ePublishing

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2008)

6ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Κατανόηση των Ισοδυνάμων Παραστάσεων Πολυωνυμικών Συναρτήσεων

Ευγενία Κελεπέση - Ακρίτα

Βιβλιογραφική αναφορά:

Κελεπέση - Ακρίτα Ε. (2026). Κατανόηση των Ισοδυνάμων Παραστάσεων Πολυωνυμικών Συναρτήσεων. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 257–260. ανακτήθηκε από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/9632

Κατανόηση των Ισοδυνάμων Παραστάσεων Πολυωνυμικών Συναρτήσεων

Ευγενία Κελεπέση - Ακρίτα
Πανεπιστήμιο Αθηνών
kelepesi@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Αρκετοί ερευνητές έχουν επισημάνει πως – για την βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης – οι μαθητές πρέπει να μπορούν να μεταβαίνουν από μία οποιαδήποτε των τριών βασικών παραστάσεών της (αλγεβρική, γραφική και πίνακα τιμών) στις άλλες δύο. Εν τούτοις, στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση διδάσκεται μόνο ο «κλασσικός μονόδρομος» από την αλγεβρική μορφή στον πίνακα τιμών και από εκεί στην γραφική παράσταση – ενώ στην μετάβαση από την γραφική παράσταση και τον πίνακα τιμών στην αλγεβρική μορφή δεν δίνεται έμφαση. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι βασικές ιδέες για την μετάβαση από την γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης στην αλγεβρική της μορφή – μετάβαση που απαιτεί ειδική ανάλυση – ενώ γίνεται σύντομη αναφορά για την τεχνική της μετάβασης από τον πίνακα τιμών στην αλγεβρική μορφή. Έτσι ολοκληρώνεται το μοντέλο TRM των Schwarz, Dreyfus & Bruckheimer που υλοποιήσαμε με την χρήση του προγράμματος υπολογιστικής άλγεβρας TI-Nspire CAS.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Πολυωνυμικές συναρτήσεις, Γραφική παράσταση, Αλγεβρική παράσταση, Υπολογιστική άλγεβρα*

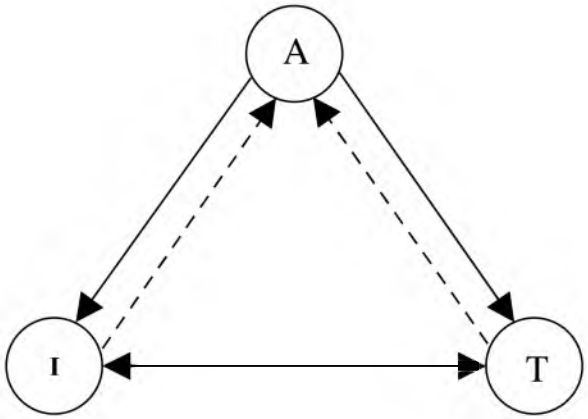
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα της διδασκαλίας της ισοδυναμίας των διαφορετικών μορφών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (συμβολικής ή αλγεβρικής, γραφικής και πίνακα τιμών) στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση με την βοήθεια της τεχνολογίας (Ράπτης, Α. - Ράπτη, Α. 2006) έχει μελετηθεί από αρκετούς συγγραφείς (Borba & Confrey 1996, Elia et al. 2006, Even 1998, Gagatsis & Shiakalli 2004, Harvey et al. 1995, Hitt 1998, Kutzler 2008, Ruthven 1990, Schwarz et al. 1990).

Οι Schwarz et al. (1990) ανέπτυξαν ένα μοντέλο τριπλής παράστασης (Triple Representation Model ή TRM) που επιτρέπει στους μαθητές την μετάβαση από ορισμένες παραστάσεις σε ορισμένες άλλες – όπως δείχνουν στο Σχήμα 1 τα μη διακεκομμένα βέλη.

Στην εργασία αυτή υλοποιήσαμε και ολοκληρώσαμε το μοντέλο TRM των Schwarz et al. (1990) χρησιμοποιώντας ένα από τα προϊόντα της οικογένειας TI-Nspire CAS (Κελεπέση, 2008). Με το μοντέλο αυτό είναι δυνατή η μετάβαση από μία οποιαδήποτε των τριών βασικών παραστάσεων (αλγεβρική, γραφική και πίνακα τιμών) μιας πολυωνυμικής συνάρτησης στις άλλες δύο. Συγκεκριμένα, η μετάβαση από τον πίνακα τιμών στην αλγεβρική μορφή επιτυγχάνεται για πολυώνυμα μέχρι και τετάρτου βαθμού.

35. 69 p 257_260 9/1/08 12:36 AM Page 258



Σχήμα 1: *Τα διακεκομμένα βέλη ολοκληρώνουν το μοντέλο των Schwarz et al:* ***Α****= αλγεβρική μορφή,* ***Γ*** *= γραφική παράσταση,* ***Τ****= πίνακας τιμών*

Στο άρθρο αυτό εξηγούμε τις βασικές ιδέες που συνδέουν την γραφική παράσταση με την συμβολική μορφή μιας πολυωνυμικής συνάρτησης δευτέρου βαθμού και παρουσιάζουμε τα σχέδια για την μελλοντική έρευνα.

ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΟΥΝ ΤΗΝ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗ

Κατά κοινή παραδοχή των ερευνητών η μετάβαση από την γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης στην αλγεβρική της μορφή είναι κατά πολύ δυσκολότερη από την αντίστροφη. Στην γενική περίπτωση τυχαίας πολυωνυμικής συνάρτησης – βαθμού $n > 2$ – η μετάβαση από την γραφική παράσταση στην αλγεβρική μορφή επιτυγχάνεται μόνο αν ξέρουμε εκ των προτέρων πως οι ρίζες του πολυωνύμου είναι όλες πραγματικές – και άρα τέμνουν τον άξονα των x.

Στην εργασία αυτή περιοριζόμαστε σε πολυωνυμικές συναρτήσεις δευτέρου βαθμού. Η μετάβαση από την γραφική παράσταση μιας παραβολής – που τέμνει τον άξονα των x ή εφάπτεται σε αυτόν – στην αλγεβρική της μορφή επιτυγχάνεται με την βοήθεια του γεγονότος ότι η παραβολή αυτή προέρχεται από το γινόμενο δύο γραμμικών συναρτήσεων την αλγεβρική μορφή των οποίων μπορούμε να βρούμε από την γραφική τους παράσταση.

Από το γινόμενο δύο γραμμικών συναρτήσεων προκύπτει μία παραβολή

Ξεκινάμε με τις την γραφικές παραστάσεις των ευθειών $y = \alpha x+\beta$ και $y' = \alpha'(x-\gamma')$, στο ίδιο σύστημα αξόνων και, με την βοήθεια του TI-Nspire CAS, σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας συνάρτησης που προκύπτει από το γινόμενο των δυο γραμμικών συναρτήσεων.

Συγκρίνοντας τις δύο ευθείες με την παραβολή βλέπουμε πως τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα των x είναι τα ίδια με αυτά των δύο ευθειών

35. 69 p 257_260 9/1/08 12:36 AM Page 259

– από το γινόμενο των οποίων προήλθε. Επίσης, και το πιο σημαντικό, βλέπουμε πως η τεταγμένη του σημείου που η παραβολή τέμνει τον άξονα των y είναι το γινόμενο των τεταγμένων των σημείων που οι δυο ευθείες τέμνουν τον άξονα των y. Αυτό γενικεύεται για όλες τις όλες τις τεταγμένες των σημείων της παραβολής.

Συνεπώς, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των ευθειών και της παραβολής με τους άξονες των x και y, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν σύνδεσμοι ανάμεσα στις διαφορετικές τάξεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Ανάλυση παραβολής σε γινόμενο δύο γραμμικών συναρτήσεων

Η δεύτερη βασική ιδέα είναι να εργαστούμε στην αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή ξεκινώντας από μία παραβολή – που *τέμνει* τον άξονα των x ή εφάπτεται σε αυτόν – να βρούμε τις ευθείες από το γινόμενο των οποίων αυτή προήλθε.

Αυτό είναι ισοδύναμο με την παραγοντοποίηση μιας δευτεροβάθμιας συνάρτησης σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων. Η ισοδύναμη δραστηριότητα στην γραφική παράσταση είναι η αποσύνθεση της παραβολής στις ευθείες από τις οποίες προήλθε – δηλαδή η παραγοντοποίηση γίνεται με ένα οπτικοποιημένο τρόπο.

Επισημαίνουμε πως η επιλογή των ευθειών (γραμμικών πολυωνυμικών συναρτήσεων) – από το γινόμενο των οποίων προκύπτει η παραβολή – δεν είναι μοναδική**.** Για παράδειγμα, $x^2+2x-8 = (x-2)\cdot(x+4) = (2x-4)\cdot(0,5x+2) = \ldots$. Οι ακέραιοι συντελεστές μπορούν να διασπαστούν και να δώσουν ένα άπειρο αριθμό ευθειών.

Οι μόνοι περιορισμοί για τις ευθείες είναι: (α) το γινόμενο των τεταγμένων τους στα σημεία που τέμνουν τον άξονα των y να είναι ίσο με την τεταγμένη της παραβολής στο σημείο που η παραβολή τέμνει τον άξονα των y και (β) τα σημεία τομής των ευθειών με τον άξονα των x και της παραβολής να είναι τα ίδια.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η υλοποίηση του μοντέλου τριπλής παράστασης, TRM, με το σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας TI-Nspire CAS ανοίγει νέους ορίζοντες. Η δυνατότητα ταυτόχρονης έκφρασης ενός προβλήματος σε τρεις διαφορετικές μορφές είναι μία πρωτόγνωρη εμπειρία, η δε ευκολία μετάβασης από μία παράσταση σε άλλη είναι αξιοσημείωτη.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις έχουμε ετοιμάσει ερωτήσεις και στην επόμενη σχολική χρονιά (2008-2009) σκοπεύουμε να κάνουμε ποιοτική έρευνα σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου στην Ελλάδα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αριστοτέλη Ράπτη και την κ. Αθανασία Ράπτη για την βοήθειά τους και τις πολύτιμες συμβουλές τους όλα αυτά τα χρόνια.

35. 69 p 257_260 9/1/08 12:36 AM Page 260

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Borba, M., & Confrey, J. (1996). A Student's Construction of Transformations of Functions in a Multiple Representational Environment, *Educational Studies in Mathematics*, 31, 319-337.

Elia, I., Panaoura, A, Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2006). Relations Between Secondary Pupils' Conceptions about Functions and Problem Solving in Different Representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(3), 533-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 105-121.

Gagatsis, A. & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology*, 24(5), 645-657.

Harvey, J. G., Waits, B. K., & Demana, F. D. (1995). The Influence of Technology on the Teaching and Learning of Algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 75-109.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(1), 123-134.

Kutzler, B. (χ.η.). TI-Nspire–The Next Generation? Τελευταία πρόσβαση 25 Φεβρουαρίου 2008. http://b.kutzler.com/src/download.htm.

Ruthven, K. (1990). The Influence of Graphic Calculator Use on Translation from Graphic to Symbolic Forms, *Educational Studies in Mathematics*, 21, 431-450.

Schwarz, B., Dreyfus, T. & Bruckheimer, M. (1990). A Model of the Function Concept in a Three-Fold Representation, *Computers Education*, 14(3), 249-262.

Κελεπέση, Ε. (2008). *Αξιοποίηση των Μοντελοποιητικών Δυνατοτήτων των Νέων Τεχνολογιών για την Κατανόηση και Επίλυση Αλγεβρικών Προβλημάτων στο Γυμνάσιο.* Τίτλος Διδακτορικής Διατριβής υπό συγγραφή (Επιβλέπων Καθηγητής: Α. Ράπτης). ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2006). *Μάθηση και Διδασκαλία στην Εποχή της Πληροφορίας,* τ. Α' & τ. Β', Αθήνα.