

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2025)

14ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»



Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα: Μπορεί η Παραγωγική Μορφή τους να Καλλιεργήσει τη Μαθηματική Σκέψη; Μια Έρευνα με Μαθητές/τριες Γυμνασίου

Αριστείδης Βαγγελάτος, Μαρία Γιαννίση, Δημήτρης Κωνσταντάκος, Ζαχαρούλα Σμυρναίου

doi: [10.12681/cetpe.9482](https://doi.org/10.12681/cetpe.9482)

Βιβλιογραφική αναφορά:

Βαγγελάτος Α., Γιαννίση Μ., Κωνσταντάκος Δ., & Σμυρναίου Ζ. (2026). Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα: Μπορεί η Παραγωγική Μορφή τους να Καλλιεργήσει τη Μαθηματική Σκέψη; Μια Έρευνα με Μαθητές/τριες Γυμνασίου. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, 1, 300–309. <https://doi.org/10.12681/cetpe.9482>

Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα: Μπορεί η Παραγωγική Μορφή τους να Καλλιεργήσει τη Μαθηματική Σκέψη; Μια Έρευνα με Μαθητές/τριες Γυμνασίου

Αριστείδης Βαγγελάτος¹, Μαρία Γιαννίση¹, Δημήτρης Κωνσταντάκος¹,
Ζαχαρούλα Σμυρναίου²

vagelat@cti.gr, mgiannisi@cti.gr, dkonstantakos@cti.gr, smyrnaiou@cti.gr

¹Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος"

²Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων "Διόφαντος"/Παιδαγωγικό Τμήμα
Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Η Τεχνητή Νοημοσύνη (TN) μεταμορφώνει ραγδαία την εκπαίδευση, ειδικά στον τομέα των Μαθηματικών. Με την ικανότητά της να αναλύει δεδομένα και να προσαρμόζεται, η TN προσφέρει εξατομικευμένες μαθησιακές εμπειρίες που παλαιότερα ήταν αδύνατες. Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζουμε ένα πείραμα, με μαθητές/τριες Γυμνασίου, που είχε σκοπό να διερευνήσει τη συνδρομή στην καλλιέργεια των απαραίτητων δεξιοτήτων για την κατανόηση και επίλυση Ρεαλιστικών Μαθηματικών Προβλημάτων, τεσσάρων διαφορετικών εργαλείων TN, που ανήκουν στην κατηγορία των Μεγάλων Γλωσσικών Μοντέλων (ΜΓΜ). Τα εργαλεία έδρασαν ως εκπαιδευτικοί βοηθοί μέσω προτροπής (prompt) η οποία βασίστηκε αφενός σε μεθόδους προτεινόμενες από ερευνητές της TN (role assigning, chain of thought, few-shot prompt) αφετέρου στην παιδαγωγική προσέγγιση της Ενεργούς Μάθησης. Η εργασία ανέδειξε ότι τα ΜΓΜ, όταν αξιοποιούνται με δομημένες προτροπές και σαφείς παιδαγωγικούς ρόλους ενισχύουν τη στρατηγική σκέψη, τη μεταγνωστική επίγνωση και την αυτοπεποίθηση μαθητών/τριών σε μαθηματικά προβλήματα. Είναι απαραίτητο να διασφαλίσουμε ότι η τεχνολογία συμπληρώνει και ενισχύει τον ρόλο του/της εκπαιδευτικού. Η σωστή ενσωμάτωση της TN μπορεί να καλλιεργήσει μια νέα γενιά μαθητών/τριών με βαθύτερη κατανόηση και αγάπη για τα Μαθηματικά.

Λέξεις κλειδιά: έρευνα με μαθητές/τριες Γυμνασίου, Μαθηματική Σκέψη, Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα, Τεχνητή Νοημοσύνη

Εισαγωγή

Η τεχνολογία χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο στην εκπαίδευση, συμπεριλαμβάνοντας εκτός των άλλων και τα Μαθηματικά (Moundridou et al., 2024) και μετασχηματίζει τα περιβάλλοντα μάθησης, επηρεάζοντας εκπαιδευτικούς και μαθητές/τριες. Ένα παράδειγμα τέτοιας τεχνολογίας είναι οι εφαρμογές Μεγάλων Γλωσσικών Μοντέλων (ΜΓΜ) - Large Language Models (LLMs) που βασίζονται στην Τεχνητή Νοημοσύνη (TN) και σε στοιχεία της Μηχανικής Μάθησης (MM) - Machine Learning (ML). Αυτά τα μοντέλα έχουν αναπτυχθεί για να επεξεργάζονται και να παράγουν ανθρώπινο λόγο και να αποκρίνονται με όσο το δυνατόν πιο σχετικό περιεχόμενο. Στον σκοπό αυτό συνεισφέρει και η μηχανική των προτροπών (prompt engineering), ο τρόπος δηλαδή που θα τους δοθεί μια οδηγία/ερώτημα/προτροπή. Ως αποτέλεσμα βελτιώνεται η ακρίβειά τους και ενισχύεται η παρουσία τους στον εκπαιδευτικό χώρο, τόσο στη διδασκαλία όσο και στη μάθηση. Η συμβολή τους μπορεί να συνδεθεί με τον σχεδιασμό μαθημάτων, με τη δημιουργία παρουσιάσεων και την παραγωγή κειμένου, με τη δημιουργία αξιολογήσεων για τους/τις μαθητές/τριες, με τη δημιουργία εξειδικευμένων chatbot για να ανταποκρίνονται σε συγκεκριμένα ζητήματα (διαφοροποιημένη διδασκαλία, προσωπικός βοηθός, κ.α.) όπως περιγράφεται αναλυτικά και στην εργασία (Moundridou et al., 2024).

Τέτοια παραδείγματα ΜΓΜ είναι το ChatGPT, το Gemini AI, η προσθήκη του Wolfram Alpha στο ChatGPT (η ενσωμάτωση μαθηματικών εργαλείων σε ΜΓΜ που δείχνει να ενισχύει την ικανότητα του ChatGPT να λύνει προβλήματα Μαθηματικών (Davis & Aaronson, 2023), καθώς και το στοχευμένο εργαλείο MagicSchool, το οποίο πρόσφατα ανακοίνωσε ότι χρησιμοποιείται από περισσότερους από δύο εκατομμύρια εκπαιδευτικούς (MagicSchool, 2024) δημιουργώντας υψηλές προσδοκίες για υποστήριξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών (Beauchamp & Walkington, 2024). Τα εργαλεία αυτά μελετώνται στην παρούσα εργασία, μέσα από μια έρευνα στη χρήση τους από μαθητές/τριες ώστε να κατανοηθεί καλύτερα ο αντίκτυπος της παρουσίας ενός "ψηφιακού βοηθού" στην κατανόηση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, καθώς και να αναδειχθεί η διδακτική και παιδαγωγική αποτελεσματικότητά τους (ή μη), πάντα σε συνάρτηση με την υποστήριξη γλώσσας διαφορετικής της Αγγλικής, όπως είναι στην περίπτωση μας η Ελληνική.

Το ΙΤΥΕ "Διόφαντος", στο πλαίσιο της υλοποίησης του έργου των Κέντρων Καινοτομίας - ΚΚ (ic.cti.gr), αναπτύσσει εκτός των άλλων εκπαιδευτικό περιεχόμενο για να το αξιοποιήσει στη λειτουργία τους. Η παρούσα εργασία διερευνώντας τον τρόπο αξιοποίησης της ΤΝ στην εκπαιδευτική διαδικασία και ειδικά στα Μαθηματικά, συνεισφέρει στην επιστημονική γνώση σε θέματα σχετικά με την εκπαιδευτική αξιοποίηση ψηφιακών εφαρμογών και την παραγωγή ψηφιακού εκπαιδευτικού περιεχομένου με χρήση ΤΝ που αποτελεί και ένα ευρύτερο πεδίο έρευνας.

Θεωρητικό πλαίσιο

Τι είναι τα Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα;

Τα ΜΓΜ είναι μοντέλα μηχανικής μάθησης σχεδιασμένα για επεξεργασία φυσικής γλώσσας, με δυνατότητες κατανόησης και παραγωγής κειμένου σε φυσική γλώσσα (IBM, 2025). Τα ΜΓΜ αποκτούν αυτές τις "ικανότητες" αποθηκεύοντας ("μαθαίνοντας" κατά άλλους) στατιστικές σχέσεις από μεγάλης έκτασης κειμενικά έγγραφα μέσω μιας υπολογιστικά εντατικής διαδικασίας εκπαίδευσης. Τα ΜΓΜ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή κειμένου, μια μορφή παραγωγικής τεχνητής νοημοσύνης, λαμβάνοντας ένα κείμενο εισόδου και παράγοντας κείμενο με νόημα, προβλέποντας επανειλημμένα το επόμενο σύμβολο, λέξη ή φράση.

Ξεκίνησαν πριν από δεκαετίες, όταν οι επιστήμονες έκαναν τις πρώτες προσπάθειες να προσδώσουν "νοημοσύνη" σε ένα υπολογιστικό σύστημα και να δομήσουν διαλόγους ανθρώπου-μηχανής μέσω κανόνων αποσύνθεσης/επανασύνθεσης φράσεων. Συγκεκριμένα, το 1966 με το ELIZA, ένα απλό chatbot, ξεκίνησε η "δόμηση" συνομιλίας χρησιμοποιώντας προκαθορισμένους προγραμματιστικούς κανόνες χωρίς πραγματική κατανόηση. Τη δεκαετία του 1980, η προσέγγιση βάσει κανόνων υποχώρησε υπέρ της χρήσης των στατιστικών μοντέλων. Τη δεκαετία του 1990, τα επαναλαμβανόμενα νευρωνικά δίκτυα (RNNs) εισήγαγαν τη δυνατότητα επεξεργασίας ακολουθιακών δεδομένων. Το 2010, εργαλεία όπως το CoreNLP του Στάνφορντ βοήθησαν τους ερευνητές να επεξεργάζονται αποτελεσματικότερα το κείμενο. Η επανάσταση της ΤΝ απέκτησε δυναμική το 2011 με το Google Brain, το οποίο αξιοποίησε τα μεγάλα δεδομένα και τη βαθιά μάθηση για προηγμένη γλωσσική επεξεργασία. Στη συνέχεια, η Google εισήγαγε τους Transformers φέρνοντας επανάσταση στα LLM. Η σειρά GPT του OpenAI (2018-2025) μεταμόρφωσε την παραγωγή κειμένου με τεχνητή νοημοσύνη, ενώ πλατφόρμες όπως το Hugging Face και το LLaMA της Meta έκαναν ευρέως προσβάσιμες τα LLM ανοιχτού κώδικα. Σήμερα μερικά ευρέως χρησιμοποιούμενα ΜΓΜ είναι η σειρά GPT της OpenAI, το Gemini της Google, η οικογένεια

μοντέλων LLaMA της Meta, τα μοντέλα Claude της Anthropic και τα μοντέλα της Mistral AI (Βαγγελάτος, 2024).

Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Μελέτες παρουσιάζουν ότι τα προηγμένα ΜΓΜ, όπως το ChatGPT, επιδεικνύουν αυξημένες δυνατότητες στην επίλυση και την επεξήγηση αλγεβρικών και υπολογιστικών προβλημάτων, ωστόσο η αξιοπιστία τους στις απαντήσεις δεν είναι πάντοτε εγγυημένη. Για παράδειγμα, όσο αυξάνεται η πολυπλοκότητα, τόσο οι απαντήσεις που δίνονται δεν χαρακτηρίζονται πάντα ως αξιόπιστες (Plevris et al., 2023). Σε μία άλλη μελέτη (Dao & Le, 2023) έγινε αξιολόγηση του δημοφιλούς ΜΓΜ ChatGPT σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για τις Εθνικές Εξετάσεις Αποφοίτησης Λυκείου με θεματικές ενότητες που αφορούσαν διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Τα αποτελέσματα της μελέτης ήταν αρκετά καλά σε χαμηλής πολυπλοκότητας προβλήματα και χειροτέρευαν όσο αύξανε η πολυπλοκότητα τους.

Παρόμοιες δυνατότητες δημιουργίας περιεχομένου σχετικές με τα Μαθηματικά φαίνεται να προσφέρει και το άλλο ΜΓΜ, το Gemini AI, που επιτρέπει τη δημιουργία μαθημάτων διανθισμένων με διαδραστικό περιεχόμενο. Όμως κι εδώ είναι απαραίτητη η συμμετοχή ενός ικανού εκπαιδευτικού με κριτική σκέψη, ώστε να περιορίσει τις παρανοήσεις και τις τυχόν αδυναμίες του ΜΓΜ (Bessas et al., 2025). Αντίστοιχα λειτουργεί και το ChatGPT με την ενσωμάτωση του Wolfram Alpha που φαίνεται να βελτιώνει την αποτελεσματικότητά του (Raftery, 2023) σε όμοιου τύπου προβλήματα, μαθηματικών ή ευρύτερα επιστημονικών (Davis et al., 2023). Τέλος γίνεται περισσότερο αποδεκτό από την εκπαιδευτική κοινότητα το εργαλείο TN MagicSchool που προσφέρει ένα εύρος υποστηρικτικών λύσεων στη διδασκαλία όπως η δημιουργία μαθημάτων, αξιολογήσεων και άλλα (Kiryakona, 2024).

Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα σε αλληλεπίδραση με τους/τις μαθητές/τριες

Η μαθηματική κοινότητα εξοικειώνεται όλο και περισσότερο με διαδικτυακές πλατφόρμες μάθησης, δημιουργώντας γνώση μέσα από την αλληλεπίδραση (Jou et al., 2016). Προς αυτήν την κατεύθυνση, τα ΜΓΜ με τις δυνατότητες που έχουν στην παραγωγή λόγου καθώς και στις στοχευμένες απαντήσεις ενισχύουν την αλληλεπίδραση των μαθητών/τριών με την τεχνολογία. Συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες φαίνεται να λαμβάνουν προσωποποιημένες εμπειρίες μάθησης όταν μελετούν ή συνεργάζονται σε ομαδικές εργασίες μέσω εργαλείων TN (Seo et al., 2021). Στην περίπτωση της ομαδικής εργασίας, μπορεί να αποτυπωθεί και η "συνεργατική διάσταση" των ΜΓΜ. Οι μαθητές/τριες δίνουν απαντήσεις άλλοτε μεμονωμένα και άλλοτε ως αποτέλεσμα συνεργασίας και κοινής διερεύνησης προβάλλοντας ερωτήματα και ιδέες. Αυτή η συνεργατική διάσταση των ΜΓΜ αναφέρεται στη δυνατότητά τους να ενισχύουν τη μαθητική αλληλεπίδραση και την από κοινού κατασκευή της γνώσης, και ευθυγραμμίζεται με τη θεωρία της κοινωνικοπολιτισμικής μάθησης (Vygotsky & Cole, 1978). Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των ΜΓΜ είναι η παραγωγή διαφόρων τύπων αξιολογήσεων είτε μέσω γρίφων είτε μέσω αξιολόγησης βασισμένης σε δραστηριότητα (Baytak, 2024), και βοηθάει τους/τις μαθητές/τριες να λύσουν βήμα προς βήμα σύνθετα προβλήματα (Shum et al., 2023). Με αυτό τον τρόπο τα ΜΓΜ λειτουργούν ως "Προσωπικοί Βοηθοί" (Personal Agents) που εμπλέκουν μαθητές/τριες σε διαλογικές συζητήσεις, οι οποίες θα αναφέρονται ως αλληλεπιδράσεις, σχετικές με μαθηματικές έννοιες και φαίνεται να λειτουργούν βοηθητικά αποσαφηνίζοντας παρανοήσεις και εκφράζοντας αποτελεσματικότερα τον μαθηματικό συλλογισμό (Wu et al., 2023).

Ρεαλιστικά μαθηματικά προβλήματα και ΜΓΜ: Παιδαγωγικές διαστάσεις

Τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά Προβλήματα (ΡΜΠ) αποτελούν σημαντικό μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης, καθώς απαιτούν από τους/τις μαθητές/τριες να συνδέσουν τις μαθηματικές έννοιες με πραγματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής (Schoenfeld, 1985). Τα προβλήματα αυτά απαιτούν τη μετατροπή πραγματικών σεναρίων σε μαθηματικές αναπαραστάσεις, συμβάλλοντας στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών/τριών να αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα και τη σημασία των Μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο (Verschaffel et al., 2000). Αντίστοιχα, επισημαίνεται η σημασία της μεταγνωστικής παρακολούθησης, της λήψης αποφάσεων κατά την επίλυση και της ευελιξίας στη χρήση στρατηγικών ως κρίσιμα στοιχεία για την επιτυχία σε μη τυπικά ή ανοικτού τύπου μαθηματικά προβλήματα (Schoenfeld, 1992). Παράλληλα, έρευνες δείχνουν ότι η χρήση ανοιχτών ερωτήσεων ενισχύει την ικανότητα των μαθητών/τριών να εξετάζουν διαφορετικές προσεγγίσεις και να εμβαθύνουν στη μαθηματική κατανόηση (Small, 2024). Παρά το όφελι των ΡΜΠ στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών από τους/τις μαθητές/τριες, η πολυπλοκότητα της γλώσσας και οι απαιτήσεις του προβλήματος για σύνθετη σκέψη και στρατηγικές που δεν έχουν αναπτύξει πλήρως ενδέχεται να δυσχεράνουν τη μαθησιακή εμπειρία (Sweller, 1988; Mayer, 1992).

Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκαν ΡΜΠ παρόμοια με αυτά που δίνονται στον εθνικό αλλά και σε παγκόσμιους διαγωνισμούς PISA. Η επίλυση των οποίων προϋποθέτει την ανάπτυξη σύνθετων γνωστικών δεξιοτήτων από τους/τις μαθητές/τριες. Σύμφωνα με το πλαίσιο αξιολόγησης του PISA (OECD, 2019), οι βασικές ικανότητες περιλαμβάνουν: (α) την κατανόηση του προβλήματος, δηλαδή την ικανότητα εντοπισμού των δεδομένων, των ζητούμενων και των σχέσεων μεταξύ τους, (β) την επιλογή κατάλληλης στρατηγικής επίλυσης, όπως η χρήση αλγεβρικών μοντέλων ή γεωμετρικών συλλογισμών, (γ) την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όπως τύπων, πράξεων ή μετασχηματισμών, και (δ) τον έλεγχο και αξιολόγηση της λύσης, περιλαμβανομένης της λογικής ερμηνείας των αποτελεσμάτων και της επαλήθευσης της ορθότητάς τους. Η επιλογή των θεμάτων βασίστηκε αφενός σε υλικό διαθέσιμο στον ελληνικό εκπαιδευτικό χώρο (Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής – ΙΕΠ και Τράπεζα Θεμάτων Skills4Life του Υπουργείου Παιδείας), αφετέρου σε διεθνείς συλλογές προβλημάτων ή διεθνείς εκπαιδευτικές πηγές (<https://tinyurl.com/2bnsxs53>).

Ως Παιδαγωγική Προσέγγιση επιλέχθηκε αυτή της Ενεργούς Μάθησης, που βασίζεται στις αρχές της α) Ενεργούς Συμμετοχής που περιλαμβάνει τη δράση, τις αποφάσεις, τη λεκτική/μη λεκτική συμβολή του/της μαθητή/τριας, β) της Αλληλεπίδρασης που αφορά τη δυναμική ανταλλαγή μεταξύ μαθητών/τριών και περιβάλλοντος μάθησης (εκπαιδευτικού, συμμαθητών, εργαλείων) γ) της Κριτικής Σκέψης που αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών/τριών να αξιολογούν, να συγκρίνουν, να αμφισβητούν ή να στηρίζουν ιδέες με τεκμήρια, δ) της Εφαρμογής της Γνώσης που σχετίζεται με την αξιοποίηση της θεωρητικής γνώσης σε πραγματικά ή προσομοιωμένα σενάρια, ώστε να εδραιωθεί η κατανόηση μέσω εμπειρίας και ε) του Αναστοχασμού που περιγράφει τη διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές/τριες στοχάζονται πάνω στην εμπειρία τους, αξιολογούν τη μάθησή τους και αναγνωρίζουν τα λάθη και τις αλλαγές στη σκέψη τους.

Η έρευνα

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, υλοποιήθηκε έρευνα σε μαθητές/τριες Γυμνασίου το δεύτερο τετράμηνο του σχολικού έτους 2024-25. Στην έρευνα αυτή, εξετάστηκε η ικανότητα των ΜΓΜ να αναγνωρίσουν το πρόβλημα που τους παρουσιάστηκε, να το κατανοήσουν και

να εντοπίσουν τρόπους επίλυσής του, δρώντας κατά κύριο λόγο ως βοηθοί-καθοδηγητές του/της μαθητή/τριας. Το κύριο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε είναι αν μπορούν τα εργαλεία ΤΝ, μέσω της προτροπής που τους δίνεται, να καθοδηγήσουν τους/τις μαθητές/τριες να λύσουν προβλήματα όπως θα έκανε ένας/μία εκπαιδευτικός σε μια τάξη, ενισχύοντας τη μαθηματική σκέψη και τις μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών/τριών βάσει της ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων (αλληλεπιδράσεις μαθητή/τριας με τα ΜΓΜ).

Ανάλυση δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν 14 μαθητές/τριες της Β' Γυμνασίου από δημόσιο σχολείο οι οποίοι/ες χωρίστηκαν σε τέσσερις ομάδες και χρησιμοποίησαν τα ΜΓΜ: το ChatGPT, το Gemini AI, το Wolfram Alpha στο ChatGPT, καθώς και το εργαλείο TN MagicSchool και συγκεκριμένα τη λειτουργία "student support bot". Οργανώθηκαν συναντήσεις από την εκπαιδευτικό στο σχολείο των παιδιών και συγκεκριμένα στο Εργαστήριο Πληροφορικής. Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της έρευνας παρουσιάστηκε στην πρώτη συνάντηση, όπου οι μαθητές/τριες παρακολούθησαν σύντομα, κατατοπιστικά βίντεο σχετικά με τα Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα και τα chatbots και συζητήθηκε ο στόχος της εργασίας. Σε επόμενη συνάντηση, δόθηκε η προτροπή της καθοδήγησης (Vagelatos et al., 2025) και οι ομάδες των μαθητών/τριών ξεκίνησαν την αλληλεπίδραση ανεβάζοντας στο εργαλείο ΤΝ το πρόβλημα "Διαμερίσματα Διακοπών" (OECD, 2025) το οποίο στοχεύει να ενισχύσει την αντίληψή τους σχετικά με ΡΜΠ. Με αυτόν τον τρόπο πραγματοποιήθηκε μια καταγραφή της ικανότητας των εργαλείων να αναγνωρίσουν το πρόβλημα που τους παρουσιάστηκε, να το κατανοήσουν, να εντοπίσουν τρόπους επίλυσής του, και τέλος να δράσουν ως καθοδηγητές και "έμπειροι εκπαιδευτικοί" ώστε να καλλιεργήσουν τις απαραίτητες γνωστικές δεξιότητες αλλά και το κατάλληλο κλίμα εμπιστοσύνης.

Οι αλληλεπιδράσεις με τα εργαλεία αποθηκεύτηκαν και αποτελούν τα ποιοτικά δεδομένα της έρευνας (Giannisi et al., 2025). Η ανάλυση αυτών καταδεικνύει τις δυνατότητες αλλά και τις αδυναμίες των εργαλείων να ανταποκριθούν στους ανατιθέμενους ρόλους καθώς και την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα πάνω σε αντίστοιχα θέματα.

Προτροπή και απάντηση

Η δημιουργία της προτροπής (Vagelatos et al., 2025) έγινε με βάση τη βιβλιογραφία. Συντάχθηκε με τρόπο ώστε το ΜΓΜ να υιοθετήσει έναν συγκεκριμένο ρόλο και να παράγει στοχευμένες, λειτουργικές και παιδαγωγικά επωφελείς απαντήσεις για να ενισχυθεί η Ενεργός Μάθηση και να ενδυναμωθούν οι απαραίτητες δεξιότητες για την επίλυση προβλημάτων PISA όπως αυτές παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη ενότητα. Για τον λόγο αυτό, στην προτροπή αναφέρεται ότι η εφαρμογή θα πρέπει να ρωτήσει τους/τις μαθητές/τριες ποιοι είναι οι μαθησιακοί τους στόχοι και ποιες εμπειρίες έχουν σε σχέση με τα μαθηματικά προβλήματα, ώστε να ενισχύσει την Αλληλεπίδραση και την Ενεργό Συμμετοχή των μαθητών/τριών με το μοντέλο. Επιπρόσθετα, στην προτροπή δόθηκαν, μέσω παραδειγμάτων, οι βασικοί στόχοι της καθοδήγησης που είναι (α) η Κατανόηση του προβλήματος, μέσω ερωτήσεων ανοιχτού τύπου και στρατηγικού συλλογισμού, (β) η ενθάρρυνση δημιουργίας σχεδίου επίλυσης, ενισχύοντας την Κριτική Σκέψη (γ) η Εφαρμογή της Γνώσης στην επίλυση ρεαλιστικών μαθηματικών προβλημάτων τύπου PISA, και (δ) ο Έλεγχος και ο Αναστοχασμός, ώστε το μοντέλο να ωθήσει τον/τη μαθητή/τρια να επανεξετάσει, να δικαιολογήσει ή και να αναθεωρήσει τη συλλογιστική του/της (Bonwell & Eison, 1991· Prince, 2004). Επιπλέον εφαρμόστηκε η τεχνική της ανάθεσης ρόλου (Mollick & Mollick, 2023) και της προτροπής με λίγα παραδείγματα που έχει αναφερθεί να ενισχύει την

ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα των απαντήσεων. Τέλος, η προτροπή εμπεριέχει κανόνες καθοδήγησης ώστε τα ΜΓΜ να επιλύουν σταδιακά το πρόβλημα, να δίνουν ευκαιρίες όταν μια απάντηση δεν είναι σωστή και να επιβραβεύουν όταν είναι.

Η ίδια προτροπή δόθηκε και στα τέσσερα διαφορετικά εργαλεία (εφαρμογές) ΤΝ, το ChatGPT, το Gemini AI, το MagicSchool και το ChatGPT με την ενσωμάτωση του Wolfram Alpha, με στόχο την καθοδήγηση και την επίλυση του προβλήματος. Έπειτα "ανέβηκε" το πρόβλημα "Διαμερίσματα Διακοπών" (OECD, 2025), και ξεκίνησε η διεξαγωγή τεσσάρων αλληλεπιδράσεων (μια σε κάθε ομάδα μαθητών/τριών. Η αφετηρία ήταν κοινή, οι αλληλεπιδράσεις όμως εξελίσσονταν δυναμικά ανάλογα με τη στρατηγική επίλυσης που επέλεγε το κάθε εργαλείο ΤΝ και τη συμμετοχή κάθε ομάδας μαθητών/τριών. Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η ελληνική γλώσσα για την επικοινωνία.

Αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα, η ανάλυση εστιάζει στην αποτελεσματικότητα των ΜΓΜ να υιοθετούν μια προτροπή και να την εφαρμόζουν στην αλληλεπίδραση με τους/τις μαθητές/τριες. Επιπρόσθετα, εντοπίζονται οι βασικές δεξιότητες που απαιτούνται για την επίλυση των ΡΜΠ και καλλιεργούνται από τη χρήση εργαλείων ΤΝ καθώς και τα διδακτικά χαρακτηριστικά που αναπτύσσονται στο πλαίσιο των αλληλεπιδράσεων ΜΓΜ και μαθητών/τριών (βλέπε ως παράδειγμα διάλογο με ChatGPT (Giannisi & Konstantakos, 2025). Με αυτόν τον τρόπο, αναδεικνύονται διαφοροποιήσεις στην καθοδήγηση, στη συμμετοχή των μαθητών/τριών και στον βαθμό ενεργοποίησης της κριτικής τους σκέψης, στοιχεία που δείχνουν τις δυνατότητες και τα όρια των ΜΓΜ ως παιδαγωγικά εργαλεία υποστήριξης.

Συνέπεια των εργαλείων ΤΝ στην προτροπή

Τα εργαλεία ΤΝ υιοθέτησαν την προτροπή ως προς την καθοδήγηση, ωστόσο δεν επέδειξαν την ίδια συνέπεια. Το Gemini AI παρουσίασε μια ομαλή καθοδηγητική αλληλεπίδραση με τους/τις μαθητές/τριες, θέτοντας ερωτήματα για τους στόχους τους (Giannisi & Konstantakos, 2025), αναλύοντας τμηματικά το πρόβλημα με επεξηγήσεις και ερωτήματα αξιολογώντας και επιβραβεύοντας τις απαντήσεις τους (Giannisi & Konstantakos, 2025). Τα υπόλοιπα εργαλεία έθεσαν ερωτήματα για τους στόχους των μαθητών/τριών, ωστόσο στην επίλυση των ερωτημάτων φάνηκε να "απαίτησαν" την ενεργή ανάδραση από τους/τις μαθητές/τριες για να επανέλθουν στις κατευθύνσεις της προτροπής. Σε ορισμένες περιπτώσεις η τμηματική επίλυση της άσκησης αποδόθηκε αποτελεσματικά μετά την ανάδραση (Giannisi & Konstantakos, 2025). Στην περίπτωση του MagicSchool, το εργαλείο ΤΝ δεν ευθυγραμμίστηκε πλήρως με την προτροπή καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης. Σε κάποιες περιπτώσεις, η συνοχή της καθοδήγησης διακόπτονταν καθώς η ανάδραση των μαθητών/τριών δεν ήταν σχετική με το ερώτημα που τους έθετε, αλλά με την οδηγία που υπήρχε στην προτροπή να προχωρήσει στο επόμενο βήμα (Giannisi & Konstantakos, 2025).

Ενίσχυση βασικών δεξιοτήτων με χρήση των εργαλείων ΤΝ

Η ανταπόκριση των τεσσάρων εργαλείων ΤΝ στην ενίσχυση δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων (OECD, 2019) μέσω των διαλογικών αλληλεπιδράσεων αξιολογείται θετικά. Όλα τα εργαλεία "κατόνησαν" το πρόβλημα, παρουσίασαν τα βασικά δεδομένα του, αποτόπωσαν μια στρατηγική επίλυσης αιτιολογώντας την επιλογή τους, προχώρησαν στην εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών και αξιολόγησαν τις απαντήσεις των μαθητών/τριών, επιβραβεύοντας τις ορθές και ενθαρρύνοντας τον αναστοχασμό για τις

λανθασμένες (Giannisi & Konstantakos, 2025). Ως προς την ενίσχυση από τα ΜΓΜ της ικανότητας των μαθητών/τριών να επιλέγουν οι ίδιοι/ες τις σωστές υπολογιστικές τεχνικές και έπειτα να εφαρμόζουν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες ανταποκρίθηκε αποτελεσματικά το Gemini AI (Giannisi & Konstantakos, 2025). Μικρές διαφοροποιήσεις παρατηρήθηκαν στα άλλα τρία εργαλεία ΤΝ. Συγκεκριμένα, το ChatGPT προτίμησε την προσέγγιση να αποτυπώνει τα δεδομένα του προβλήματος, να διακρίνει τα ζητούμενά του και να θέτει στους/στις μαθητές/τριες τα βασικά ερωτήματα, ειδικά μετά την ανάδραση των μαθητών/τριών για μεγαλύτερη συμμετοχή στην επίλυση (Giannisi, 2025). Όμοια συμπεριφέρθηκε και το WolframGPT με τους/τις μαθητές/τριες να απαντούν στις εκάστοτε ερωτήσεις του εργαλείου ΤΝ και να οδηγούνται στη λύση της άσκησης βήμα-βήμα. Να σημειωθεί εδώ, ότι οι μαθητές/τριες εξέφρασαν μια απορία σχετικά με μια άγνωστη νομισματική μονάδα στα δύο προαναφερθέντα ΜΓΜ κατά τη διαδικασία επίλυσης που όμως δεν επηρέασε την γενικότερη ροή, παρότι ήταν λίγο διαφοροποιημένη (Giannisi & Konstantakos, 2025). Από την άλλη, το MagicSchool παρουσίασε κι αυτό τα δεδομένα, επεξήγησε το πρόβλημα τμηματικά παραθέτοντας τη στρατηγική επίλυση και εκτελώντας τους υπολογισμούς, αλλά με μικρότερη συχνότητα ερωτημάτων που, σε συνδυασμό με τη μη επεμβατική στάση των μαθητών/τριών, αποτυπώνει τη μικρότερη ενεργό συμμετοχή τους στην ανάπτυξη της λύσης και άρα στην πιθανή ενίσχυση των δεξιοτήτων (Giannisi & Konstantakos, 2025). Κατά συνέπεια, αποτυπώθηκε η ενεργοποίηση της κριτικής σκέψης των μαθητών/τριών να αξιολογήσουν δεδομένα, να προτείνουν τη δική τους επίλυση και στη συνέχεια, με συμπληρωματικές ερωτήσεις του εργαλείου ΤΝ, να εφαρμόσουν μαθηματικές διαδικασίες και να ελέγξουν τα παρεχόμενα αποτελέσματά τους.

Διδακτικά χαρακτηριστικά της Ενεργούς Μάθησης στις αλληλεπιδράσεις

Κατά την εξέλιξη των αλληλεπιδράσεων φαίνονται να αναδεικνύονται οι διδακτικές διαστάσεις των αλληλεπιδράσεων. Παρότι καταγράφονται επιμέρους διαφοροποιήσεις, η παρατήρηση αυτή φαίνεται να ισχύει για όλα τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν (Giannisi & Konstantakos, 2025). Το Gemini AI έδειξε να λειτουργεί εμπυχωτικά και να παρακινεί τη γνωστική και ψυχοκινητική εμπλοκή των μαθητών/τριών, ενώ φαίνεται να ενεργοποιεί την κριτική σκέψη τους. Το τελευταίο αποτυπώνεται στις απαντήσεις τους να αιτιολογούν τις επιλογές τους με πράξεις. Επιπλέον, το μοντέλο ενθάρρυνε τον αναστοχασμό. Όταν μια απάντηση δεν είναι σωστή, το εργαλείο ΤΝ εντοπίζει το σημείο που έγινε το λάθος και βοηθάει με παρατηρήσεις στην επαναξιολόγηση του (Giannisi & Konstantakos, 2025). Όμοια φαίνεται να συμπεριφέρεται και το ChatGPT και το WolframGPT. Το καθένα ξεχωριστά θέτει ερωτήσεις κατανόησης και αναμένει απάντηση, υποστηρίζει την ικανότητα ανάπτυξης των ιδεών σε τεκμήρια παρέχοντας μάλιστα παραδείγματα, ενώ ζητά από τους/τις μαθητές/τριες να υπολογίσουν το αποτέλεσμα, ώστε να εφαρμόσουν την θεωρητική γνώση, ενώ τέλος αξιολογεί τις απαντήσεις τους και ανάλογα τους επιβραβεύει ή τους επεξηγεί το λάθος τους. Να υπογραμμίσουμε ότι και η απαίτηση των μαθητών/τριών προς το εργαλείο για μεγαλύτερη συμμετοχή αποδεικνύει την ενεργοποίηση της εμπλοκής τους (Giannisi & Konstantakos, 2025). Ολοκληρώνοντας, αξίζει να σημειωθεί ότι και το MagicSchool έδειξε να διευκολύνει, με ερωτήματα που έθετε, τη συμμετοχή των μαθητών/τριών στην επίλυση και να προωθεί την εφαρμογή της θεωρητικής γνώσης. Παράλληλα, έγινε εμφανές ότι συνετέλεσε και στην ενεργοποίηση της κριτικής σκέψης και τον αναστοχασμό, μέσα από παρατηρήσεις που πραγματοποίησε και την αιτιολόγηση που έδωσε (Giannisi & Konstantakos, 2025).

Γλώσσα αλληλεπιδράσεων και ακρίβεια της λύσης των ΜΓΜ

Όλες οι αλληλεπιδράσεις διεξήχθησαν αποκλειστικά στην ελληνική γλώσσα, και παρά την παρουσία ορθογραφικών λαθών (typos), λαθών στον τονισμό, στη χρήση συντομογραφιών και την αντικατάσταση μαθηματικών συμβόλων με λεκτικές περιγραφές από την μεριά των μαθητών/τριών και τη χρήση μη συνηθισμένων φράσεων στην ελληνική από την μεριά των εργαλείων όπως "Πάμε λοιπόν με βήματα-ψαλίδι να κόψουμε το πρόβλημα:", δεν παρατηρήθηκε αρνητική επίδραση των παραπάνω στη διαδικασία καθοδήγησης και επίλυσης (Giannisi & Konstantakos, 2025).

Η ακρίβεια των εργαλείων στην επίλυση του προβλήματος ήταν υψηλή καθώς κανένα από αυτά τα εργαλεία δεν έδωσε λάθος απαντήσεις, παρόλο που η μορφή των δυο ερωτημάτων του προβλήματος διέφερε: το πρώτο ήταν απάντηση ανάπτυξης βασισμένη στη σύγκριση και το δεύτερο ήταν απάντηση σωστού-λάθους (OECD, 2025).

Συμπεράσματα-συζήτηση

Στην εργασία αυτή, μέσω της έρευνας που υλοποιήθηκε, διαπιστώσαμε ότι τα ΜΓΜ ανταποκρίθηκαν στην προτροπή που τους δόθηκε με τρόπο ώστε οι μαθητές/τριες να ελέγχουν, να ανιχνεύουν τα λάθη τους, να αναστοχάζονται και να αποφασίζουν συνεργατικά ποια πληροφορία είναι χρήσιμη, ποια στρατηγική επίλυσης να εφαρμόσουν ανά περίπτωση κι αν η λύση που βρίσκουν είναι λογική και τεκμηριωμένη, καλλιεργώντας τις μεταγνωστικές δεξιότητες, (Flavell, 1979· Schoenfeld, 1985), καθώς επίσης και την επιχειρηματολογία και την επικοινωνία της μαθηματικής σκέψης (Sfard, 2008). Επιπλέον φάνηκε να ενισχύεται η μαθηματική μοντελοποίηση, όταν τα εργαλεία ζητούσαν από τους/τις μαθητές/τριες να εφαρμόσουν υπολογιστικές στρατηγικές, όπως για παράδειγμα "υπολογισμό τιμής ανά τετραγωνικό και πρόσθεση επιμέρους κριτηρίων αξιολόγησης".

Τα ΜΓΜ, γίνεται αντιληπτό ότι, υποστηρίζουν την καθοδήγηση των μαθητών/τριών προς την επίλυση των Ρεαλιστικών Μαθηματικών Προβλημάτων τύπου PISA, συμβάλλοντας στον μαθηματικό γραμματισμό. Αυτό συμβαίνει γιατί πραγματοποιείται μετάφραση πραγματικών δεδομένων σε μαθηματικό μοντέλο, όπως αυτή απαιτείται από τα προβλήματα PISA. Επιπλέον προωθούν την ανάπτυξη αναλογικής και ποσοτικής σκέψης, όπου προκαλείται διατύπωση θέσης και αιτιολόγηση. Τέλος, το ύφος που χρησιμοποιούν τα ΜΓΜ στόχευσε στη συναισθηματική υποστήριξη ευνοώντας τη συμμετοχή και μειώνοντας τον φόβο αποτυχίας, στο πλαίσιο μιας ασφαλούς μαθησιακής ζώνης (Vygotsky & Cole, 1978). Επιπλέον έδειξαν να ευθυγραμμίζονται με τις παιδαγωγικές και γνωστικές απαιτήσεις του προβλήματος, να προωθούν την αναστοχαστική σκέψη, τη μεταγνωστική αυτορρύθμιση, την αναλογική λογική, και εν τέλει την εννοιολογική κατανόηση – λειτουργώντας ως υποστηρικτικά "διδασκτικά εργαλεία" και όχι ως απλοί πάροχοι απαντήσεων.

Αν και έχει αποδειχθεί ότι τα ΜΓΜ ενίοτε σφάλουν ειδικά σε σύνθετα μαθηματικά προβλήματα, εδώ δεν παρατηρήθηκε ανακρίβεια στις απαντήσεις των ερωτημάτων. Είναι πιθανόν να σχετίζεται με την όχι μεγάλη πολυπλοκότητα του προβλήματος όσο και με την βελτίωση που συντελείται με το πέρασ του χρόνου και τη συνεχή χρήση τους. Επιπρόσθετα, τα ΜΓΜ επέδειξαν συνέπεια και ακρίβεια στη χρήση της ελληνικής γλώσσας καθώς και στην κατανόησή της ακόμα και όταν η εκφορά της ήταν "παραμορφωμένη" λόγω λαθών των χρηστών.

Παρατηρήθηκαν περιορισμοί υπερβολικής στήριξης σε λύσεις των ΜΓΜ που σύμφωνα με έρευνες μπορεί να οδηγήσει σε άμβλυνση της κριτικής σκέψης (Perin et al., 2025). Συγκεκριμένα, όταν τα ΜΓΜ χωρίς τη διασφάλιση της κατανόησης των προηγούμενων σταδίων προχώρησαν στο επόμενο βήμα ακολουθώντας τα μαθητικά αιτήματα. Επιπλέον,

εντοπίστηκε αδυναμία των ΜΓΜ παραμονής στους διδακτικούς στόχους, όταν τα ερωτήματα των παιδιών δεν σχετίζονταν με αυτούς, όπως την περίπτωση που τα παιδιά ρώτησαν πώς μπορούν να αποθηκεύσουν το διάλογό τους. Συμπερασματικά, η έρευνα έδειξε τις δυνατότητες στην καθοδήγηση και στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, ωστόσο χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση η πλήρης αξιοποίηση των εργαλείων ΤΝ καθώς και η εμπλοκή κατάλληλα καταρτισμένων εκπαιδευτικών των οποίων η συμβολή θεωρείται καταλυτική στη στην προαγωγή της παιδαγωγικής αλληλεπίδρασης μαθητών/τριών και εργαλείων ΤΝ.

Η παρούσα έρευνα, αν και περιορισμένου εύρους ως προς το δείγμα, προσπάθησε να ρίξει φως στις δυνατότητες που αποκτούν τα εργαλεία ΤΝ να καθοδηγήσουν μαθητές/τριες Γυμνασίου για την επίλυση Ρεαλιστικών Μαθηματικών Προβλημάτων, όταν η αλληλεπίδραση βασίζεται σε παιδαγωγικές θεωρίες. Σκοπός της, να αξιοποιήσει τα αποτελέσματα στις εκπαιδευτικές παρεμβάσεις που θα υλοποιηθούν στο έργο των Κέντρων Καινοτομίας. Μελλοντικά, θα μπορούσε να διερευνηθεί η συσχέτιση της δόμησης της προτροπής με την αποτελεσματικότητά της να επαυξάνει τα παιδαγωγικά χαρακτηριστικά των ΜΓΜ ώστε να εξασφαλιστεί η ομαλή ενσωμάτωση τους στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της δράσης "Κέντρα Καινοτομίας σε 13 ΠΔΕ" που είναι ενταγμένη στο Ταμείο Ανάκαμψης και Ανθεκτικότητας και συγχρηματοδοτείται από την Ε.Ε.

Αναφορές

- Baytak, A. (2024). The Content Analysis of the Lesson Plans Created by ChatGPT and Google Gemini. *Research in Social Sciences and Technology*, 9(1), 329-350.
- Beauchamp, T., & Walkington, C. (2024). *Mathematics teachers using generative AI to personalize instruction to students' interests*. AMTE Connections.
- Bessas, N., Tzanaki, E., Vavougiou, D., & Plagianakos, V. P. (2025). Comparative analysis of ChatGPT and Gemini; implications for junior high school physics education: Opportunities and ethical challenges. *International Journal of Advanced Multidisciplinary Research and Studies*, 5(1), 7-18.
- Bonwell, C. C., & Eison, J. A. (1991). *Active learning: Creating excitement in the classroom*. 1991 ASHE-ERIC higher education reports. ERIC Clearinghouse on Higher Education, The George Washington University, One Dupont Circle.
- Dao, X. Q., & Le, N. B. (2023). *Investigating the effectiveness of ChatGPT in mathematical reasoning and problem solving: Evidence from the Vietnamese national high school graduation examination*. arXiv preprint. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.0633>
- Davis, E., & Aaronson, S. (2023). *Testing GPT-4 with Wolfram Alpha and Code Interpreter plug-ins on math and science problems*. arXiv preprint. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.05713>.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906.
- Giannisi, M. (2025). *ChatGPT-dialogues*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15544071>
- Giannisi, M., & Konstantakos, D. (2025). *Chatbot dialogues*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.16759586>
- IBM. (2025). *What are LLMs?* IBM. <https://www.ibm.com/think/topics/large-language-models>
- Jou, M., Lin, Y. T., & Wu, D. W. (2016). Effect of a blended learning environment on student critical thinking and knowledge transformation. *Interactive Learning Environments*, 24(6), 1131-1147.
- Kiryakova, G. (2024). Artificial intelligence as a supportive tool for teachers' activities. *On Virtual Learning*, 385.
- MagicSchool, (2024). *Announcing MagicSchool's \$15m series a raise*. MagicSchool. <https://www.magicschool.ai/blog-posts/announcing-magicschools-15m-series-a-raise>
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

- Mollick, E., & Mollick, L. (2023). *Assigning AI: Seven approaches for students, with prompts*. arXiv preprint. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.10052>
- Moundridou, M., Matzakos, N., & Doukakis, S. (2024). Generative AI tools as educators' assistants: Designing and implementing inquiry-based lesson plans. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 7, 100277.
- OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and analytical framework: mathematics, reading, science and financial literacy*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- OECD. (2025). Διαμερίσματα διακοπών. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15527671>
- Pepin, B., Buchholtz, N., & Salinas-Hernández, U. (2025). A scoping survey of ChatGPT in mathematics education. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-33.
- Plevris, V., Papazafeiropoulos, G., & Jiménez Rios, A. (2023). Chatbots put to the test in math and logic problems: A comparison and assessment of ChatGPT-3.5, ChatGPT-4, and Google Bard. *Ai*, 4(4), 949-969.
- Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93(3), 223-231.
- Raftery, D. (2023). Will ChatGPT pass the online quizzes? Adapting an assessment strategy in the age of generative AI. *Irish Journal of Technology Enhanced Learning*, 7(1).
- Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 334-370). MacMillan.
- Seo, K., Tang, J., Roll, I., Fels, S., & Yoon, D. (2021). The impact of artificial intelligence on learner-instructor interaction in online learning. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 18(1), 54.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press.
- Shum, K., Diao, S., & Zhang, T. (2023). *Automatic prompt augmentation and selection with chain-of-thought from labeled data*. arXiv preprint. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.1282>
- Small, M. (2024). The power of open-ended questions. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 117(7), 528-529.
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257-285.
- Vagelatos, A., Giannisi, M. & Konstantakos, D. (2025). Βελτιωμένη προτροπή - 2. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15527778>
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.
- Vygotsky, L. S., & Cole, M. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Wu, T. T., Lee, H. Y., Li, P. H., Huang, C. N., & Huang, Y. M. (2024). Promoting self-regulation progress and knowledge construction in blended learning via ChatGPT-based learning aid. *Journal of Educational Computing Research*, 61(8), 1539-1567.
- Βαγγελάτος, Α. (2024). Μεγάλα Γλωσσικά Μοντέλα: προβληματισμοί, προκλήσεις και στο βάθος η Ελληνική Γλώσσα, Πρακτικά εργασιών 8^{ου} Πανελληνίου Επιστημονικού Συνεδρίου Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία, (σσ. 839-845). Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας & ΕΤΠΕ. https://www.etpe.gr/wp-content/uploads/2025/07/8etpearticle_68_839-845.pdf