ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2008)

6ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Επίλυση Προβλήματος με Απόδειξη Μέσω των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων σε Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας

Σταυρούλα Πατσιομίτου

Βιβλιογραφική αναφορά:

Πατσιομίτου Σ. (2026). Επίλυση Προβλήματος με Απόδειξη Μέσω των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων σε Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας . *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 081–088. ανακτήθηκε από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/9546

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 81

Επίλυση Προβλήματος με Απόδειξη Μέσω των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων σε Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας

Σταυρούλα Πατσιομίτου
Καθ. Β/θμιας Εκπ/σης –Med Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών ΕΚΠΑ
spatsiomitou@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται πως είναι δυνατόν να διευκολυνθεί η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών διαμέσου της ψηφιακής τεχνολογίας και συγκεκριμένα μέσω των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας. Στην εργασία παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μοντελοποίησης μισο-προσχεδιασμένου ανοικτού προβλήματος στο λογισμικό το οποίο η ερευνήτρια κατασκεύασε με χρήση των αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού, μεταφέροντας με αυτή τη διαδικασία σχεδιασμού στο λογισμικό, τον τρόπο διδασκαλίας της στην τάξη, ο οποίος έχει στόχο οι μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη και να οδηγηθούν στην αποδεικτική διαδικασία. Με αυτόν τον τρόπο σχεδιασμού αλλά και από τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας με μαθητές προέκυψε η ανάγκη ορισμού των: Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (Linking Visual Active Representations) στο λογισμικό Geometer' Sketchpad v4 (Jackiw, 1991) εν συντομία LVAR και της Αντανακλαστικής Οπτικής Αντίδρασης των μαθητών (Reflective Visual Reaction) εν συντομία (RVR) για να περιγράψουν την σύνδεση των αναπαραστάσεων στο λογισμικό και τις αντιδράσεις των μαθητών όταν αλληλεπιδρούν με τις συνδεόμενες αναπαραστάσεις.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Συνδεόμενες οπτικές ενεργές αναπαραστάσεις, Δυναμική γεωμετρία*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ρόλος της διδασκαλίας και μάθησης της μαθηματικής απόδειξης έχει διερευνηθεί από πολλούς ερευνητές σ' όλο τον κόσμο, κάθε ένας από τους οποίους αντιμετώπισε το ζήτημα από διαφορετική προοπτική. Σκέλη αυτής της έρευνας περιλαμβάνουν την ανάλυση των γνωστικών διαδικασιών των σπουδαστών κατά τη διάρκεια της κατασκευής των αποδείξεων (για παράδειγμα Duval, 1991) τον ρόλο του δασκάλου στη διαδικασία απόδειξης (για παράδειγμα Bartolini Bussi & Mariotti, 1998) τον ρόλο του αντίκτυπου των υπολογιστών όσον αφορά την απόδειξη και πιο ειδικά τον ρόλο των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στη διαδικασία της απόδειξης (για παράδειγμα Olivero, 2002).

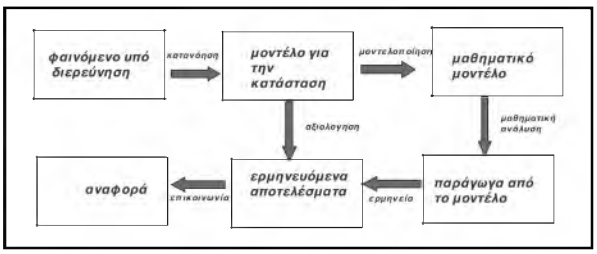
Οι περισσότεροι ερευνητές ανά τον κόσμο συμφωνούν ότι η μάθηση των μαθηματικών έχει σημαντικά αποτελέσματα όταν α) είναι ενεργή β) οι μαθητές συμμετέχουν σε μικρές ομάδες γ) οι μαθητές εστιάζουν σε ανοικτού τύπου προβλήματα που έχουν συνδέσει με τον πραγματικό κόσμο (για παράδειγμα Rochelle et al. (2000, p.79)). Σύμφωνα με τους Arsac et al. (1988) στην προσπά-

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 82

θεια να χαρακτηρίσουν την διδασκαλία και μάθηση μέσω δραστηριοτήτων που επιτρέπουν στους μαθητές να "κάνουν" μαθηματικά, το ανοικτό πρόβλημα δεν προτείνει τη μέθοδο λύσης ενώ ενθαρρύνει την ανακάλυψη, και την παραγωγή υποθέσεων. Η επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος δεν μπορεί να μειωθεί στην εφαρμογή μιας διαδικασίας ή μιας ρουτίνας που απαιτεί μια τεχνική που πιθανότατα ο μαθητής να έχει αποστηθίσει, αλλά επιτρέπει την ελευθερία στην παραγωγή των υποθέσεων και οι σπουδαστές πρέπει να λάβουν αποφάσεις για την επιλογή μιας πορείας όπως διερεύνηση της κατάστασης, κατασκευή εικασιών, επικύρωση των υποθέσεων και παρουσίαση των αποδείξεων μιας λύσης που μπορεί να μην είναι μοναδική. Από αυτή την άποψη τα ανοικτά προβλήματα φαίνονται να είναι κατάλληλα να υποκινήσουν την παραγωγική σκέψη.

Η εξερεύνηση ενός προβλήματος μέσω των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, επιτρέπει στους μαθητές να αναδημιουργήσουν από την άποψη των σχέσεων και ιδιοτήτων όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για την απόδειξη. Κατ' αυτό τον τρόπο η διαδικασία της λύσης γίνεται τόσο σημαντική όσο η ίδια η λύση.

Η εφαρμογή των μαθηματικών για να λύσουμε καταστάσεις προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο μπορεί να θεωρηθεί ωφέλιμη ως σύνθετη διαδικασία που περικλείει ένα αριθμό φάσεων που περιγράφεται από τους Corte, Verschaffel and Greer (2000) στο διάγραμμα 1 όπως: κατανόηση της κατάστασης που περιγράφεται, κατασκευή μαθηματικού μοντέλου και σχέσεις ενσωματωμένες στην κατάσταση, εργασία μέσω του μαθηματικού μοντέλου, ερμηνεία των εξερχόμενων από την υπολογιστική εργασία για να φτάσουμε σε μια λύση πρακτικά, αξιολόγηση του ερμηνευμένου αποτελέσματος σε σχέση με την φυσική κατάσταση.



Διάγραμμα 1: *Μετάφραση του διαγράμματος των Corte, Verschaffel and Greer*

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ DGS ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το περιβάλλον του λογισμικού Geometer' Sketchpad v4 (Jackiw, 1991) έχει την δυνατότητα πολλαπλών σελίδων που μπορούν να συνδεθούν, επικόλλησης εικόνων στις σελίδες και επεξεργασίας τους μέσω των εργαλείων του λογισμικού. Ο συνδυασμός των αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού (για παράδειγμα κουμπιά σύνδεσης ή κουμπιά απόκρυψης εμφάνισης ή εργαλεία μετασχηματισμού όπως περιστροφή περί κέντρο) με στόχο την παραγωγή των

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 83

οπτικών μαθηματικών αναπαραστάσεων VMR (Visual Mathematical Representations) (Sedig & Sumner, 2006) μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην ανάπτυξη εικασιών, ανάλυσης του προβλήματος και σύνθεσης της λύσης. Το μαθηματικό μοντέλο που παράγεται επομένως με στόχο την λύση του προβλήματος οδηγεί τον σχεδιαστή ή τον χρήστη σε μια μοντελοποίηση από τεχνολογικής απόψεως. Στόχος του σχεδιαστή (που μπορεί να είναι και ο δάσκαλος των μαθηματικών) κατ' αυτό τον τρόπο γίνεται η σύνδεση των καταλλήλων τεχνικών στο λογισμικό που διευκολύνουν την ροή της λύσης του προβλήματος ή οδηγούν στην κατανόηση των απαιτούμενων μαθηματικών τεχνικών. Στην περίπτωση του προβλήματος της συγκεκριμένης εργασίας ο σχεδιασμός των συνδεόμενων σελίδων του προβλήματος στο λογισμικό έγινε από την ερευνήτρια μετά από παρατήρηση του τρόπου που μαθαίνουν οι μαθητές. Συγκεκριμένα: α) οι μαθητές κατανοούν ένα σχήμα απλό παρά ένα σχήμα σύνθετο και β) ένας μαθητής εξελίσσει /αναπτύσσει τις διαδικασίες μάθησης και σκέψης όταν έχει την δυνατότητα να επανεξετάσει μια προηγούμενη ενέργεια του σε μια προηγούμενη κατάσταση π.χ σε ένα προηγούμενο βήμα κατασκευής, αφού έτσι αναδιοργανώνει την σκέψη του και ολοκληρώνει ή και οδηγείται να διαφοροποιήσει τις ενέργειες του. Στις συνδεόμενες σελίδες στο λογισμικό ο μαθητής έχει την δυνατότητα αναδιοργάνωσης και ανατροφοδότησης στις ενέργειες του και επομένως της μεγιστοποίησης του αποτελέσματος όσον αφορά την λύση του προβλήματος με χρήση της αποδεικτικής διαδικασίας. Επομένως το ζητούμενο είναι ένας μαθητής να αποκτήσει την ικανότητα να *οδηγηθεί στην αποδεικτική διαδικασία και επομένως να μετασχηματίσει αναπτύσσοντας/ βελτιώνοντας το επίπεδο της γεωμετρικής σκέψης του, καθοδηγούμενος* μέσω του σχήματος του σε μια πιο σύνθετη /περίπλοκη συνδεόμενη αναπαράσταση για την επίλυση του προβλήματος χωρίς όμως να επιστρέψει στις προηγούμενες αναπαραστάσεις προκειμένου να αναδιοργανώσει τη σκέψη του /της, αλλά μόνο μέσω νοητικής θεώρησης, κινούμενος έτσι με έναν αντανακλαστικό τρόπο μεταξύ δύο διαδοχικών Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (LVAR) (Patsiomitou and Koleza, in press; Patsiomitou, 2008).

Τι είναι επομένως οι **Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις** (LVAR)

Συνδεόμενες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις είναι οι διαδοχικές φάσεις των δυναμικών αναπαραστάσεων του προβλήματος που συνδέουν τα κατασκευαστικά αναπαραστατικά βήματα του προβλήματος προς λύση, προκειμένου να αποκαλυφθεί μια συνεχώς αυξανόμενη εποικοδομητική πολυπλοκότητα: δεδομένου ότι οι αναπαραστάσεις στηρίζονται σε προηγούμενες κατασκευαστικές ενέργειες και επομένως είναι πιο σύνθετες, περίπλοκες και ολοκληρωμένες από τις προηγούμενες σταδιακές μορφές, λόγω των ενεργειών του μαθητή (ή του δασκάλου σε μια μισό-προ σχεδιασμένη δραστηριότητα) με επιλογή των κατάλληλων τεχνικών αλληλεπίδρασης (κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος), στοχεύουν να εξωτερικεύσουν τα μετασχηματιστικά βήματα που έχουν (οι μαθητές ή ο δάσκαλος προβλέποντας τις ενέργειες των μαθητών) σχηματίσει νοητικά.

Η αντανακλαστική οπτική αντίδραση είναι εκείνη η αντίδραση του μαθητή που είναι βασισμένη σε έναν αντανακλαστικό τρόπο σκέψης, και προέρχεται

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 84

από την αλληλεπίδραση με τις LVAR στο λογισμικό, διευκολύνοντας κατά συνέπεια την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση των προβλημάτων με μαθηματικό τρόπο.

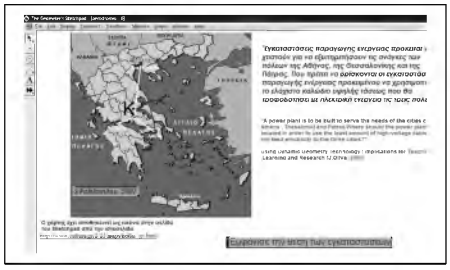
Η θεωρητική θεμελίωση των LVAR στο λογισμικό εν συντομία στηρίζεται στην ανάπτυξη αλληλεπίδρασης με τις οπτικές μαθηματικές αναπαραστάσεις του λογισμικού. Το περιβάλλον εργασίας λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας είναι ένα περιβάλλον συνεργατικό όπου κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης μιας δραστηριότητας, οι ενέργειες του μαθητή, οι ενέργειες του δασκάλου, ή άλλα γεγονότα μπορούν να προκαλέσουν μια αλλαγή στις σχέσεις που χαρακτηρίζουν την ίδια τη δραστηριότητα. Ο ρόλος του δασκάλου είναι κρίσιμος διότι εκτός από την οργάνωση του διδακτικού περιβάλλοντος είναι υπεύθυνος και για την επιλογή των ειδικών εργαλείων της σημειωτικής διαμεσολάβησης. Η εξέλιξη των μαθητών επιτυγχάνεται διαμέσου της κοινωνικής κατασκευής και κάτω από την καθοδήγηση του δασκάλου (π.χ Mariotti, 2002), δεδομένου ότι ο δάσκαλος μεσολαβεί στην χρησιμοποίηση του εργαλείου προκειμένου να ολοκληρώσει τις στρατηγικές επικοινωνίας που στοχεύουν να αναπτύξουν μια συγκεκριμένη έννοια. Ο Trouche (προσωπική επικοινωνία στις 4 Απριλίου 2008 στο Patsiomitou, in press) χαρακτηρίζει την διαδικασία εργαλειακής γένεσης (Verillon and Rabardel, 1995) "ως μια αμφίδρομη διαδικασία μεταξύ των υποκειμένων και των artefacts / tools με κοινωνικές πτυχές, αναπτυσσόμενη μέσω ολοκληρωμένων / οριστικοποιημένων δράσεων εντός ή εκτός των τάξεων" και διακρίνει μια φάση κατά την οποία το εργαλείο έχει επιπτώσεις στην, και διαμορφώνει τη σκέψη του χρήστη (instrumentation) και μια φάση όπου το εργαλείο διαμορφώνεται από το χρήστη (instrumentalization) (Trouche, 2004). Σύμφωνα με τον Trouche "κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της εργαλειακής γένεσης ένα artefact μετασχηματίζεται σε instrument προσανατολισμένο από ολοκληρωμένες δράσεις και βοηθούμενο από εργαλειακές ενορχηστρώσεις σε σχέση με το υποκείμενο και τον στόχο που το υποκείμενο θέλει να πραγματοποιήσει μέσω του εργαλείου" (προσωπική επικοινωνία, ibid.). Τότε το υποκείμενο χτίζει σύμφωνα με τον Rabardel (1995) «σχήματα χρησιμοποίησης (του εργαλείου)» (utilization schemes), δηλαδή νοητικά σχήματα που οργανώνουν την δραστηριότητα μέσω του εργαλείου, προκειμένου να πραγματοποιηθεί ένας δεδομένος στόχος. "Σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης αναπτύσσονται όταν οι μαθητές αλληλεπιδρούν με τις LVAR στο λογισμικό. Για παράδειγμα, αν ένα μαθητής εφαρμόσει την διαδικασία της περιστροφής (rotation) με γωνία στροφής ίση με 90° σε ένα ευθύγραμμο τμήμα τότε το παραγόμενο τμήμα είναι ίσο με το αρχικό και σχηματίζει ορθή γωνία. Η διαδικασία αυτή οδηγεί τον μαθητή να κατασκευάσει ένα νοητικό σχήμα το οποίο περιλαμβάνει τις έννοιες α) της καθετότητας και β) του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου." (Patsiomitou, 2008).

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

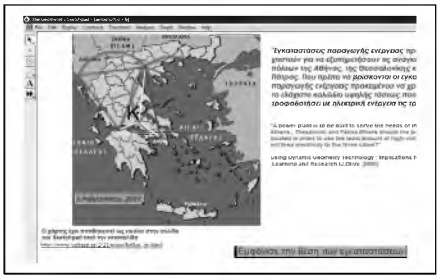
Το πρόβλημα που ακολουθεί έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών (για παράδειγμα Olive (2000)). Μια ελληνική διαθεματική έκδοση του προβλήματος που δόθηκε σε μαθητές της Α΄

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 85

τάξης, Λυκείου της Αθήνας είναι η εξής: «*Εγκαταστάσεις παραγωγής ενέργειας πρόκειται να χτιστούν για να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες των πόλεων της Αθήνας, της Θεσσαλονίκης και της Πάτρας. Που πρέπει να βρίσκονται οι εγκαταστάσεις παραγωγής ενέργειας προκειμένου να χρησιμοποιηθεί το ελάχιστο καλώδιο υψηλής τάσεως που θα τροφοδοτήσει με ηλεκτρική ενέργεια τις τρεις πόλεις;*»



Σχήμα 1: *Μοντελοποίηση του προβλήματος*



Σχήμα 2: *Απόκρυψη/ εμφάνιση της θέσης του εργοστασίου ηλεκτρικής ενέργειας με επεξεργασία της εικόνας*

Το πρόβλημα έχει πολλαπλές δυνατότητες επίλυσης και απαιτεί γνώσεις γεωμετρίας ή άλγεβρας. Η λύση του προβλήματος σύμφωνα με τους Ιησουΐτες (Γεωμετρία, σελ. 341) είχε προταθεί από τον Fermat στον Toricelli, ενώ το ίδιο πρόβλημα έλυσαν και οι Cavalierri, Viviani. Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε την επίλυση του προβλήματος στο υπολογιστικό περιβάλλον του Sketchpadv4.

Έχουμε αποθηκεύσει σε σελίδα του Sketchpad v.4 μια εικόνα του χάρτη, την οποία ο μαθητής έχει την δυνατότητα να επεξεργαστεί κάνοντας χρήση των εργαλείων του μενού του λογισμικού δηλαδή σχηματίζοντας τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν σημεία της εικόνας, μετρώντας και υπολογίζοντας τις αποστάσεις και γωνίες μεταξύ των τμημάτων, μετακινώντας και αλλάζοντας τις θέσεις των σημείων προκειμένου να ακολουθήσει μια στρατηγική για τη λύση του προβλήματος. Τα κουμπιά ενεργειών απόκρυψης-εμφάνισης μπορούν να συνδέσουν κείμενο και προτεινόμενη κατασκευαστική ενέργεια από την πλευρά του χρήστη. Στα κουμπιά ενέργειας για παράδειγμα μπορούμε να προσθέσουμε κείμενο που έχει ως αποτέλεσμα την σύνδεση ερωτηματολογίου και φύλλου εργασίας ή και σχεδίου μαθήματος, την ακολουθιακή παρουσίαση των ενεργειών κ.α. Ο μαθητής επεξεργάζεται απευθείας στα αντίστοιχα αριθμημένα κουμπιά μετά από ενέργεια δική του ή πρόταση του δασκάλου, ή και έχει την δυνατότητα να προσθέσει νέα κουμπιά αλληλεπιδρώντας με το artefact / εργαλείο (λογισμικό και δυναμικές LVAR αναπαραστάσεις).

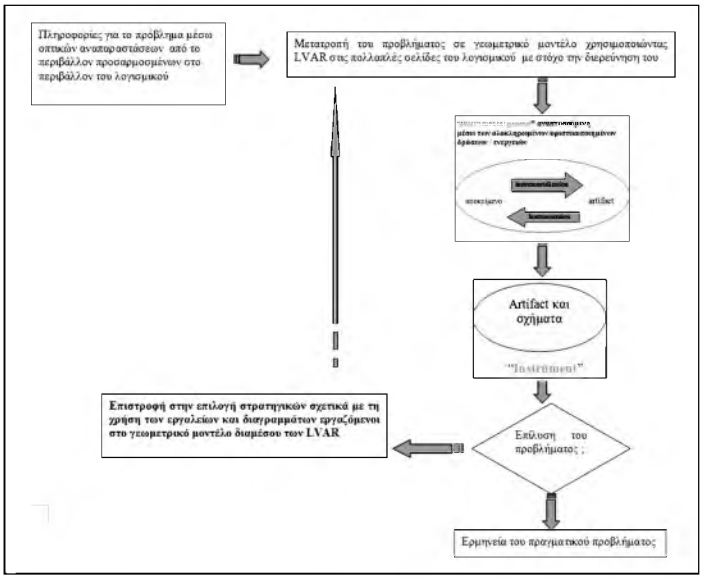
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΕ ΜΑΘΗΤΕΣ

Η βοήθεια που παρείχαν οι LVAR στους μαθητές που εξερεύνησαν το πρόβλημα ήταν σημαντική, αφού τους οδήγησαν να εμφανίσουν σταδιακά με τα κουμπιά απόκρυψης εμφάνισης τις συνδεόμενες ακολουθιακές φάσεις των α-

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 86

ναπαραστάσεων μέχρι να οδηγηθούν στην τελική αναπαράσταση στο σχήμα 2. Οι μαθητές ήταν μετρίου επιπέδου και η επαφή τους στο λογισμικό ήταν 6 ώρες σε 4 εβδομάδες. Παρά το γεγονός ότι αντιμετώπιζαν προβλήματα στην γεωμετρία οδηγήθηκαν σε σχηματισμό εικασιών και παραγωγικό συλλογισμό με «αν … τότε» απαντήσεις ή με συνθετότερες εκφράσεις.

Η όλη διαδικασία είναι μια συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, των εργαλείων (λογισμικό και περιλαμβανόμενες δραστηριότητες) και του δάσκαλου. Έχουμε επομένως ένα σχήμα μεταξύ των υποκειμένων και των εργαλείων, όπου με την επικοινωνία, τους κανόνες και την επεξεργασία του αντικείμενου, λαμβάνουμε μετά την μετασχηματιστική διαδικασία το εξερχόμενο αποτέλεσμα.



Διάγραμμα 2: *Επίλυση προβλήματος σε περιβάλλον με LVAR (Patsiomitou, 2008)*

Το σχήμα της εργαλειακής προσέγγισης που περιέχεται στο συνολικό σχήμα επίλυσης προέκυψε από την συνεργασία μέσω e-mail της ερευνήτριας με τον Luc Trouche (2 Απριλίου 2008 στο Patsiomitou, 2008).

Έτσι όταν οι μαθητές ολοκληρώσουν τον τρόπο σκέψης ή και την κατασκευή του σχήματος η εμφάνιση κειμένου και κατασκευής του σχήματος ταυτόχρονα, λειτουργεί α) συμπληρωματικά β) καθοδηγητικά-βοηθητικά προσθέτοντας στο σύνολο ενεργειών του μαθητή και επομένως ολοκληρώνοντας την παλαιά γνώση, ή αντικαθιστώντας τις λάθος ενέργειες με νέες και γ) επιβεβαιωτικά στην σκέψη του μαθητή. Αν λάβουμε υπόψη τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας με τους μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου τότε η επίλυση προβλήματος σε υπολογιστικό περιβάλλον κάνοντας χρήση της απόδειξης, ε-

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 87

ξαρτάται από την λήψη αποφάσεων για τον σχεδιασμό της δραστηριότητας, την κατάλληλη σύνδεση "οπτικών μαθηματικών αναπαραστάσεων" LVAR καθώς και την κατάλληλη επιλογή εργαλείου από τους μαθητές για επεξεργασία του προβλήματος. Αναδιαμορφώνεται επομένως ο τρόπος επίλυσης πραγματικού προβλήματος σε υπολογιστικό περιβάλλον όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι αναπαραστάσεις με χρήση εικόνων ήταν ο πρώτος εμπειρικός τρόπος απόδειξης και στην αρχαία Ελλάδα αν και η πορεία η παρατηρούμενη στα Στοιχεία του Ευκλείδη δεν χαρακτηρίζεται ως μια μετάβαση από την «παράσταση στο ιδεατό». Και η φράση «ει μη βούλει αριθμείν, αλλά δείξον» (83Ε του πλατωνικού εδαφίου) μπορεί να ληφθεί ως παράδειγμα για το πώς αρχικά εννοούσαν την απόδειξη κάνοντας χρήση της ειδικής έκφρασης του ρήματος «δείκνυμι». Ο Freudenthal (1971, p. 414) υποστηρίζει ότι «ο Σωκράτης δεν δίδαξε μια έτοιμη λύση αλλά τον τρόπο για τη λύση». Η ίδια προσέγγιση δύο χιλιετίες αργότερα διατυπώθηκε από τον Comenius: «Ο καλύτερος τρόπος να διδάξεις μια δραστηριότητα είναι να την παρουσιάσεις». Σύμφωνα με τον Freudenthal (ibid.) «αυτή είναι μια σωκρατική ιδέα, και δεν αναφέρεται απλώς σε ένα σωκρατικό μάθημα». Ο Freudenthal (ibid.) υποστηρίζει ότι οι σύγχρονοι εκπαιδευτικοί είναι πιθανό να προσυπογράψουν σε μια παραλλαγή της ιδέας του Comenius ισχυριζόμενος ότι «ο καλύτερος τρόπος να διδάξεις μια δραστηριότητα, είναι (όχι) να την παρουσιάσεις» αλλά μάλλον «ο καλύτερος τρόπος να μάθουν οι μαθητές μέσω μιας δραστηριότητας, είναι με το να την επεξεργαστούν».

Μέσω των LVAR δηλαδή των συνδεόμενων διαδοχικών σελίδων με διαφορετικές τεχνικές, οι μαθητές οδηγούνται σε μια αμφίδρομη διαδικασία, στην οποία γνωστικά συνδέουν τις ενέργειες στο λογισμικό και τις περιεχόμενες έννοιες: αφενός επεξεργαζόμενοι τις δυναμικές αναπαραστάσεις ενεργούν σ' αυτές με την χρήση των εργαλείων αλλά και αντίστροφα από την δράση των εργαλείων οδηγούνται να σχηματίσουν τις έννοιες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arsac, G., Germain, G. and Mante, M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*, IREM, Villeurbanne.

Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M. A. (1998). From drawing to construction: Teachers' mediation within the Cabri environment. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 247-254). Stellenbosh, South Africa.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world.*Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century:Mathematics for living* (pp. 66-73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development.

12. 50 p 81_88 8/28/08 10:06 PM Page 88

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Freudenthal, H: (1971) Geometry between the devil and the deep sea *Educational Studies in Mathematics* 3 413-435 *Publishing Company, Dordrecht-Holland.*

Jackiw, N. (1991) The *Geometer's Sketchpad* (Computer Software). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Mariotti, M. A. (2002) *Influences of technology advances in students' math learning*. In Handbook of International Research in Mathematics Education", chapter 29, pp. 757-786. Edited by L. D. English. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey. Available on line from http://telma.no-kaleidoscope.org/outcomes/papers

Olive, J. (2000) Using Dynamic Geometry Technology: Implications for Teaching, Learning &Research. In M. O. J. Thomas (Ed.) *Proceedings of TIME 2000. An International Conference on Technology in Mathematics Education,* 226235. Auckland, New Zealand

Olivero, F. (2002) *The proving process within a dynamic geometry environment*, PhD thesis, Bristol, UK: University of Bristol, Graduate School of Education

Patsiomitou,S , Koleza, E. (in press) The development of students geometrical thinking through linking visual active representations. *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics. University of Crete*. Department of Education.

Patsiomitou, S., (2008). The development of students geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. *Issues in Informing Science and Information Technology journal*. Eds. (Eli Cohen & Elizabeth Boyd) Vol.5 pp. 353-393 Published by the Informing Science Institute Santa Rosa, California USA. (in press) available on line http://iisit.org/IssuesVol5.htm

Rabardel, P. (1995) Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains, Armand Colin, Paris.

Sedig, K., Sumner, M. (2006) Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*,11:1-55 New York: Springer.

Trouche, L.(2004) Managing the complexity of the human/machine interaction in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9, pp. 281-307, Kluwer academic publishers.*

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995) Cognition and Artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education, 10 (1)*, pp. 77-101.