ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2025)

14ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Η Μικτή Μάθηση για την Ενίσχυση της Μάθησης των Κλασμάτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Μαρία Αρβανιτάκη, Νικόλαος Ζαράνης, Μιχάλης Λιναρδάκης

doi: 10.12681/cetpe.9432

Βιβλιογραφική αναφορά:

Αρβανιτάκη Μ., Ζαράνης Ν., & Λιναρδάκης Μ. (2026). Η Μικτή Μάθηση για την Ενίσχυση της Μάθησης των Κλασμάτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 51–60. https://doi.org/10.12681/cetpe.9432

Η Μικτή Μάθηση για την Ενίσχυση της Μάθησης των Κλασμάτων στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

Μαρία Αρβανιτάκη, Νικόλαος Ζαράνης, Μιχάλης Λιναρδάκης
arvanitakm@sch.gr, nzaranis@edc.uoc.gr, michalis@uoc.gr
Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περίληψη

Η κατανόηση των κλασμάτων αποτελεί κρίσιμη συνιστώσα της μαθηματικής εκπαίδευσης στο δημοτικό σχολείο. Η παρούσα μελέτη διερευνά την αποτελεσματικότητα ενός μεικτού μοντέλου μάθησης, που συνδυάζει ψηφιακές δραστηριότητες με βιωματικές προσεγγίσεις, στην ενίσχυση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης των μαθητών/τριών, καθώς και της συνολικής τους επίδοσης στα κλάσματα ως σύνθετου μέτρου των δύο γνωστικών τομέων. Η έρευνα υλοποιήθηκε με πειραματικό σχεδιασμό με 130 μαθητές/τριες της Ε΄ δημοτικού σε δύο ομάδες, την πειραματική ομάδα (n = 66) και την ομάδα ελέγχου (n = 64). Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσω γραπτής δοκιμασίας προελέγχου και μεταελέγχου. Η ανάλυση των δεδομένων με μη παραμετρικούς ελέγχους ανέδειξε σημαντικά υψηλότερη βελτίωση της πειραματικής ομάδας στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση, καθώς και στη συνολική επίδοση στα κλάσματα. Τα ευρήματα υποστηρίζουν τη δυναμική του μικτού μοντέλου ως παιδαγωγική παρέμβαση που προάγει τη μαθηματική σκέψη και την ενεργό εμπλοκή των μαθητών/τριών στη μάθηση των κλασμάτων.

Λέξεις κλειδιά: διαδικαστική γνώση, εννοιολογική γνώση, κλάσματα, μικτή μάθηση

Εισαγωγή

Τα κλάσματα αποτελούν έναν θεμελιώδη τομέα της μαθηματικής γνώσης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, καθώς συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας του αριθμού και άλλων μαθηματικών εννοιών (Jordan et al., 2013), ενώ αποτελεί σημαντικό προγνωστικό δείκτη για τη μετέπειτα επιτυχία των μαθητών/τριών στα μαθηματικά (Siegler et al., 2013· Van de Walle et al., 2016). Η γνώση των κλασμάτων διακρίνεται σε δύο συνιστώσες, την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση. Η πρώτη σχετίζεται με την κατανόηση των σχέσεων που διέπουν τα κλάσματα, τις διαφορετικές εννοιολογικές ερμηνείες (μέρος-όλου, λόγος, πηλίκο, μέτρο, τελεστής) και τις συνδέσεις με άλλες μαθηματικές έννοιες. Η δεύτερη αναφέρεται στη γνώση της σειράς των βημάτων και των κανόνων χειρισμού των συμβολικών αναπαραστάσεων των κλασμάτων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Byrnes & Wasik, 1991· Kieren, 1993· Rittle-Johnson et al., 2001· Star, 2005). Παρόλο που οι δύο τύποι γνώσης διακρίνονται θεωρητικά, στην πράξη λειτουργούν αλληλεπιδραστικά και η ανάπτυξή τους ενισχύεται αμοιβαία (Hecht & Vagi, 2010· Hiebert & Lefevre, 1986· Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

Ωστόσο, η αδυναμία διασύνδεσης των δύο τύπων γνώσης συχνά οδηγεί σε ελλιπή κατανόηση με πολλούς/ές μαθητές/τριες να εμφανίζουν επιφανειακή ευχέρεια στις διαδικασίες χωρίς να διαθέτουν βαθύτερη κατανόηση για την έννοια του κλάσματος (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Lamon, 2007· Siegler et al. 2013) με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες (Behr et al., 1992· Kieren, 1993· Lamon, 2007· 2020· Van de Walle et al., 2016). Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών, η εκπαιδευτική έρευνα προτείνει την ενίσχυση της διασύνδεσης μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης (Byrnes & Wasik, 1991· Rittle-Johnson & Schneider, 2015· Rittle-Johnson et al., 2001).

Παράλληλα, η εκπαιδευτική έρευνα έχει αναδείξει ότι η διασύνδεση της εννοιολογικής γνώσης με τις πράξεις ενισχύεται σημαντικά μέσω της ανάπτυξης στρατηγικών οπτικοποίησης με τη χρήση των κατάλληλων αναπαραστάσεων (Arcavi, 2003· Doğan & Tertemiz, 2020·

Lamon, 2020· Zhang et al., 2014), της κατασκευής μοντέλων αναπαράστασης από τους/τις μαθητές/τριες (Escuder & Furner, 2011· Niemi,1996) καθώς και της αξιοποίησης δυναμικών περιβαλλόντων (Anat et al., 2020· Bulut et al., 2016· Dyrvold & Bergvall, 2023· Nashiroh & Zainuddin, 2023· Palaigeorgiou et al., 2019· Pittalis et al., 2024· Poon, 2018).

Στο πλαίσιο αυτό, η μικτή μάθηση αναδεικνύεται ως μία πολλά υποσχόμενη διδακτική προσέγγιση για τη διδασκαλία των κλασμάτων, η οποία συνδυάζει ψηφιακές με βιωματικές δραστηριότητες, επιτρέποντας τον συνδυασμό των διαφορετικών στρατηγικών οπτικοποίησης με συνεργατικές και στοχαστικές πρακτικές. Πράγματι, η μικτή μάθηση κερδίζει ολοένα και περισσότερο έδαφος στην εκπαιδευτική πραγματικότητα, ώστε αποτελεί μία από τις πιο αποτελεσματικές μεθόδους διδασκαλίας με την αξιοποίηση των ΤΠΕ (Ampartzaki et al, 2024· Jailani et al., 2025· Laskaris et al, 2019· Motteram & Sharma, 2009· Powell et al., 2015) με σημαντικά πλεονεκτήματα τόσο στην εκπαίδευση γενικά (Cleveland-Innes & Wilton, 2018· Kundu et al., 2021· Obot, 2023· Powell et al., 2015) όσο και ειδικότερα στη μαθηματική εκπαίδευση (Egara & Mosimege, 2024· Ekeh et al., 2021· Fazal & Bryant, 2019· Indrapangastuti et al., 2021· Iroko & Olaoye, 2021· Kundu et al., 2021· Latif et al., 2024· Obot, 2023· Yaghmour, 2016· Zahedi et al., 2023· Μπούμπουκα κ.ά., 2022).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η παρούσα μελέτη εξετάζει την επίδραση ενός μικτού μοντέλου στη μάθηση των κλασμάτων από μαθητές/τριες της Ε΄ τάξης του δημοτικού σχολείου, εστιάζοντας στην εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση των μαθητών/τριών, καθώς και στη συνολική τους επίδοση σχετικά με τα κλάσματα, η οποία αποτελεί συνδυαστικό μέτρο και προκύπτει από το άθροισμα της επίδοσης στις δύο γνωστικές διαστάσεις. Ειδικότερα, επιδιώκουμε να διερευνήσουμε κατά πόσο η στοχευμένη συνδυαστική χρήση ψηφιακών δραστηριοτήτων (μέσω tablets, διαδραστικών και δυναμικών περιβαλλόντων) και βιωματικών, συνεργατικών πρακτικών συμβάλλει στην ενίσχυση της εννοιολογικής, διαδικαστικής και συνολικής επάρκειας των μαθητών/τριών για τα κλάσματα.

Μεθοδολογία της έρευνας

Σκοπός

Ο σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να διερευνήσει την επίδραση της μικτής μεθόδου μάθησης στη βελτίωση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, καθώς και της συνολικής επίδοσης στα κλάσματα σε μαθητές/τριες Ε΄ Δημοτικού (10-11 ετών).

Ερευνητικός σχεδιασμός

Η παρούσα μελέτη υιοθέτησε πειραματικό σχεδιασμό με δύο ομάδες, την ομάδα ελέγχου και την πειραματική ομάδα, και υλοποιήθηκε σε τρία στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο έγινε ο προέλεγχος των δύο ομάδων μέσω γραπτής δοκιμασίας αξιολόγησης για τη διερεύνηση του σημείου εκκίνησης των μαθητών/τριών. Στο δεύτερο στάδιο υλοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση, όπου οι μαθητές/τριες της πειραματικής ομάδας διδάχθηκαν τα κλάσματα με τη μέθοδο της μικτής μάθησης, ενώ οι μαθητές/τριες της ομάδας ελέγχου διδάχθηκαν το ίδιο θέμα με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας. Το τρίτο στάδιο αποτέλεσε ο μεταέλεγχος των δύο ομάδων μέσω γραπτής δοκιμασίας αξιολόγησης με στόχο τη διερεύνηση της προόδου των μαθητών/τριών και αν υπάρχει κάποια διαφοροποίηση μεταξύ των δύο ομάδων.

Δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 130 μαθητές/τριες της Ε΄ τάξης δημοτικού (10-11 ετών) από οχτώ τμήματα σε δημόσια δημοτικά σχολεία σε κοινωνικοοικονομικά ομοιογενείς

περιοχές του Ηρακλείου Κρήτης. Τα τέσσερα τμήματα αποτέλεσαν την πειραματική ομάδα (*n* = 66) και τα άλλα τέσσερα την ομάδα ελέγχου (*n* = 64).

Μέσα συλλογής δεδομένων

Για την αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων η ερευνητική ομάδα ανέπτυξε μια γραπτή δοκιμασία αξιολόγησης, η οποία χορηγήθηκε για τη συλλογή των δεδομένων πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Η δοκιμασία καλύπτει τις διδακτέες έννοιες για τα κλάσματα στην Ε΄ τάξη, σύμφωνα με το εκπαιδευτικό πακέτο του 2011 για τα Μαθηματικά, το οποίο βασίζεται στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ) του 2011, σε συνδυασμό με το ΔΕΠΠΣ και ΑΠΣ του 2003.

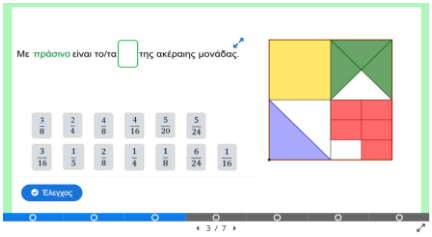
Η δοκιμασία αποτελείται από δύο ισοβαρή μέρη. Το πρώτο μέρος της δοκιμασίας της εστιάζει στην εννοιολογική γνώση μέσω της κατανόησης των τεσσάρων εννοιολογικών δομών των κλασμάτων που διδάσκονται στην Ε΄ τάξη: μέρος-όλο, πηλίκο, μέτρο και τελεστής. Το δεύτερο μέρος αξιολογεί τη διαδικαστική γνώση περιλαμβάνοντας τις πράξεις μεταξύ κλασμάτων και τις δεξιότητες ισοδυναμίας, σύγκρισης, μετατροπών μεταξύ καταχρηστικών κλασμάτων-μικτών αριθμών και αναγωγής στην κλασματική μονάδα. Η συνολική επίδοση υπολογίζεται ως το άθροισμα των δύο επιμέρους βαθμολογιών.

Η γραπτή δοκιμασία αποτελείται από ερωτήσεις κλειστού τύπου και σύντομης απάντησης με δύο επίπεδα δυσκολίας. Για τον σχεδιασμό της βασιστήκαμε σε στοιχεία και αρχές από το ερευνητικό εργαλείο Fraction Knowledge Assessment (FKA), όπως περιγράφεται στη μελέτη των Kalra, Hubbard και Matthews (2020), ενώ αξιοποιήσαμε ασκήσεις και κριτήρια που έχουν προτείνει άλλοι ερευνητές/τριες, οι οποίοι/ες έχουν ασχοληθεί με το θέμα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Kieren, 1993· Lamon, 2007, 2020· Niemi, 1996).

Διδακτική παρέμβαση

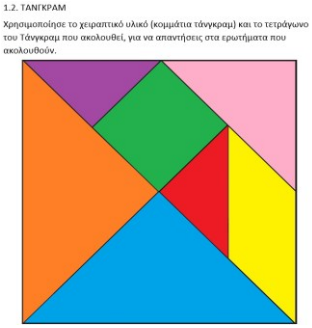
Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε μία εβδομάδα μετά από τη χορήγηση της δοκιμασίας προελέγχου και είχε διάρκεια έξι διδακτικές εβδομάδες. Η ομάδα ελέγχου διδάχθηκε τα κλάσματα με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας ακολουθώντας το εκπαιδευτικό πακέτο του 2011 για τα Μαθηματικά της Ε΄ τάξης. Η πειραματική ομάδα διδάχθηκε το ίδιο διδακτικό περιεχόμενο μέσω ενός μοντέλου μικτής μάθησης που συνδυάζει τη δυναμική διερεύνηση που προσφέρουν τα ψηφιακά περιβάλλοντα με την ενεργή συμμετοχή και τη φυσική αλληλεπίδραση που εξασφαλίζουν οι βιωματικές προσεγγίσεις.

Ειδικότερα, η πειραματική παρέμβαση οργανώθηκε μέσα από ένα εκπαιδευτικό ιστολόγιο e-me blog, στο οποίο οι μαθητές/τριες είχαν πρόσβαση μέσω έξυπνων κινητών συσκευών (tablet). Στο ιστολόγιο ενσωματώθηκαν: α)ψηφιακές διαδραστικές δραστηριότητες (e-me Content, H5P) με άμεση αξιολόγηση και ανατροφοδότηση (Σχήμα 1), όπως αντιστοιχίσεις, περιστρεφόμενες κάρτες, κουίζ κ.ά., β)δυναμικά ψηφιακά αντικείμενα Geogebra (Σχήμα 2), όπως δυναμικά μοντέλα αναπαράστασης κλασμάτων και πράξεων με κλάματα (μοντέλα εμβαδού, αριθμογραμμές κ.α.), τα οποία έδιναν στους/στις μαθητές/τριες τη δυνατότητα να πειραματιστούν και να παρατηρήσουν την αντίστοιχη μεταβολή της οπτικής αναπαράστασης, και γ) παραπομπές στο ειδικό "Τετράδιο χειραπτικού υλικού" ή το επίσημο διδακτικό εγχειρίδιο για την υλοποίηση των βιωματικών δραστηριοτήτων. Οι βιωματικές δραστηριότητες περιλάμβαναν τον χειρισμό χειραπτικών υλικών (Σχήμα 3), την επίλυση προβλήματος με ρεαλιστικά σενάρια, την κατασκευή των δικών τους αναπαραστάσεων και τη διενέργεια αναστοχαστικών συζητήσεων στην ολομέλεια της τάξης (Σχήμα 4).

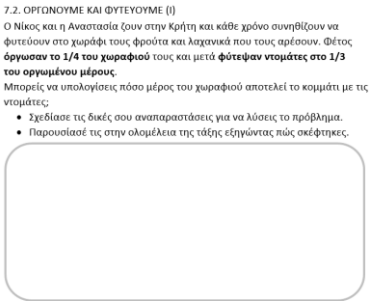


Σχήμα 1. Διαδραστική δραστηριότητα e-me Content

Σχήμα 2. Δυναμική δραστηριότητα Geogebra



Σχήμα 3. Βιωματική δραστηριότητα με χειρισμό χειραπτικών υλικών



Σχήμα 4. Δραστηριότητα για δημιουργία αναπαραστάσεων από τους μαθητές/τριες και αναστοχαστική συζήτηση

Αποτελέσματα

Πριν από τις αναλύσεις των δεδομένων ελέγξαμε αν πληρείται η προϋπόθεση της κανονικότητας του δείγματος της έρευνας. Η δοκιμασία κανονικότητας Shapiro-Wilk, έδειξε ότι η κανονικότητα παραβιάστηκε για τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες σε όλες τις περιπτώσεις: βελτίωση εννοιολογικής γνώσης (ομάδα ελέγχου = 0,959, p = 0,031· πειραματική ομάδα = 0,983, p = 0.484), βελτίωση διαδικαστικής γνώσης (ομάδα ελέγχου = 0,954, p = 0,018· πειραματική ομάδα = 0.956, p = 0.019) και βελτίωση συνολικής επίδοσης (ομάδα ελέγχου = 0,977, p = 0,267· πειραματική ομάδα = 0,956, p = 0,019). Ως εκ τούτου, για τις αναλύσεις των δεδομένων εκτελέσαμε μη παραμετρικούς ελέγχους.

Ισοδυναμία των δύο ομάδων

Για τη διερεύνηση της ισοδυναμίας των δύο ομάδων ως προς την αρχική τους επίδοση σε κάθε τύπο γνώσης εφαρμόσαμε τον μη παραμετρικό έλεγχο Mann-Whitney U για δύο ανεξάρτητα δείγματα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα στον Πίνακα 1, η διάμεσος των επιδόσεων δεν διαφοροποιήθηκε στατιστικά σημαντικά μεταξύ των δύο ομάδων σε καμία από τις τρεις περιπτώσεις, ώστε συμπεραίνουμε ότι οι δύο ομάδες ήταν ισοδύναμες ως προς το αρχικό επίπεδο της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης και της συνολικής τους επίδοσης.

Πίνακας 1. Έλεγχος Mann-Whitney U στις δοκιμασίες προελέγχου ανά ομάδα

	Προέλεγχος εννοιολογικής γνώσης	Προέλεγχος διαδικαστικής γνώσης	Προέλεγχος συνολικής επίδοσης
Mann-Whitney U	1819,000	1998,500	1867,500
p-value	0,171	0,594	0,254

Εξέλιξη της επίδοσης των δύο ομάδων

Για τη διερεύνηση της εξέλιξης της επίδοσης κάθε ομάδας εφαρμόστηκε ο μη παραμετρικός έλεγχος προσημασμένων τάξεων Wilcoxon για συζευγμένες παρατηρήσεις. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα οι μαθητές/τριες της ομάδας ελέγχου παρουσίασαν βελτίωση σε όλες τις περιπτώσεις με τη διαφορά μεταξύ προελέγχου και μεταελέγχου να είναι ισχυρά στατιστικά σημαντική (εννοιολογική γνώση: $z = -6{,}175$, $p < 0{,}01$· διαδικαστική γνώση: $z = -6{,}957$, $p < 0{,}01$· συνολική επίδοση: $z = -6{,}896$, $p < 0{,}01$), ώστε συμπεραίνουμε ότι υπήρξε σημαντική βελτίωση στην εννοιολογική γνώση, τη διαδικαστική γνώση και τη συνολική επίδοση στα κλάσματα.

Αντίστοιχα, οι μαθητές/τριες της πειραματικής ομάδας παρουσίασαν, επίσης, βελτίωση με τη διαφορά μεταξύ προελέγχου και μεταελέγχου να είναι ισχυρά στατιστικά σημαντική και στις τρεις περιπτώσεις (εννοιολογική γνώση: $z = -7{,}028$, $p < 0{,}01$· διαδικαστική γνώση: $z = -7{,}066$, $p < 0{,}01$· συνολική επίδοση: $z = -7{,}064$, $p < 0{,}01$). Επομένως, συμπεραίνουμε ότι υπήρξε ισχυρά στατιστικά σημαντική βελτίωση στην επίδοση των μαθητών/τριών στις τρεις περιπτώσεις γνώσης των κλασμάτων.

Σύγκριση της βελτίωσης των δύο ομάδων

Για τη σύγκριση του βαθμού βελτίωσης των δύο ομάδων σε κάθε τύπο γνώσης εφαρμόστηκε ο μη παραμετρικός έλεγχος Mann-Whitney U για δύο ανεξάρτητα δείγματα. Ως βελτίωση ορίστηκε η διαφορά της επίδοσης του προελέγχου για κάθε τύπο γνώσης από τον αντίστοιχο μεταέλεγχο. Από τα αποτελέσματα στον Πίνακα 2 προκύπτει ότι η διάμεσος της βελτίωσης των δύο ομάδων διαφοροποιείται ισχυρά στατιστικά σημαντικά σε όλες τις περιπτώσεις. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπήρχε μια έντονη διαφοροποίηση μεταξύ των δύο ομάδων ως προς τη βελτίωσή τους, με σημαντική υπεροχή της πειραματικής ομάδας.

Πίνακας 2. Έλεγχος Mann-Whitney U για τη βελτίωση ανά τύπο γνώσης

	Βελτίωση εννοιολογικής γνώσης κλασμάτων	Βελτίωση διαδικαστικής γνώσης κλασμάτων	Βελτίωση γενικής γνώσης κλασμάτων
Mann-Whitney U	1469,000	1542,000	1381,500
p-value	< 0,01	< 0,01	< 0,01

Συμπεράσματα

Η παρούσα μελέτη είχε σκοπό να διερευνήσει την επίδραση της μικτής μεθόδου μάθησης σε μαθητές/τριες της Ε΄ Δημοτικού όσον αφορά στην ανάπτυξη της εννοιολογικής και της διαδικαστικής γνώσης των μαθητών/τριών, καθώς και της συνολικής τους επίδοσης για τα κλάσματα. Σε αυτό το πλαίσιο, η παρούσα έρευνα έλαβε τη μορφή μίας συγκριτικής μελέτης της επίδοσης των μαθητών/τριών της πειραματικής ομάδας, οι οποίοι/ες διδάχθηκαν τα κλάσματα με τη μέθοδο της μικτής μάθησης, με την επίδοση των μαθητών/τριών της ομάδας ελέγχου, οι οποίοι/ες διδάχθηκαν το ίδιο θέμα με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας.

Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι μαθητές/τριες της πειραματικής ομάδας παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις τους μετά τη διδακτική παρέμβαση στην εννοιολογική γνώση, τη διαδικαστική γνώση και τη συνολική επίδοση στα κλάσματα. Επίσης σημαντική βελτίωση στις τρεις περιπτώσεις μετά τη διδασκαλία, παρουσίασαν και οι μαθητές/τριες της ομάδας ελέγχου. Αυτή η σημαντική βελτίωση και για τις δύο ομάδες οφείλεται αφενός στη συνεισφορά της μεθόδου διδασκαλίας για κάθε ομάδα και αφετέρου στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ της αρχικής και της τελικής δοκιμασίας αξιολόγησης.

Ωστόσο, η συγκριτική μελέτη του βαθμού βελτίωσης των δύο ομάδων, αποκαλύπτει έντονη διαφοροποίηση μεταξύ των δύο ομάδων με σημαντική υπεροχή της πειραματικής ομάδας σε όλες τις περιπτώσεις. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της διερεύνησης της ισοδυναμίας των δύο ομάδων πριν τη διδακτική παρέμβαση, σύμφωνα με τα οποία οι δύο ομάδες ήταν ισοδύναμες ως προς το αρχικό μαθησιακό τους επίπεδο, συμπεραίνουμε ότι η υπεροχή του βαθμού προόδου της πειραματικής ομάδας οφείλεται στην επίδραση της πειραματικής μεθόδου. Ως εκ τούτου, η μικτή μέθοδος μάθησης συνέβαλε ώστε οι μαθητές/τριες της πειραματικής ομάδας να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους τόσο στην εννοιολογική όσο και τη διαδικαστική γνώση και, συνεπώς, στη συνολική επίδοσή τους για τα κλάσματα.

Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης επιβεβαιώνουν την αποτελεσματικότητα του μικτού μοντέλου μάθησης, η οποία έχει αναδειχθεί από προηγούμενες έρευνες (Ampartzaki et al, 2024· Jailani et al., 2025· Laskaris et al, 2019· Motteram & Sharma, 2009) τόσο στην εκπαίδευση των Μαθηματικών (Egara & Mosimege, 2024· Ekeh et al., 2021· Fazal & Bryant, 2019· Indrapangastuti et al., 2021· Iroko & Olaoye, 2021· Kundu et al., 2021· Latif et al., 2024· Obot, 2023· Yaghmour, 2016· Zahedi et al., 2023· Μπούμπουκα κ.ά., 2022) όσο και την εκπαίδευση γενικά (Cleveland-Innes & Wilton, 2018· Powell et al., 2015).

Επίσης, αναδεικνύουν την αποτελεσματικότητα του μικτού μαθησιακού μοντέλου, όπως εφαρμόστηκε στην πειραματική παρέμβαση, το οποίο συνδυάζει τις ΤΠΕ με ειδικά σχεδιασμένες βιωματικές δραστηριότητες και το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών για την μάθηση των κλασμάτων σε μαθητές/τριες της Ε΄ τάξης. Όπως φαίνεται, το πλούσιο μαθησιακό περιβάλλον της πειραματικής παρέμβασης συνέβαλε ουσιαστικά στην καλλιέργεια ισχυρής εννοιολογικής γνώσης των κλασμάτων και τη σύνδεσή της με τις σχετικές διαδικασίες και πράξεις με τα κλάσματα, ώστε οι μαθητές/τριες βελτίωσαν τις επιδόσεις τους τόσο στην εννοιολογική όσο και τη διαδικαστική γνώση των κλασμάτων επιβεβαιώνοντας την υπάρχουσα εκπαιδευτική έρευνα στο πεδίο (Behr et al., 1992· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Kieren, 1993· Lamon, 2007· 2020· Ni, 2001).

Τα αποτελέσματα ευθυγραμμίζονται με τη σημασία της ανάπτυξης των δεξιοτήτων οπτικοποίησης μέσω της χρήσης κατάλληλων και στοχευμένων οπτικών αναπαραστάσεων (Arcavi, 2003· Wilkie & Roche, 2022), οι οποίες προσφέρουν διαφορετικές προκλήσεις και μαθησιακές ευκαιρίες για την ερμηνεία των εννοιών και των διαδικασιών σχετικά με τα κλάσματα (Behr et al., 1992· Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Doğan & Tertemiz, 2020· Ni, 2001· Niemi, 1996· Van de Walle et al., 2016). Η εναλλαγή αναπαραστάσεων συνέβαλε στην αποδέσμευση από μία μόνο μορφή οπτικοποίησης, ενισχύοντας τη δημιουργία προσωπικών, δυναμικών εικόνων (Zhang et al., 2014), αλλά και την καλλιέργεια των κατασκευαστικών τους δεξιοτήτων και, ως εκ τούτου, στην εμβάθυνση της γνώσης γύρω από τα κλάσματα (Escuder & Furner, 2011· Lamon, 2020· Niemi, 1996).

Ιδιαίτερα κρίσιμο ρόλο διαδραμάτισε η αξιοποίηση δυναμικών ψηφιακών μοντέλων στο Geogebra, τα οποία μέσω της δυναμικής αλληλεπίδρασης και της άμεσης ανατροφοδότησης διευκόλυναν την εννοιολογική κατανόηση και τη σύνδεσή της με τις πράξεις (Anat et al., 2020·

Bulut et al., 2016· Dyrvold & Bergvall, 2023· Nashiroh & Zainuddin, 2023· Palaigeorgiou et al., 2019· Pittalis et al., 2024· Poon, 2018), ιδίως για μαθητές/τριες με χαμηλότερες αρχικές επιδόσεις (Moyer-Packenham et al., 2012).

Παράλληλα, οι διαδραστικές δραστηριότητες παρείχαν δυνατότητες δοκιμής, επανάληψης, αυτοαξιολόγησης (Cleveland-Innes & Wilton, 2018· Obot, 2023), συμβάλλοντας στην εξατομίκευση της μάθησης (Cannaos et al., 2024· Powell et al., 2015) και ενισχύοντας τη δέσμευση των μαθητών/τριών (Kundu et al., 2021· Mayer, 2014· Obot, 2023).

Η αξιοποίηση των ταμπλετών ενίσχυσε περαιτέρω τη διάδραση και τη μαθησιακή εμπλοκή των μαθητών/τριών επιβεβαιώνοντας τα τεκμηριωμένα πλεονεκτήματα της κινητής μάθησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών (Arvanitaki & Zaranis, 2020· Fabian et al., 2016· Fütterer et al., 2022· Papadakis & Kalogiannakis, 2017· Papadakis et al., 2018· 2021· Zaranis et al., 2013).

Τα ευρήματα αναδεικνύουν τη θετική επίδραση της μικτής μάθησης με αξιοποίηση ΤΠΕ στην ενίσχυση της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης των μαθητών/τριών για τα κλάσματα. Μάλιστα, η χρήση ευρέως διαθέσιμων πλατφορμών (e-me, Geogebra) επιτρέπει τη δημιουργία και διάθεση εξατομικευμένου μαθησιακού υλικού με τρόπο προσβάσιμο και επεκτάσιμο, χωρίς την ανάγκη εξειδικευμένου εξοπλισμού ή λογισμικού, αποτελώντας αποτελεσματική πρακτική στο πλαίσιο της καθημερινής σχολικής τάξης.

Ωστόσο, η παρούσα μελέτη υπόκειται σε σημαντικούς περιορισμούς, τους οποίους πρέπει να λάβουμε υπόψη κατά την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, η γενίκευση των αποτελεσμάτων περιορίζεται λόγω του μικρού, γεωγραφικά και κοινωνικοοικονομικά ομοιογενούς δείγματος. Για να διασφαλιστεί η αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος και η δυνατότητα γενίκευσης των αποτελεσμάτων, θα ήταν χρήσιμο να διενεργηθεί μελλοντική έρευνα με περισσότερους/ες συμμετέχονες/ουσες πανελλαδικά, ενώ πρόσθετα δεδομένα θα πρόσφερε η διερεύνηση σε ομάδες και περιοχές με ιδιαίτερα κοινωνικά, οικονομικά, πολιτιστικά και εκπαιδευτικά χαρακτηριστικά. Επιπλέον, σημαντικοί περιορισμοί συνδέονται με τη χρονική διάρκεια της παρέμβασης και της αξιολόγησης μόνο των άμεσων επιδράσεων της παρέμβασης, καθώς ο μεταέλεγχος πραγματοποιήθηκε μία εβδομάδα μετά τη διδασκαλία χωρίς να μετρήσει τη μακροπρόθεσμη διατήρηση ή μεταφορά των γνώσεων σχετικά με τα κλάσματα. Μελλοντικές μελέτες με διαχρονικό σχεδιασμό θα μπορούσαν να προσφέρουν πληρέστερη εικόνα για τη διατηρησιμότητα και τη μακροπρόθεσμη αποτελεσματικότητα τέτοιων παρεμβάσεων στην οικοδόμηση της πολυδιάστατης έννοιας των κλασμάτων και της γενικότερης μαθηματικής ικανότητας.

Αναφορές

Ampartzaki, M., Tassis, K., Kalogiannakis, M., Pavlidou, V., Christidis, K., Chatzoglidou, S., & Eleftherakis, G. (2024). Assessing the initial outcomes of a blended learning course for teachers facilitating astronomy activities for young children. *Education Sciences, 14*(6), 606. https://doi.org/10.3390/educsci14060606

Anat, K., Shirley, R., & Hanna, L. Z. (2020). Building a computerized dynamic representation as an instrument for mathematical explanation of division of fractions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(2), 247-264. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648888

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arvanitaki, M., & Zaranis, N. (2020). The use of ICT in teaching geometry in primary school. *Education and Information Technologies, 25*, 5003-5016. https://doi.org/10.1007/s10639-020-10210-7

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number. Ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. MacMillan.

Bulut, M., Akçakın, H. Ü., Kaya, G., & Akçakın, V. (2016). The effects of geogebra on third grade primary students' academic achievement in fractions. *Mathematics Education, 11*(2), 327-335. http://doi.org/10.12973/iser.2016.2109a

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology, 27*(5), 777-786. https://doi.org/10.1037/0012-1649.27.5.777

Cannaos, C., Onni, G., & Casu, A. (2024). Blended learning: What changes? *Sustainability, 16*, 8988. https://doi.org/10.3390/su16208988

Charalambous, Y. C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316. http://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Cleveland-Innes, M., & Wilton, D. (2018). *Guide to blended learning*. Commonwealth of learning. https://doi.org/10.56059/11599/3095

Doğan, A., & Tertemiz, N. I. (2020). Fraction models used by primary school teachers. *Elementary Education Online, 19*(4), 1888-1901. https://ilkogretim-online.org/index.php/pub/article/view/6896

Dyrvold, A., & Bergvall, I. (2023). Static, dynamic and interactive elements in digital teaching materials in mathematics: How do they foster interaction, exploration and persistence? *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 11*(3), 103-131. https://doi.org/10.31129/LUMAT.11.3.1941

Egara, F. O., & Mosimege, M. (2024). Effect of blended learning approach on secondary school learners' mathematics achievement and retention. *Education and Information Technologies, 29*, 19863-19888. https://doi.org/10.1007/s10639-024-12651-w

Ekeh, M. C., Venketsamy, R., Unamba, E. C., & Ugochukwu, N. J. (2021). Using blended-learning strategy in mathematics to strengthen the teaching of geometric 2D shapes and their properties to primary 6 learners. *The Independent Journal of Teaching and Learning, 16*(2), 85-100. https://hdl.handle.net/10520/ejc-jitl1-v16-n2-a8

Escuder, A., & Furner, J. M. (2011). The impact of GeoGebra in math teachers' professional development. *Proceedings of the International Conference on Technologies in Collegiate Mathematics* (pp. 76-84). Pearson.

Fabian, K., Topping, K. J., & Barron, I. G. (2016). Mobile technology and mathematics: Effects on students' attitudes, engagement, and achievement. *Journal of Computers in Education, 3*(1), 77-104. https://doi.org/10.1007/s40692-015-0048-8

Fazal, M., & Bryant, M. M. (2019). Blended learning in middle school math: The question of effectiveness. *Journal of Online Learning Research, 5*(1), 49-64.

Fütterer, T., Scheiter, K., Cheng, X., & Stürmer, K. (2022). Quality beats frequency? Investigating students' effort in learning when introducing technology in classrooms. *Contemporary Educational Psychology, 69*, 1-20. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2022.102042

Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology, 102*(4), 843-859. https://doi.org/10.1037/a0019824

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203063538

Indrapangastuti, D., Surjono, H. D., Sugiman, S., & Yanto, B. E. (2021). Effectiveness of the blended learning model to improve students' achievement of mathematical concepts. *Journal of Education and E-Learning Research, 8*(4), 423-430. https://doi.org/10.20448/journal.509.2021.84.423.430

Iroko, G.A., & Olaoye, A. A. (2021). Potency of blended strategy on students' performance in algebra at senior secondary schools. *International Journal of Innovative Research and Development*, *10*(3), 65-71. https://doi.org/10.24940/ijird/2021/v10/i3/MAR21039

Jailani, N., Rosli, R., & Mahmud, M. S. (2025). Factors influencing mathematics teachers' blended learning: A systematic review. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 24*(1), 397-419. https://doi.org/10.26803/ijlter.24.1.20

Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*, 45-58. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001

Kalra, P. B., Hubbard, E. M., & Matthews, P. G. (2020). Taking the relational structure of fractions seriously: Relational reasoning predicts fraction knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology, 62*, 101896. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101896

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Lawrence Erlbaum.

Kundu, A., Bej, T., & Rice, M. (2021). Time to engage: Implementing math and literacy blended learning routines in an Indian elementary classroom. *Education and Information Technologies, 26*(1), 1201-1220. https://doi.org/10.1007/s10639-020-10306-0

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). NCTM.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (4th ed.). Routledge.

Laskaris, D., Heretakis, E., Kalogiannakis, M., & Ampartzaki, M. (2019). Critical reflections on introducing e-learning within a blended education context. *International Journal of Technology Enhanced Learning, 11*(4), 413-440. https://doi.org/10.1504/ijtel.2019.102550

Latif, N. H. A., Shahril, M., & Hidayat, W. (2024). Mastering fractions and innovating with the station rotation model in blended learning. *Infinity Journal, 13*(2), 501-530. https://doi.org/10.22460/infinity.v13i2.p501-530

Mayer, R. E. (2014). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 43-71). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369.005

Motteram, G., & Sharma, P. (2009). Blending learning in a web 2.0 world. *International Journal of Emerging Technologies and Society, 7*(2), 83-112. https://www.academia.edu/1242906/Blending_Learning_in_a_Web_2_0_World

Moyer-Packenham, P. S., Ulmer, L. A., & Anderson, K. L. (2012). Examining pictorial models and virtual manipulatives for third-grade fraction instruction. *Interactive Online Learning, 11*(3), 103-120.

Nashiroh, F., & Zainuddin, A. (2023). Development of GeoGebra-based fraction gap learning media to improve understanding of the fraction concept of grade V elementary school. *Didaktika Tauhidi: Jurnal Pendidikan Guru Sekolah Dasar, 10*(1), 55-69. https://doi.org/10.30997/dt.v10i1.8238

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational number and the acquisition of number Equivalence. *Contemporary Educational Psychology, 26*(3), 400-417. https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072

Niemi, D. (1996). *Instructional influence on content area explanations and representational knowledge: Evidence for the construct validity of measures of principled understanding*. CSE Technical Report 403. National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing. University of California. https://cresst.org/wp-content/uploads/TECH403.pdf

Obot, P. F. (2023). Impact of blended learning approach on students' achievement in quadratic and simultaneous equations. *International Journal of Trend in Scientific Research and Development, 7*(6), 552-558. www.ijtsrd.com/papers/ijtsrd61229.pdf

Palaigeorgiou G., Tsolopani X., Liakou S., & Lemonidis C. (2019). Movable, resizable and dynamic number lines for fraction learning in a mixed reality environment. In M. Auer, & T. Tsiatsos (Eds.), *The challenges of the digital transformation in education. ICL 2018. advances in intelligent systems and computing (*pp. 118-129. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11935-5_12

Papadakis, S., Alexandraki, F., & Zaranis, N. (2022). Mobile device use among preschool-aged children in Greece. *Education and Information Technologies, 27*(2), 2717-2750. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10718-6

Papadakis, S., & Kalogiannakis, M. (2017). Mobile educational applications for children. What educators and parents need to know. *International Journal of Mobile Learning and Organization, 11*(3), 256-277. https://doi.org/10.1504/IJMLO.2017.085338

Papadakis, S., Kalogiannakis, M., & Zaranis, N. (2018). Educational apps from the Android Google Play for Greek preschoolers: A systematic review. *Computer & Education, 116*, 139-160. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.09.007

Papadakis, S., Kalogiannakis, M., & Zaranis, N. (2021). Teaching mathematics with mobile devices and the Realistic Mathematical Education (RME) approach in kindergarten. *Advances in Mobile Learning Educational Research, 1*(1), 5-18. https://doi.org/10.25082/AMLER.2021.01.002

Pittalis, M., Sproesser, U., Demosthenous, E., & Odysseos, E. (2024). Enhancing functional thinking in grade 5-6 students through a dynamic mathematics intervention program. *Education and Information Technologies, 30*, 1329-1361. https://doi.org/10.1007/s10639-024-12865-y

Poon, K.K. (2018). Learning fraction comparison by using a dynamic mathematics software - GeoGebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(3), 469-479. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1404649

Powell, A., Watson, J., Staley, P., Patrick, S., Horn, M., Fetzer, L., Hibbard, L., Oglesby, J., & Verma, S. (2015). *Blending learning: The evolution of online and face-to-face education from 2008-2015.* Promising Practices in Blended and Online Learning Series. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED560788.pdf

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1118-1134). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences, 17*(1), 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404-411.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school Mathematics: Teaching developmentally* (*9th Edition).* Pearson Education.

Wilkie, K. J., & Roche, A. (2023). Primary teachers' preferred fraction models and manipulatives for solving fraction tasks and for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 26*, 703-733. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09542-7

Yaghmour, K. S. (2016). Effectiveness of blended teaching strategy on the achievement of third grade students in mathematics. *Journal of Education and Practice, 7*(5), 65-73.

Zahedi, S., Bryant, C. L., Iyer, A., & Jaffer, R. (2023). The use of blended learning to promote learner-centered pedagogy in elementary math classrooms. *Educational Research for Policy and Practice, 22*, 389-408. https://doi.org/10.1007/s10671-023-09346-3

Zaranis, N., Kalogiannakis, M., & Papadakis, S. (2013). Using mobile devices for teaching realistic mathematics in kindergarten education. *Creative Education, 4*, 1-10. https://doi.org/10.4236/ce.2013.47A1001

Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. (2014). Conceptual mis(understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal, 27*, 233-261. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0133-8

Μπούμπουκα Μ., Παλαιογιαννίδης Δ., & Φαλαγκάρας Α. (2022). Μια εφαρμογή μικτής μάθησης για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο γυμνάσιο με τη βοήθεια του Moodle. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση, 1*, 393-402. https://doi.org/10.12681/cetpe.4096