

# Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης

Τόμ. 1 (2017)

7ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ Π.Τ.Δ.Ε.  
ΚΕΝΤΡΟ ΜΕΛΕΤΗΣ ΨΥΧΟΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



Υπό την αιγίδα του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων

7<sup>ο</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

«ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΧΑΡΙΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ»

ΤΟΜΟΣ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ

ISSN: 2529-1157

Σε Συνεργασία με την Ένωση Ελλήνων Φυσικών και την  
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία  
ΞΕΝΟΔΟΧΕΙΟ DIVANICARAVEL  
15-18 Ιουνίου 2017

Το ταίριασμα γύρω από την αρπεδόνη υπό τη  
σκιά του Πυθαγόρα, στερέωσε τα βήματά μας

ΓΕΩΡΓΙΑ ΜΑΡΑΓΚΟΥ

doi: [10.12681/edusc.1778](https://doi.org/10.12681/edusc.1778)

## Βιβλιογραφική αναφορά:

ΜΑΡΑΓΚΟΥ Γ. (2019). Το ταίριασμα γύρω από την αρπεδόνη υπό τη σκιά του Πυθαγόρα, στερέωσε τα βήματά μας. *Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης*, 1, 687-695. <https://doi.org/10.12681/edusc.1778>

## Το ταίριασμα γύρω από την αρπεδόνη υπό τη σκιά του Πυθαγόρα, στερέωσε τα βήματά μας

Γεωργία Μαραγκού, καθηγήτρια Μαθηματικών  
geomar1712@yahoo.gr

### Περίληψη

Με επιτακτική την ανάγκη παροχής γνώσης στους μαθητές παρ' όλο ότι κατακλύζονται από πληροφόρηση καθημερινά, η εκπαίδευση πρέπει να είναι ουσιαστική και ταυτόχρονα ελκυστική. Στην ευρύτερη προσπάθεια της ερευνητικής εκπαιδευτικής κοινότητας να αμβλυθεί η σχέση μεταξύ Μαθηματικών και Τέχνης με εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας, στο 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού Αττικής παράλληλα με τη διδασκαλία του μαθήματος έστησα και ένα Μαθηματικό Εργαστήρι, στο οποίο με τους μαθητές σχεδιάζαμε και κατασκευάζαμε για μήνες διάφορα αντικείμενα εμπνευσμένα από τα Μαθηματικά τα οποία εκτός από πλούτο γεωμετρικών δομών, είχαν και αξιοσημείωτο αισθητικό ενδιαφέρον. Έγινε προσπάθεια για εμβάθυνση των γνώσεων των μαθητών σχετικά με την αμφίδρομη σχέση Μαθηματικών και Τέχνης και ενεργοποιήθηκε το ενδιαφέρον και η δημιουργικότητά τους. Τελικά οι μαθητές μέσα από την ομορφιά της Τέχνης και την αυστηρότητα των Μαθηματικών είχαν την ευκαιρία να καλλιεργήσουν τη δημιουργική τους ικανότητα και κυρίως να αποδεχτούν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας στην καθημερινή τους ζωή.

### Λέξεις-Κλειδιά

Μαθηματικό Εργαστήρι, Εκθέσεις Μαθηματικών, Μαθηματικά και Τέχνη.

### Abstract

Being pressed by the need to provide knowledge to the students, although they are overwhelmed by daily information, education has to be effective but at the same time attractive as well. Being aware of the wider attempt of the research education community to show the relationship between Mathematics and Art through alternative teaching methods, at the 1st High School of Skala Oropou Attikis teaching the courses, it was also settled by me as a professor, a Laboratory of Mathematics, where me and my students designed and constructed for months several objects inspired by mathematics that apart from wealthy geometric structures they had also a remarkable, significant aesthetic interest. There was a great attempt for providing the students with a deeper knowledge of the interrelationship of Mathematics and Art, having then as a wonderful result their alive interest and creativity. Eventually the students, through the beauty of Art and the rigor of Mathematics, they had the opportunity to cultivate their ability to create and above all to accept the usefulness of Mathematics and especially of Geometry in their daily life.

### Keywords

Maths lab, Maths' Exhibitions, Maths and Art.

### Εισαγωγή

Τις έξι προηγούμενες σχολικές χρονιές, στο 1ο Γυμνάσιο της Σκάλας Ωρωπού Αττικής, παράλληλα με τη διδασκαλία του μαθήματος στήθηκε με δική μου πρωτοβουλία ως καθηγήτριας των Μαθηματικών και ένα Μαθηματικό Εργαστήρι. Σε αυτό οι μαθητές με τη βοήθεια και καθοδήγησή μου σχεδίασαν και στη συνέχεια

κατασκεύασαν διάφορα αντικείμενα εμπνευσμένα από τα Μαθηματικά τα οποία και παρουσίασαν οι ίδιοι σαν μικροί ερευνητές επιστήμονες, στις έξι ΕΚΘΕΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, που έλαβαν χώρα με την κοινή παραδοχή των καθ' ύλην αρμοδίων επισκεπτών πως οι δράσεις αυτές ήταν ολοφάνερο πως θα είχαν μεγάλη υπεραξία για το μέλλον των μαθητών αυτών. Για να κατασκευάσουν τα έργα τους οι μαθητές όλα αυτά τα χρόνια , άντλησαν ιδέες από τις διάφορες ενότητες των Μαθηματικών που διδάχθηκαν αλλά και από τις γενικότερες συζητήσεις για τα Μαθηματικά στην τάξη με αφορμή τα ιστορικά σημειώματα ή τις εφαρμογές τους στη φύση και στην Τέχνη.

### **Περιγραφή των δράσεων**

Στο Μαθηματικό μας Εργαστήρι οι μαθητές μέσα από την ομορφιά της Τέχνης και την αυστηρότητα των Μαθηματικών είχαν την ευκαιρία να εποπτεύσουν να διαχειριστούν, να κρίνουν και να θεμελιώσουν έννοιες με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι προϊόν δικής τους δημιουργίας. Η Τέχνη και τα Μαθηματικά αναδεικνύουν τη συμπληρωματικότητα και δυαδικότητα της ανθρώπινης φύσης που υπαγορεύεται από την ανάγκη για έκφραση και την ανάγκη για πρόβλεψη και κατανόηση, συνθέτοντας από κοινού δυο κύριες πνευματικές δραστηριότητες του ανθρώπινου πολιτισμού», (Μαυρομμάτης, 2014). Με τις κατασκευές τους οι μαθητές μπορούσαν να αποδεικνύουν μπροστά στο κοινό που τους παρακολουθούσε, μαθηματικές προτάσεις που είχαν διδαχθεί καθώς και να απαντούν σε ασκήσεις του σχολικού βιβλίου. Εκτός αυτών, εφαρμόζοντας άλλες προτάσεις κατέληγαν να παρουσιάσουν κατασκευές που εκτός από πλούτο γεωμετρικών δομών που έκρυβαν είχαν και αξιοσημείωτο αισθητικό ενδιαφέρον, αποκαλύπτοντας έτσι και στους παρευρισκόμενους κρυμμένες ομορφιές των Μαθηματικών. Η αξιοποίηση και η παραγωγή εικαστικών έργων στην εκπαιδευτική διαδικασία δίνει την ευκαιρία στα παιδιά να ξεπεράσουν την ορθότητα και να ενδιαφερθούν όχι μόνο γι αυτό που υπάρχει γύρω τους αλλά ιδιαίτερα για αυτό που πρόκειται να προκύψει. (Eisner, 2002). Τα Μαθηματικά διεγείρουν το κριτικό πνεύμα. Τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν και το αίσθημα του ηθικού. Εκτός όμως από το αίσθημα του ηθικού, καλλιεργείται και το αίσθημα του ωραίου. Τον Μάιο λοιπόν του 2012 μετά την ετήσια καθοδήγηση και επίβλεψη της διδάσκουσας οι μαθητές και οι μαθήτριες παρουσίασαν την πρωτότυπη όπως χαρακτηρίστηκε από την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία , 1η Έκθεση μας Μαθηματικών και στην οποία είχα δώσει τον τίτλο : «Με το ψηφί, με το ριγλί, με το μαργαριτάρι». Οι μαθητές αποκάλυπταν στους παρευρισκόμενους κρυμμένες ομορφιές των Μαθηματικών , δίνοντας μάλιστα έτσι στα Μαθηματικά μια διαφορετική, πιο ενδιαφέρουσα διάσταση. Την Άνοιξη του 2013 το 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού επανήλθε με τη 2η ΕΚΘΕΣΗ η οποία έτεινε χέρι φιλίας προς πολλούς άλλους τομείς της επιστήμης και της τέχνης, συνδέοντας τα Μαθηματικά με την αρχιτεκτονική, τη χημεία αλλά και τη μουσική, τη ζωγραφική, την ξυλογλυπτική, τη χαρτοκοπτική, τη χαρακτική. Αυτό επιτεύχθηκε με δεξιοτεχνικό και αριστοτεχνικό τρόπο, αφού οι μαθητές σχεδίασαν και κατασκεύασαν τα πλατωνικά στερεά, τα αρχιμήδεια στερεά ,τα στερεά εκ περιστροφής, πρίσματα, αντιπρίσματα, πυραμίδες, αρθρωτά σχήματα και πολλά ακόμη. Οι μαθητές αφού πρώτα μελέτησαν το θέμα τους και έγραψαν τα σχετικά κείμενα, στη συνέχεια σχεδίασαν και κατασκεύασαν με πολύ κέφι και μεράκι τα εκθέματα, βάζοντας το προσωπικό τους γούστο. Στην 2<sup>η</sup> αυτή Έκθεσή μας είχα δώσει τον τίτλο: « ... στάλες Μαθηματικών στο νου, πλημμύρα ωραίου στην ψυχή ». Καθώς τα

Μαθηματικά με την αρμονία και την ορθότητά τους αποδίδουν πιστά τους κανόνες της φύσης, μπορούσε ο επισκέπτης να δει γύρω να πλανάται το γνωστό ερώτημα: «Εμείς και η φύση. Υστερούμε; ή προηγούμαστε;». Οι μαθητές στα εγκαίνια της 2<sup>ης</sup> μας Έκθεσης παρουσίασαν και πάλι στους παρευρισκόμενους οι ίδιοι τα έργα τους, με σοβαρότητα και υπευθυνότητα. Την έκθεση την επιμελήθηκα από την αρχή ως το τέλος με τη βοήθεια των μαθητών μου και πήρα τη μεγαλύτερη χαρά να τους βλέπω να χαίρονται! Η έκθεση αποτέλεσε και παράδειγμα διαθεματικότητας βρίσκοντας το απόγειό της στο «πάντρεμα» των Μαθηματικών με τη ζωντανή μουσική που απέδωσαν τρεις μαθήτριες με αρμόνιο, ηλεκτρική κιθάρα και τραγούδι, έχοντας αναλάβει την παρουσίαση με θέμα « Η μουσική και τα κλάσματα ». Με την 3<sup>η</sup> ΕΚΘΕΣΗ τώρα στο 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού και στην οποία έδωσα τον τίτλο: «Στροβιλίσματα στον ήλιο των αρρήτων, συλλέγοντας καρπούς από το δέντρο του Πυθαγόρα» είδαν όλοι να μεταμορφώνεται ο όρος Μαθηματικά, σε ένα μεγάλο κήπο από τα «ΔΕΝΤΡΑ του ΠΥΘΑΓΟΡΑ» αφού είχα εργαστεί εντατικά με τους μαθητές μου για την κατασκευή εκθεμάτων εμπνεόμενοι από το fractal «Δέντρο του Πυθαγόρα» στις δύο και στις τρεις διαστάσεις. Ό,τι διαδραματίστηκε σε τούτη την 3<sup>η</sup> κατά σειρά Έκθεση μας ήταν εμπλουτισμένο με ζωντανή μουσική, βιντεοπροβολές κινουμένων σχεδίων και άλλες διδακτικές παρεμβάσεις μου με αρχαία φτιαγμένα με δυναμικά λογισμικά γεωμετρίας όπως the Geometer's Sketchpad 5 αγγλική version και Geogebra, αναπαραστάσεις, μεταμορφώσεις κ.λ.π. Τονίστηκε από μαθήτριες της Β' τάξης, πως τα Μαθηματικά στην αρχαιότητα είχαν έντονο το άρωμα γυναίκας. Αν και αυτές είχαν συμβάλει στην εξέλιξη της επιστήμης, ωστόσο είχαν βυθιστεί στη λήθη της Ιστορίας αλλά στην Έκθεση αυτή «αναστήθηκαν»! Δύο μαθητές ακριβώς για αυτό το λόγο είχαν αναλάβει να κοσμήσουν το λαιμό της Αριγνώτης με ένα υπέροχο, περίτεχνο περιδέραιο που έφτιαξαν με σύρμα εμπνεόμενοι από το «Δέντρο Του Πυθαγόρα», και μάλιστα προσπάθησαν δύο φορές και έφτιαξαν δύο αφού ποτέ δεν πείστηκαν πως το έφτιαξαν καλά ώστε να της αξίζει. Η καθηγήτριά τους τους ευχαρίστησε και αφού έβαλα σε αυτά τις τελευταίες τεχνικές πινελιές, τα ανέδειξα κάνοντας τελικά τους μαθητές μου περήφανους για την προσπάθειά τους αυτή. Και τέλος έχοντας καιρό πριν αποκαλύψει στους μαθητές μου τα «Μυστικά της Αρπεδόνης», τους απόλαυσα να τα αποκαλύπτουν κι αυτοί στους επισκέπτες της Έκθεσης βρίσκοντας το ταίρι τους γύρω από αυτή, καθώς και να παρασύρουν σε αυτό το «παιχνίδι» μαζί τους, το Διευθυντή του Γυμνασίου, γονείς και κηδεμόνες. Είδαν οι επισκέπτες λοιπόν τη διδάσκουσα να «παίζει» με τους μαθητές της γύρω από την κλειστή Αρπεδόνη και να εισάγει τους μαθητές αυτούς του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού σε μαθηματικές έννοιες και ιδέες που θα συναντήσουν αργότερα στο Λύκειο. Έτσι βγήκε αβίαστα το συμπέρασμα από όλους μικρούς και μεγάλους που παρακολούθησαν την παρουσίαση της Έκθεσης, πως η αρπεδόνη δεν ήταν απλά ένα κατασκευαστικό εργαλείο, αλλά ένα καταπληκτικό πανάρχαιο εκπαιδευτικό παιχνίδι στα χέρια των αρπεδοναπτών, που αυτοί με τη σειρά τους δεν ήταν μόνο κατασκευαστές της ορθής γωνίας αλλά ιεροφάντες της γεωμετρίας κάτω από το ιερατείο της Αιγύπτου και της Βαβυλώνας αρκετούς αιώνες ίσως πριν τον επιστημονικό θεμελιωτή της με τα «Στοιχεία» του. Έτσι το παιχνίδι ωστόσο που είναι πιο αποδεκτό από τη φύση του παιδιού, πέραν του ότι καλλιεργεί την ψυχή, διαθέτοντάς του τη χαρά, όταν αυτό το παιχνίδι είναι ταυτόχρονα εκπαιδευτικό με την έννοια, ότι συνδέει το παιδί με τον καθηγητή του, τότε πραγματικά και οι δύο νιώθουν τη χαρά της Δημιουργίας. Ο παιδεμός στον οποίο υποβάλλεται το μυαλό και το σώμα του παιδιού μέσα από το πρόβλημα, την άσκηση, την εργασία, εκπαιδεύουν το παιδί, ώστε να μάθει να αντιμετωπίζει παρόμοιες καταστάσεις. Η παιδιά (παιδεμός) και η παιδιά (παιχνίδι) αλληλοσυμπληρώθηκαν εκείνη την ανοιξιάτικη

μέρα στο 1<sup>ο</sup> Γ/σιο Σκάλας Ωρωπού Αττικής, και όλοι συνειδητοποίησαν την εκπαιδευτική αξία της πανάρχαιας Αρπεδόνης. Τέλος μια μαθήτρια έδειξε με μία κούπα του Πυθαγόρα ή αλλιώς « κούπα του Δικαίου» και λίγο κρασί ,πως ο άπληστος τιμωρείται και προέτρεψε τους παρόντες ενήλικες να απολαμβάνουν τον οίνον στην κούπα τους αντλώντας τη μέγιστη ωφέλεια, όπως δίδασκε και ο μεγάλος μύστης Πυθαγόρας. Το ότι οι Αιγύπτιοι αξιοποιούσαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να ξαναβρίσκουν τα όρια των χωραφιών τους όταν τα νερά από τις πλημμύρες του Νείλου υποχωρούσαν, αλλά και πως δεν το είχαν ποτέ εκφράσει ως χρήσιμη θεωρία, καθώς και για το τι ήταν η Αρπεδόνη, τα παρουσίασε μαθήτρια μεταμφιεσμένη κι αυτή σε αρχαία Αιγυπτία και ήταν αυτή που προέτρεψε στο τέλος τους συμμαθητές της : « εμείς της Αρπεδόνης μας ας ψάξουμε να βρούμε ταίρι!» Η 4<sup>η</sup> Έκθεση Μαθηματικών του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού με τον ευρηματικό όπως χαρακτηρίστηκε τίτλο που έδωσα « Με ένα μόνο άγγιγμα στο χρυσάφι των αναλογιών »,αναφερόταν σε ένα κομμάτι δύσκολο στα Μαθηματικά, τις αναλογίες. Οι αναλογίες είναι μέσα στη ζωή μας ,είναι καθετί που βλέπουμε δίπλα μας , αυτό το μικρό που το κάνουμε μεγάλο για να το μελετήσουμε , αυτό το μεγάλο που το κάνουμε μικρό για να το χωρέσουμε . Εκτός από την παρουσία της σχολικής συμβούλου των Μαθηματικών Ανατολικής Αττικής, η παρουσία στην 4<sup>η</sup> Έκθεση δύο εξόχως δραστήριων μελών της Μαθηματικής Εταιρείας επισφράγισε τη σπουδαιότητα και τη μεγάλη σημασία αυτής της πρωτοβουλίας μου η οποία συνεχίστηκε για 4η σχολική χρονιά.. Με την είσοδό τους στην Έκθεση είπαν : « Αντιλαμβανόμαστε εδώ τον κόπο και στα πρακτικά κομμάτια γιατί είναι δύσκολες οι κατασκευές αλλά και στο γνωστικό κομμάτι γιατί αυτά που μας περιβάλλουν απασχολούν όχι μόνο τα σχολικά βιβλία, όχι μόνο τη Μαθηματική Γνώση αλλά και Σύγχρονες Μεθόδους Διδασκαλίας και Λογικές Έρευνας». Ενίσχυσαν επίσης τα παιδιά ηθικά, ψυχολογικά και έδιναν ως παιδαγωγοί πρόσθετες πληροφορίες σε κάθε Μαθηματικό θέμα που οι μαθητές είχαν αναλάβει να σχεδιάσουν ,να παρουσιάσουν και στο τέλος τα συνεχάρησαν για τη συμμετοχή τους. Πρόσθεσαν πως εκεί στο σχολείο μας είδαν τέχνη, διδασκαλία, πειθώ. Δεν είδαμε άτομα , είδαμε ομάδα είπαν και μαθητές που δούλεψαν για την ομάδα με τους εαυτούς τους. Οι μαθητές του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού, που ασχολήθηκαν με το δύσκολο θέμα των αναλογιών το έκαναν με τέτοιο τρόπο που μπορούσε κανείς να δει αμέσως στις κατασκευές τους την Τέχνη μέσα στα Μαθηματικά ή τα Μαθηματικά μέσα στην Τέχνη. Με απλά και ευτελή υλικά κατάφεραν να παρουσιάσουν κατασκευές πολύπλοκες και εντυπωσιακές οι οποίες όμως ήταν υψηλής αισθητικής αξίας. Οι κατασκευές των μαθητών αφορούσαν κυρίως το τρίγωνο του Pascal, το τρίγωνο Sierpinski, τη χρυσή τομή στην αρχιτεκτονική και στο ανθρώπινο σώμα. Την ημέρα της παρουσίασης της έκθεσης οι μαθητές που συμμετείχαν στο Εργαστήρι των Μαθηματικών με προσήλωση αλλά και άνεση παίρνοντας στο χέρι την κιμωλία και τα γεωμετρικά όργανα σχεδίασαν στον πίνακα, από την αρχή μέχρι το τέλος, την κάθε μια κατασκευή και παρουσίασαν αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο μελέτησαν, μέτρησαν και υπολόγισαν ό,τι χρειάστηκε ώστε να ξεκινήσουν και να φέρουν εις πέρας την κατασκευή που είχαν αναλάβει. Λίγο πριν το τέλος της παρουσίασης της 4<sup>ης</sup> Έκθεσης, ζήτησα από τους παρευρισκόμενους να αφήσουν την αίθουσα και να ακολουθήσουν τους μαθητές και τις μαθήτριες μου της Β1 τάξης, οι οποίοι στο δάπεδο του προαυλίου είχαν σχηματίσει το fractal τρίγωνο Sierpinski. Ήταν όλα τα κομμάτια του σχεδιασμένα και μπογιατισμένα από τα ίδια τα παιδιά, σε προσχέδια που είχα φροντίσει να τους ετοιμάσω και με αυτό τους το έργο άφησαν έκπληκτους τους γονείς και κηδεμόνες καθώς και τους άλλους εκλεκτούς επισκέπτες μας. Τη Δευτέρα στις 11 Μαΐου 2016 το 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού επανήλθε με την

5<sup>η</sup> Έκθεση Μαθηματικών. Επειδή στη λαϊκή μας τέχνη η εφαρμογή των Μαθηματικών και ειδικότερα της Γεωμετρίας είναι περισσότερο αναγνωρίσιμη και προσιτή οι μαθητές τη σχολική χρονιά 2015-16 επιχείρησαν να «σκύψουν» πάνω στην τέχνη του λαϊκού μάστορη γι' αυτό και ο τίτλος της 5<sup>ης</sup> Έκθεσης ήταν : «... στη σκιά του κυρ-μάστορη» Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της ελληνικής λαϊκής αρχιτεκτονικής είναι τα πλακόστρωτα δάπεδα που τα βρίσκουμε παντού στις αυλές, στις πλατείες, στους δρόμους, στις εκκλησίες. Κάθε τέχνη υψηλή ή ταπεινή, λόγια ή λαϊκή οφείλει πολλά στους αριθμούς και ιδιαίτερα στη Γεωμετρία.

Οι μαθητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι ένας μάστορης της λαϊκής λεγόμενης τέχνης, όσο κι αν λέγεται πως ενεργεί με συναίσθημα και φαντασία, ωστόσο λειτουργεί και με τη λογική και τη μαθηματική αντίληψη. Οι μαθητές αναρωτήθηκαν στην αρχή πως μπορεί ο μάστορης να χάραζε το σχέδιο επί τόπου σε έναν αυλόγυρο μιας εκκλησιάς για να φτιάξει το βοτσαλωτό ! Υποστηρίχτηκε η καλλιτεχνική έκφραση των μαθητών, προτάθηκε η ατομικότητα και μοναδικότητα του κάθε μαθητή, κινητοποιήθηκε η επιθυμία τους για έρευνα και δημιουργία και αναπτύχθηκαν οι ικανότητες, δεξιότητες και γνώσεις τους. Έτσι κατά τη διάρκεια της προσπάθειας αυτής, διαμορφώθηκαν για μια ακόμη φορά αξίες, στάσεις και συμπεριφορές του κάθε μαθητή στο Μαθηματικό Εργαστήρι.

Την Πέμπτη στις 27 Απριλίου 2017 εγκαινιάστηκε η 6<sup>η</sup> Έκθεση με τίτλο: «Ίχνηλατώντας τα εμπνευσμένα μονοπάτια του M.C.Escher». Δεν υπάρχει περίπτωση να γίνει λόγος για «Τέχνη και Μαθηματικά» χωρίς αναφορά στον Escher. Υπήρξε ένας από τους επιδραστικότερους εικαστικούς καλλιτέχνες του αιώνα που πέρασε. Έτσι λοιπόν φέτος επιτεύχθηκε οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου να διακρίνουν τη λανθάνουσα μαθηματική ιδιοφυΐα που χαρακτηρίζει τα έργα του Escher. Και αυτό με το να «πλησιάσουν» τα χαρακτηριστικά αυτού του μαέστρου του παράδοξου και στη συνέχεια να δημιουργήσουν κι εκείνοι τα δικά τους έργα που να τους μοιάζουν! Οι μαθητές του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού Αττικής τη φετινή σχολική χρονιά καθοδηγήθηκαν στο να δημιουργήσουν κι αυτοί πλακοστρώσεις (tessellations). Χάριν της οικοδομικής χρησιμότητάς της, και όχι μόνο, η γεωμετρική «πλακόστρωση», τόσο στο επίπεδο όσο και στον χώρο, έχει απασχολήσει τα μεγαλύτερα πνεύματα από την αρχαιότητα μέχρι και τη σύγχρονη εποχή. Οι μαθητές φέρνοντας εις πέρας τόσες Εκθέσεις καλλιέργησαν τη δημιουργική τους ικανότητα, και κυρίως αποδέχτηκαν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας στην καθημερινή τους ζωή. Η πολύ επιτυχημένη παρουσίαση των εκθεμάτων από τους μαθητές, επισφράγισε τη σπουδαιότητα και τη μεγάλη σημασία της πρωτοβουλίας μου να λειτουργήσει τα 6 τελευταία χρόνια το εργαστήρι των Μαθηματικών προσφέροντάς απλόχερα στους μαθητές γνώση και μεθοδολογία. Όσα έμαθαν και βίωσαν οι μαθητές στο Εργαστήρι μας, έχουν μεγάλη υπεραξία που θα φανεί στο μέλλον είπαν τα μέλη του διοικητικού συμβουλίου της Ε.Μ.Ε που παρακολούθησαν. Δουλεύοντας ομαδικά γνώρισαν καλύτερα τις δυνατότητές τους, έμαθαν να συνεργάζονται, να αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες, να δέχονται την κριτική των άλλων, να αξιολογούν πληροφορίες, να προετοιμάζουν παρουσιάσεις αναδεικνύοντας τα κοινωνικά χαρακτηριστικά της συνεργατικής μάθησης είχε προσθέσει μεταξύ άλλων η τότε αρμόδια Σύμβουλος των Μαθηματικών. Επιπλέον η συμμετοχή στο Εργαστήρι τους έδωσε πολλές αφορμές για πλούσιες συζητήσεις σε πληθώρα μαθηματικών θεμάτων, με τις οποίες προσέγγισαν από πολλές πλευρές έννοιες και θεωρήματα. Εν τέλει στο «Μαθηματικό Εργαστήρι» του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού Αττικής, με το να υπάρξουν από τη διδάσκουσα εναλλαγές στη διδακτική πρακτική και με το να αξιοποιηθεί η Τέχνη ως αρωγός για τη συγκρότηση της γνώσης, είχαμε τα θεαματικά και ελπιδοφόρα αποτελέσματα αφού καταδείχτηκε πόσο απαραίτητη είναι πράγματι η

σύνδεση των Μαθηματικών με τη ζωή και τις καθημερινές πρακτικές των μαθητών μας. Το ταξίδι μας στο 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού από την Αισθητική της Τέχνης στη λογική των Μαθηματικών συνεχίζεται...

### **Ευρήματα**

Με όχημα τη «γλώσσα» της Τέχνης και τις οπτικές μεταφορές που απορρέουν από τις ποικίλες της μορφές, και με μεθοδολογικά εργαλεία την ομαδοσυνεργατική ερευνητική μάθηση, τον καταγιισμό ιδεών, το παιχνίδι ρόλων οι μαθητές μπορούν να εκφραστούν δημιουργικά, εξοικειώνονται με το γνωστικό αντικείμενο και σε μεγάλο βαθμό τονώνεται η αυτοεκτίμησή τους. Επιπροσθέτως αν αναλογιστούμε το γενικότερο στόχο του σχολείου για την ολόπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας των μαθητών, μέσα από τη διαθεματική προσέγγιση των γνωστικών αντικειμένων κι αν στηριχτούμε παράλληλα στη θεωρία πολλαπλής νοημοσύνης του Gardner (Gardner, 1993) μπορούμε να αντιληφθούμε πόσο σημαντική είναι η ένταξη των ποικίλων μορφών Τέχνης στη μαθησιακή διαδικασία προκειμένου να ικανοποιηθούν τόσο οι γενικοί όσο και οι ειδικοί στόχοι της διδασκαλίας μας ανά ενότητα του σχολικού εγχειριδίου. Οι επισκέπτες της Έκθεσης στο σχολείο μας είπαν πως είδαν τέχνη, διδασκαλία, πειθώ και δεν είδαν άτομα, είδαν ομάδα είπαν και μαθητές που δούλεψαν για την ομάδα με τους εαυτούς τους. Κάθε επισκέπτης των Εκθέσεων αυτών μπορούσε να δει αμέσως στις κατασκευές των μαθητών την Τέχνη μέσα στα Μαθηματικά ή τα Μαθηματικά μέσα στην Τέχνη. Οι μαθητές με καταμερισμό έργου και σε ομάδες συνεργάστηκαν με τη διακριτική καθοδήγηση και ενθάρρυνση της διδάσκουσας (scaffolding) ώστε να αναλάβουν στη συνέχεια πρωτοβουλίες και να οικοδομήσουν και νέες γνώσεις μέσω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης. Οι μαθητές αντιλήφθηκαν το γνωστικό αντικείμενο, ανέπτυξαν ερευνητική διάθεση, ενδυνάμωσαν την παρατηρητικότητά τους, καλλιέργησαν τη στοχαστική τους ικανότητα, την κριτική και δημιουργική σκέψη τους και εξέλιξαν την αισθητική τους αντίληψη. Στην τελευταία φάση που έχει ολιστικό χαρακτήρα οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες κλήθηκαν να παρουσιάσουν αυτά για τα οποία εργάστηκαν αξιοποιώντας λογισμικά και το πραγματοποίησαν επιτυχώς και με χαρά. Αξιοποιήθηκαν οι δυνατότητες δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού και οι μαθητές ασκήθηκαν στη χρήση των εργαλείων του και των δυνατοτήτων που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες, δημιουργώντας καλλιτεχνικές συνθέσεις, δίνοντας και διέξοδο στη δημιουργική τους φαντασία και το καλλιτεχνικό τους ένστικτο. Στις πρωτότυπες κατασκευές μας παρ'όλο ότι χρησιμοποιήθηκαν καθημερινά, ευτελή υλικά ωστόσο αποτυπώθηκαν σε αυτές η δημιουργικότητα, η αποτελεσματικότητα και οι καλλιτεχνικές δεξιότητες των μαθητών.

### **Συμπεράσματα**

Είχαμε λοιπόν Γεωμετρικές έννοιες που έγιναν ορατές, εύληπτες, απτές και πιο ελκυστικές στα παιδιά. Εν τέλει στο «Μαθηματικό Εργαστήρι» του 1<sup>ο</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού Αττικής, με το να υπάρξουν από τη διδάσκουσα εναλλαγές στη διδακτική πρακτική και με το να αξιοποιηθεί η Τέχνη ως αρωγός για τη συγκρότηση της γνώσης, είχαμε τα θεαματικά και ελπιδοφόρα αποτελέσματα αφού καταδείχτηκε πόσο απαραίτητη είναι πράγματι η σύνδεση των Μαθηματικών με τη ζωή και τις καθημερινές πρακτικές των μαθητών μας. Τα παιδιά πρέπει να αισθάνονται για τη Γεωμετρία ότι και οι Αιγύπτιοι που την ανακάλυψαν και τη χρησιμοποιούσαν χιλιάδες χρόνια πριν ο Ευκλείδης γράψει τα «Στοιχεία» του. Τα παιδιά μπορούν να μάθουν όταν δουν τη Γεωμετρία ως ένα ανθρώπινο μέσο της καθημερινής ζωής. Στο

πλαίσιο να μαθαίνουν οι μαθητές μόνο έννοιες, τύπους, θεωρήματα και μεθοδολογία επίλυσης ασκήσεων, τους αποκόπτουμε από το να γνωρίσουν την αναγκαιότητα της ύπαρξης των Μαθηματικών, την περιγραφή της εξέλιξής τους και τη χρησιμότητά τους. Με επιτακτική λοιπόν την ανάγκη παροχής γνώσης στους νέους παρ' όλο ότι κατακλύζονται από πληροφόρηση καθημερινά, η εκπαίδευση πρέπει να είναι ουσιαστική και ταυτόχρονα ελκυστική. Η παιδευτική αξία των Μαθηματικών δεν εξαρτάται από την ποσότητα της διδακτέας ύλης αλλά από την ποιότητά της και το βαθμό κατανόησης της από τους μαθητές. Άρα μάλλον συνιστάται η εμπλοκή των μαθητών σε μια περιπέτεια αναζήτησης, διερεύνησης και ανακάλυψης σχημάτων γύρω μας. Τα παιδιά είναι καλλιτέχνες στην ψυχή. Η αναγκαιότητα να διδάξει κάποιος Γεωμετρία μέσω της Τέχνης δεν χρειάζεται επεξήγηση. Για τα παιδιά η ομορφιά έρχεται πριν τη λογική και τις θεωρίες άρα η Γεωμετρία ως Τέχνη είναι μια πιο φυσική προσέγγιση για τη διδασκαλία του μαθήματος. Επιτεύχθηκε η σύνδεση του συγκεκριμένου με το αφηρημένο στάδιο σκέψης και οι μαθητές οδηγήθηκαν σε καλύτερη κατανόηση (Λεμονίδης, 2006). Οι Εκθέσεις μας αυτές ήταν πράγματι το δικό μας ταξίδι από την αισθητική της Τέχνης στη λογική των Μαθηματικών. Τα Μαθηματικά δεν είναι η ρουτίνα του υπολογισμού ενός αριθμού, αντιθέτως εξηγούν τις μεγαλύτερες αλήθειες του κόσμου, και γι' αυτό βλέποντας κανείς από κοντά τις ποικίλες εργασίες των μαθητών θα ανακαλύψει νέα διάσταση σε αυτά. Οι μαθητές αυτοί είχαν πειστεί πια πως τα Μαθηματικά είναι μια άλλη γλώσσα που αν ακούσουμε προσεκτικά, θα δούμε ότι όλα γύρω μας τη μιλάνε. Τα Μαθηματικά είχαν γίνει πια για τα παιδιά αυτά το κυνήγι μιας κρυμμένης αλήθειας!!! Οι έξι αυτές Εκθέσεις Μαθηματικών αποτέλεσαν και παράδειγμα διαθεματικότητας βρίσκοντας το απόγειό τους στο «πάντρεμα» των Μαθηματικών με τη ζωντανή μουσική που απέδιδαν τρεις μαθήτριες με αρμόνιο, ηλεκτρική κιθάρα και τραγούδι. Η λήξη της παρουσίασης και των έξι Εκθέσεων όπως άλλωστε και η έναρξη γινόταν υπό το άκουσμα ζωντανής μουσικής που έπαιζαν μαθήτριες αφού η ιδέα της σύνδεσης των Μαθηματικών και της Μουσικής γεννήθηκε πριν από εικοσιέξι ολόκληρους αιώνες στην Αρχαία Ελλάδα από τον Πυθαγόρα. Οι ίδιες μαθήτριες είχαν αναλύσει και με μουσικά κομμάτια τη σύνδεση της μουσικής με τα κλάσματα που όντως την «κυβερνούν» και μέσω αυτής ελέγχουν τον άψυχο και έμψυχο κόσμο. Η μουσική αποτελεί το πρώτο παράδειγμα ποσοτικοποίησης ενός ποιοτικού φαινομένου μέσω των Μαθηματικών. Στο 1<sup>ο</sup> Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού το πρόγραμμα που επέλεξα να φέρω εις πέρας με τους μαθητές και τις μαθήτριές μου δεν ήταν αμιγώς καλλιτεχνικό, αλλά αντιθέτως στραφήκαμε να δημιουργήσουμε, συνδυάζοντας στις κατασκευές, το ωραίο με τη μαθηματική ιδέα και πρόταση. Κατά την προετοιμασία των πέντε αυτών Εκθέσεων, φάνηκαν στην πράξη τα αποτελέσματα όσων υποστηρίζονται και προτείνονται στη σύγχρονη διδακτική σκοποθεσία για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Από τις παιδαγωγικές θεωρίες άλλωστε που αναπτύχθηκαν κατά τον 20<sup>ο</sup> αιώνα, προέκυψε η επινόηση διδακτικών μεθόδων που βασίζονται στην αρχή της αυτενέργειας. Η αξιολόγηση ως μια ανατροφοδοτική διαδικασία υφίστατο σε όλη τη διάρκεια της οργάνωσης και εκτέλεσης του όλου έργου. Η τελική αξιολόγηση των δράσεων αφέθηκε στους ίδιους τους μαθητές. Είχαμε λοιπόν εδώ τη διδακτική αξιοποίηση μαθηματικών κατασκευών αλλά ο στόχος δεν ήταν μόνο να διαπιστωθεί αν τα εκθέματα κατασκευάστηκαν επιτυχώς και όπως είχαν αρχικά σχεδιαστεί, αλλά να αναπτυχθούν από τους ίδιους τους μαθητές κριτήρια και μέθοδοι κριτικής και αυτοκριτικής, ώστε να εθιστούν σε διαδικασίες αυτοελέγχου. Εκτός από τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν οι ίδιοι οι μαθητές και από το να χαρούν με τα εκθέματα που δημιούργησαν, είχαν όλα τα παιδιά αυτά την μεγάλη ικανοποίηση να δουν το θαυμασμό στα μάτια όσων επισκέφτηκαν τις έξι



Εκθέσεις μας αλλά και να δουν κάθε χρονιά τις δράσεις μας να δημοσιεύονται στο περιοδικό « ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α΄ » της Ε. Μ. Ε και να αναζητούνται μιμητές. Τελικά οι μαθητές του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου Σκάλας Ωρωπού μέσα από την ομορφιά της Τέχνης και την αυστηρότητα των Μαθηματικών είχαν την ευκαιρία να εποπτεύσουν να διαχειριστούν, να κρίνουν και να θεμελιώσουν έννοιες με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι προϊόν δικής τους δημιουργίας. Άλλωστε η αισθητική έλξη των Μαθηματικών τόσο στην παθητική ενατένιση όσο και στην ενεργό ερευνητική επιδίωξη, έχει βεβαιωθεί από πολλούς συγγραφείς. Κλασσικοί και μεσαιωνικοί συγγραφείς όπως ο Kepler ύμνησαν τη χρυσή τομή. Ο Poincaré ισχυρίστηκε ότι το κύριο στοιχείο της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι μάλλον η αισθητική παρά η λογική (P.J.Davis-R.Hersh,1981). Το Μαθηματικό Εργαστήρι μας όμως τελικά δεν ήταν μόνο για τα Μαθηματικά αλλά έμοιαζε να προπαρασκευάζει τη ζωή!

**Ενδεικτική ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:**

1. Μαυρομμάτης Α., Σταθοπούλου-Αγγελίδη Σ.(2014). Παπανικολάου Α., *Τέχνη και Μαθηματικά - Γεωμετρικά Σχήματα*. Αθήνα, Λιβάνης.
2. Eisner E.,(2002). *The arts and the creation of mind*. New Haven and London: Yale University Press.
3. Gardner H., (1993).*Multiple intelligences. The theory in practice*, Basic Books.
4. Λεμονίδης Χ., Θεοδώρου Α., Νικολαντωνάκης Κ., Παναγάκης Ι., & Σπανακά Α. , (2006β). *Μαθηματικά Γ. (Τετράδιο Εργασιών, Βιβλίο Μαθητή, Βιβλίο Δασκάλου)* ΟΕΔΒ.
5. P.J Davis-R.Hersh(1981).*The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston1981.