, J. W., Givvin, K. B., & Thompson, B. J. (2010). What community college developmental mathematics student understand about mathematics. *MathAMATYCEducator, 1*(3), 4-16.

Tian, J., & Siegler, S. R. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 50*(6), 614-620.

Tian, J., & Siegler, S. R. (2016). Fractions learning in children with mathematical difficulties. *Journal of learning disabilities,* 1-7.