ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2025)

14ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Μαθηματικές Μεταφορές για την Κατανόηση της Γωνίας ως Δυναμικού και Μετρήσιμου Μεγέθους

Χριστίνα Γκρέκα

doi: 10.12681/cetpe.9426

Βιβλιογραφική αναφορά:

Γκρέκα Χ. (2026). Μαθηματικές Μεταφορές για την Κατανόηση της Γωνίας ως Δυναμικού και Μετρήσιμου Μεγέθους. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 778–787. https://doi.org/10.12681/cetpe.9426

Μαθηματικές Μεταφορές για την Κατανόηση της Γωνίας ως Δυναμικού και Μετρήσιμου Μεγέθους

Χριστίνα Γκρέκα
xristgreka@eds.uoa.gr
Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη διερευνά το είδος των εννοιολογικών μεταφορών και νοημάτων που αναπτύσσουν παιδιά 9 ετών για την έννοια της γωνίας, ενώ χρησιμοποιούν ένα ψηφιακό εργαλείο ενσώματης αλληλεπίδρασης σε συνδυασμό με φυσικά αντικείμενα χειρισμού. Βασισμένη στις αρχές της ενσώματης μάθησης και του μεταφορικού συλλογισμού, εστιάζει στα ενσώματα νοήματα που αναπτύσσουν παιδιά της Δ' Δημοτικού για τη γωνία ως μεταβαλλόμενο μέγεθος. Για τους σκοπούς της έρευνας, στο πλαίσιο της μεθοδολογίας της έρευνας σχεδιασμού, η ερευνήτρια σχεδίασε και υλοποίησε μια εκπαιδευτική δραστηριότητα κατά την οποία παιδιά της Δ' τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου χρησιμοποίησαν ένα ψηφιακό εργαλείο με δυνατότητα ενσώματης αλληλεπίδρασης σε συνδυασμό με φυσικά αντικείμενα χειρισμού για να δημιουργήσουν κινούμενες εικόνες (animations), που προσομοιώνουν χορευτικές φιγούρες. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων καταγράφηκαν ηχητικά δεδομένα, δεδομένα καταγραφής οθόνης και βίντεο. Στο άρθρο παρουσιάζονται τα πρώτα αποτελέσματα από τη θεματική ανάλυση των δεδομένων, με τη μορφή κρίσιμων επεισοδίων, κατά τα οποία τα παιδιά αναπτύσσουν νοήματα για τη γωνία ως μεταβαλλόμενο και μετρήσιμο μέγεθος μέσα από τη χρήση σωματο-συντονισμένων και χωρικών μεταφορών.

Λέξεις κλειδιά: αντικείμενα χειρισμού, γωνία, μεταφορές, χορός, ψηφιακά εργαλεία ενσώματης αλληλεπίδρασης

Εισαγωγή

Η γωνία αποτελεί μία από τις πιο αφηρημένες και δύσκολες έννοιες στο πλαίσιο της μάθησης των μαθηματικών (Mitchelmore & White, 2000). Στη βιβλιογραφία της διδακτικής των μαθηματικών, η γωνία ορίζεται ως στατικό γεωμετρικό σχήμα (ένα ζεύγος ημιευθειών με κοινό άκρο), ως δυναμικό σχήμα (μια στροφή ή περιστροφή) και ως μέτρο (Smith et al., 2014), καθένας από τους οποίους είναι μοναδικός ως προς την ανάδειξη διαφορετικών πτυχών της έννοιας. Συνεπώς η εστίαση σε έναν από αυτούς κατά τη μάθηση της γεωμετρίας έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη παρανοήσεων σχετικά με τη μέτρηση της (Mitchelmore & White, 2000· Psycharis & Kynigos, 2008). Έτσι η νοηματοδότηση της γωνίας αποτελεί μία σοβαρή διδακτική πρόκληση που απασχολεί επί σειρά ετών την εκπαιδευτική έρευνα για τα μαθηματικά.

Παραδοσιακά, η έρευνα γύρω από την κατανόηση της γωνίας έχει εστιάσει στην ανάπτυξη μοντέλων προοδευτικής γεωμετρικής κατανόησης (Dubinsky, 2020· Mitchelmore & White, 2000). Αν και οι προσεγγίσεις αυτές αναγνωρίζουν τον ρόλο της ενσώματης εμπειρίας στη μαθηματική κατανόηση, αυτή περιορίζεται στο σημείο αφετηρίας ενώ η γνώση που προκύπτει από αυτήν θεωρείται "διαισθητική". Πιο πρόσφατες προσεγγίσεις βασισμένες στις αρχές της ενσώματης μάθησης, *(embodied cognition)* (Núñez & Lakoff, 2005· Varela et al., 2017) εστιάζουν στη μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ σώματος, νου και φυσικού περιβάλλοντος. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, οι ενσώματες εμπειρίες, όπως οι χειρονομίες, η κίνηση του σώματος και ο χειρισμός απτών αντικειμένων *(manipulatives)* επηρεάζουν ουσιαστικά την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Πρόσφατα, η ανάπτυξη νέων ψηφιακών εργαλείων με δυνατότητες

δυναμικής ενσώματης αλληλεπίδρασης (π.χ. Kinect), παρέχουν ένα νέο πλαίσιο για τη μελέτη της ενσώματης νοηματοδότησης. Οι μελέτες για την δυναμική των περιβαλλόντων αυτών να ενισχύσουν την εννοιολογική κατανόηση, παρουσιάζουν ακόμη περιορισμένα και αποσπασματικά αποτελέσματα (Georgiou & Ioannou, 2019).

Σε αυτό το πλαίσιο, η έρευνα αυτή επιχειρεί αφενός να μελετήσει την νοηματοδότηση παιδιών 9 ετών για την έννοια της γωνίας μέσα σε εκπαιδευτικά πλαίσια βασισμένα στην ενσώματη προσέγγιση για τη νόηση (Lakoff & Núñez, 2000). Αφετέρου επιχειρεί να συνεισφέρει στην επιστημονική γνώση για τους τρόπους με τους οποίους τα ψηφιακά αυτά εργαλεία μπορούν να αξιοποιηθούν στην εκπαιδευτική πράξη ώστε να παρέχουν ουσιαστικές ευκαιρίες νοηματοδότησης. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της έρευνας σχεδιασμού (Bakker & van Eerde, 2014), η ερευνήτρια σχεδίασε και υλοποίησε μια εκπαιδευτική δραστηριότητα κατά την οποία παιδιά 9 ετών χρησιμοποίησαν ένα ψηφιακό εργαλείο με δυνατότητα ενσώματης αλληλεπίδρασης σε συνδυασμό με φυσικά αντικείμενα χειρισμού, για να δημιουργήσουν κινούμενες εικόνες *(animations)*, που προσομοιώνουν χορευτικές φιγούρες. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων συλλέχθηκαν δεδομένα καταγραφής οθόνης, ήχου και βίντεο από την δραστηριότητα. Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε σε δύο ερωτήματα:

ΕΕ1: Τι είδους εννοιολογικές μεταφορές αναπτύσσουν οι μαθητές για την έννοια της γωνίας, όταν χρησιμοποιούν ψηφιακά εργαλεία ενσώματης αλληλεπίδρασης σε συνδυασμό με φυσικά αντικείμενα χειρισμού;

ΕΕ2: Τι είδους νοήματα για τη γωνία αναπτύσσουν τα παιδιά μέσα από την ανάπτυξη των εννοιολογικών αυτών μεταφορών;

Ενσώματες μεταφορές στα Μαθηματικά

Μία κεντρική ιδέα που έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο της θεωρίας της ενσώματης νόησης *(embodied cognition)* είναι ότι τα άτομα κατανοούν σύνθετες και αφηρημένες έννοιες, όπως μαθηματικές έννοιες, μέσα από τη δημιουργία εννοιολογικών μεταφορών (Lakoff & Núñez, 2000). Μία μεταφορά είναι μια έμμεση μορφή αναλογίας, στην οποία γίνεται σύγκριση δύο εμπειρικών πεδίων (Presmeg, 2013). Για να κατανοήσουμε μία μεταφορά θα πρέπει να αναγνωρίσουμε μια αντιστοιχία *(mapping)* ανάμεσα στο πεδίο-στόχο *(target domain)*, δηλαδή αυτό που θέλουμε να κατανοήσουμε, και στο πεδίο-πηγή *(source domain)*, δηλαδή το οικείο πεδίο που χρησιμοποιούμε για να το εξηγήσουμε. Οι μεταφορές επιτρέπουν την αντιστοίχιση μεταξύ πεδίου-πηγής και πεδίου-στόχου μέσα από κοινά και διαφορετικά χαρακτηριστικά. Τα κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ των δύο πεδίων συνιστούν τη "βάση" της σύγκρισης, υποστηρίζοντας την αντιστοίχιση τους. Από την άλλη, τα σημεία διαφοροποίησης εισάγουν νέα στοιχεία στο πεδίο-στόχο, διευρύνοντας τη νοηματοδότηση και στα δύο πεδία (Lakoff & Núñez, 2000). Η αντιστοίχιση εκφράζεται μέσω της μεταφορικής γλώσσας, διευκολύνοντας την κατανόηση και επικοινωνία αφηρημένων εννοιών μέσω οικείων όρων (Lakoff & Núñez, 2000· Presmeg, 2013). Σύμφωνα με τους Lakoff και Nunez (2000) η μεταφορική σκέψη βασίζεται στις άμεσες σωματικές μας εμπειρίες, στις αντιληπτικές και αισθητηριακές λειτουργίες του σώματός μας γι' αυτό και οι πρωτογενείς μεταφορές *(primary metaphors)* που χρησιμοποιούν τα άτομα για να υποστηρίξουν την κατανόηση νέων εννοιών θεωρούνται ενσώματες *(embodied metaphors)*.

Δύο βασικοί τύποι μεταφορών συμβάλλουν στη διαμόρφωση μαθηματικών εννοιών: οι μεταφορές θεμελίωσης *(grounding metaphors)* και οι μεταφορές σύνδεσης *(linking metaphors)*. Οι μεταφορές θεμελίωσης βασίζονται σε οικεία πλαίσια εμπειρίας και χρησιμοποιούνται για να καταστήσουν τις αφηρημένες έννοιες προσιτές. Για παράδειγμα η πρόσθεση ταυτίζεται με την προσθήκη νέων αντικειμένων σε ένα υπάρχον σύνολο από αυτά. Οι μεταφορές σύνδεσης επιτρέπουν τη συσχέτιση μεταξύ διαφορετικών αφηρημένων πεδίων. Για παράδειγμα, όταν

κατανοούμε μεταφορικά τους αριθμούς ως σημεία σε μία γραμμή, δημιουργούμε σύνδεση μεταξύ αριθμητικής και γεωμετρίας. Ένα παράδειγμα μεταφοράς σύνδεσης είναι η μεταφορά της ενσώματης ταύτισης (ή αλλιώς σωματο-συντονισμένη μεταφορά) που εισήχθη από τον Seymour Papert (1980) στο πλαίσιο της κατασκευαστικής θεωρίας για τη μάθηση και συνδέθηκε με την ανάπτυξη της γλώσσας προγραμματισμού Logo. Κατά την ενσώματη ταύτιση το άτομο ταυτίζεται σωματικά με ένα αντικείμενο ή έννοια, χρησιμοποιώντας το σώμα του ως σημείο αναφοράς για την κατανόηση της συμπεριφοράς του.

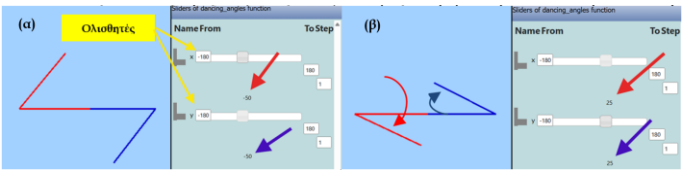
Μεθοδολογία

Η μελέτη υιοθετεί ποιοτική μεθοδολογία και αποτελεί μια έρευνα βασισμένη στον σχεδιασμό (*design-based research)*. Εστιάζει στην ανάλυση του τρόπου με τον οποίο διάφορα στοιχεία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας μέσα από διαδοχικούς κύκλους ανάλυσης και επανασχεδιασμού (Bakker & van Eerde, 2014). Στην παρούσα εργασία, παρουσιάζονται τα ευρήματα από τον πρώτο κύκλο σχεδιασμού-υλοποίησης-αξιολόγησης της ερευνητικής παρέμβασης. Κατά την παρέμβαση, επτά παιδιά της Δ' τάξης ενός Δημοτικού σχολείου χρησιμοποίησαν ένα ψηφιακό εργαλείο ενσώματης αλληλεπίδρασης σε συνδυασμό με αντικείμενα χειρισμού, φιγούρες φτιαγμένες από σύρματα για κατασκευές *(pipe cleaners)*, για να δημιουργήσουν κινούμενες εικόνες που προσομοιώνουν χορευτικές φιγούρες. Στο πλαίσιο του χορού, η έννοια της γωνίας προσεγγίζεται ως δυναμική κίνηση του σώματος ή μέρους του σώματος στο χώρο.

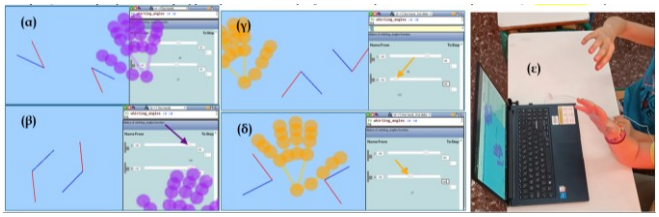
Οι μαθητές χρησιμοποίησαν το ψηφιακό περιβάλλον MaLT2Dance (https://extendt2.com/widgets/malt2dance/), μια επέκταση του MaLT2 με τεχνολογία αναγνώρισης κίνησης, η οποία επιτρέπει ενσώματη αλληλεπίδραση. Για τους σκοπούς της έρευνας, η ερευνήτρια σχεδίασε στο ψηφιακό περιβάλλον δύο μικρόκοσμους. Στους μικρόκοσμους τα παιδιά χρησιμοποιούσαν δύο ολισθητές (Σχήμα 1α) που μετέβαλλαν γωνιακές σχέσεις που εμφανίζονταν στη σκηνή, ώστε να κάνουν τα σχήματα να δημιουργούν χορευτικές φιγούρες συγχρονισμένες στη μουσική που είχαν επιλέξει. Η μετακίνηση στις μπάρες των ολισθητών συνοδεύονταν με τη μεταβολή των εμφανών, κάτω από την μπάρα τιμών, που αντιστοιχούσαν στο μέτρο της γωνιακής σχέσης που άλλαζε (Σχήμα 1β). Η μετακίνηση των μπαρών των ολισθητών γινόταν είτε με το ποντίκι είτε με τα χέρια των παιδιών, τα οποία το περιβάλλον αναγνωρίζει μέσα από την ενσωματωμένη λειτουργία αναγνώρισης κίνησης (hand tracking system) (Σχήμα 2).

Στον πρώτο μικρόκοσμο ο ένας ολισθητής x μεταβάλει το μέτρο της κόκκινης γωνίας και ο ολισθητής y το μέτρο της μπλε γωνίας (Σχήμα 1). Οι δύο γωνίες, έχουν σχεδιαστεί από την ερευνήτρια με τη χρήση προγραμματιστικών εντολών που αντιστοιχούν σε οδηγίες κατεύθυνσης με στόχο να προσομοιώνουν δύο "χορευτές" που βρίσκονται αντικριστά, κοιτούν προς την αντίθετη κατεύθυνση. Όσο οι τιμές των ολισθητών αυξάνονται τόσο οι γωνίες-χορευτές ανοίγουν τη μία πλευρά τους προς τα δεξιά σε σχέση με την αρχική τους κατεύθυνση. Έτσι όταν και στις δύο γωνίες τα παιδιά αυξάνουν τις τιμές, οι γωνίες ανοίγουν προς διαφορετική κατεύθυνση αναφορικά με την οθόνη (Σχήμα 1β).

Στο δεύτερο μικρόκοσμο που χρησιμοποίησαν τα παιδιά ο ένας ολισθητής (x) μετέβαλε το μέτρο και των δύο γωνιών που εμφανίζονται στη σκηνή (Σχήμα 2α, β) ενώ ο δεύτερος (a) την γωνιακή σχέση που καθορίζει τον προσανατολισμό τους (Σχήμα 2γ, δ).



Σχήμα 1. Στον πρώτο μικρόκοσμο, αυξάνοντας την τιμή του x η κόκκινη γωνία "ανοίγει" προς το κάτω μέρος της οθόνης (β). Ενώ αυξάνοντας την τιμή του y η μπλε γωνία "ανοίγει" προς το πάνω μέρος της οθόνης (β)



Σχήμα 2. Ο δεύτερος μικρόκοσμος. Αριστερά, κινώντας τον ολισθητή (a) αλλάζει το μέτρο των γωνιών (α, β), ενώ δεξιά κινώντας τον ολισθητή (x) αλλάζει η κατεύθυνση των γωνιών (γ, δ)

Η παρέμβαση διήρκεσε πέντε διδακτικές ώρες και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του επίσημου σχολικού προγράμματος σε συνεργασία με τη δασκάλα της τάξης. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ζευγάρια των 2-3 ατόμων. Κάθε ομάδα χρησιμοποίησε έναν υπολογιστή και ένα ζευγάρι ακουστικά.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων περιλάμβανε αρχεία καταγραφής οθόνης, βίντεο και ήχου. Η ανάλυση των δεδομένων ακολούθησε τέσσερα στάδια. Αρχικά η ερευνήτρια συγχρόνισε και κατέγραψε τα δεδομένα. Στη συνέχεια εντόπισε σε αυτά κρίσιμα επεισόδια κατά τα οποία τα παιδιά εξέφραζαν τους συλλογισμούς τους. Σε τρίτη φάση, η ερευνήτρια απέδωσε στα επεισόδια περιγραφικούς κωδικούς. Για την κωδικοποίηση των επεισοδίων η ερευνήτρια χρησιμοποίησε όρους από τη σχετική βιβλιογραφία (π.χ., "μεταφορά ενσώματης ταύτισης") (Xu & Zammit, 2020). Τέλος με βάση τους κωδικούς τους, η ερευνήτρια δημιούργησε ευρύτερες κατηγορίες οι οποίες αντιστοιχούν στα είδη των μεταφορών και νοημάτων που προέκυψαν κατά τη δραστηριότητα.

Αποτελέσματα

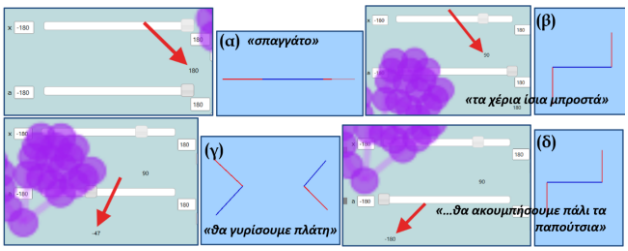
Η μεταφορά της ενσώματης ταύτισης

Τα παιδιά αρχικά περιγράφουν τις μεταβολές των γωνιακών σχέσεων χρησιμοποιώντας έννοιες από το πεδίο του χορού. Στο Επεισόδιο 1 δουλεύουν στο δεύτερο μικρόκοσμο (Σχήμα 2γ, δ). Η μαθήτρια (Μ1) στο Επεισόδιο 1 περιγράφει στην ερευνήτρια (Ε) την ακολουθία των κινήσεων της χορογραφίας που έχει ετοιμάσει με τη συμμαθήτρια της.

Επεισόδιο 1

Μ4: Θα ξαπλώσουμε κάτω και θα κάνουμε σπαγγάτο. Θα ενώσουμε μετά τα πόδια έτσι…(Σχήμα 3α) Θα τεντώσουμε τα χέρια ίσια μπροστά (Σχήμα 3β) και μετά θα γυρίσουμε

την πλάτη (Σχήμα 3γ) και θα ακουμπήσουμε τα παπούτσια (Σχήμα 3δ). Δηλαδή μια ίσια γραμμή στην αρχή (σπαγγάτο), μετά όρθιο (βάζει την τιμή 90 στον ολισθητή x) μετά ίσια (180).
Ε: Για να κάνω σπαγγάτο τι πρέπει να κάνω;
Μ4: Να το πας μέχρι τέρμα στο 180 (Σχήμα 3α)…και μετά ίσια μπροστά, 90 (Σχήμα 3β). Και μετά πιρουέτα και γυρίζουμε (Σχήμα 3γ).
Ε: Δείξε μου πώς κάνει το σχήμα την πιρουέτα.
Μ4: Το κάνουμε κύκλο, πρέπει να φτάσω στο τέρμα και μετά ξανά μέχρι τέρμα (κινεί την μπάρα του ολισθητή μέχρι το 180 και μετά προς το -180).



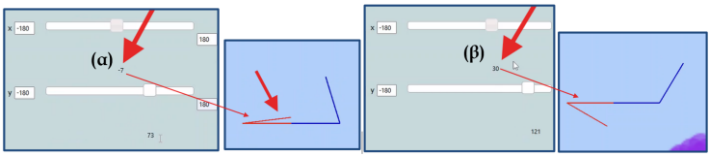
Σχήμα 3. Η μαθήτρια κινεί τον ολισθητή ώστε οι γωνίες να αναπαριστούν τη χορευτική φιγούρα που αναφέρει κάθε φορά

Σε αυτό το επεισόδιο (Επεισόδιο 1), η μαθήτρια χρησιμοποιεί μεταφορές ενσώματης ταύτισης για να επικοινωνήσει τις κινήσεις του σχήματος ως αποτέλεσμα της μετακίνησης της μπάρας των ολισθητών. Η χρήση του "σπαγγάτο" συνδέεται με την έκφραση "μέχρι τέρμα" και την τιμή "180", για να εκφράσει την ευθεία γωνία. Η "πιρουέτα" συνδέεται με την μετακίνηση της μπάρας του ολισθητή a, που αλλάζει την κατεύθυνση της γωνίας, και με την έκφραση "στο τέρμα και μετά ξανά μέχρι τέρμα" μία επανάληψη που υποδηλώνει πως η μαθήτρια αισθητοποιεί πως αν κάνει την κίνηση που δημιουργεί την ευθεία γωνία δύο φορές το σχήμα θα ολοκληρώσει μια περιστροφή, θα κάνει τον "κύκλο", μία πλήρη γωνία. Η μεταφορά του χορού λειτουργεί έτσι ως μεταφορά θεμελίωσης (grounding metaphors) καθώς οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (π.χ. 180°) συνδέονται με σωματικές εμπειρίες (Lakoff & Núñez, 2000) και εκφράζονται με μεταφορική γλώσσα (Presmeg, 2013).

Χωρική μεταφορά

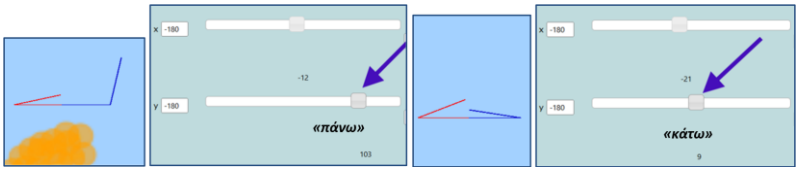
Στο Επεισόδιο 2 οι μαθητές δουλεύουν με τον ίδιο τρόπο, ο ένας με το ποντίκι και ο άλλος με το χέρι. Δουλεύουν στον πρώτο μικρόκοσμο (Σχήμα 2α, β). Προσπαθούν να συντονιστούν για να κάνουν τις πλευρές που μετακινούνται να πλησιάζουν και να απομακρύνονται. Ο μαθητής που κινεί τον ολισθητή y, που μεταβάλλει την μπλε γωνία, καθοδηγεί τον μαθητή που κινεί τον ολισθητή α που μεταβάλλει την κόκκινη γωνία με το χέρι. Ενώ ο δεύτερος προσπαθεί να ανοίξει την κόκκινη γωνία συμμετρικά ο συμμαθητής του κάνει μία παρατήρηση (Σχήμα 4).

Επεισόδιο 2
Μ5: Μπροστά πρέπει να πάει (εννοεί πως το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να μετακινηθεί προς το πάνω μέρος της οθόνης), δεν είναι μείον (Σχήμα 4α)
Μ6: Όταν πηγαίνει προς τα εδώ (κινεί το χέρι του με τρόπο που αυξάνει τις τιμές του ολισθητή x και το ευθύγραμμο τμήμα μετακινείται χαμηλότερα στην οθόνη όπως φαίνεται στην Σχήμα 4β), δεν είναι μείον…(η τιμή του ολισθητή είναι 30).



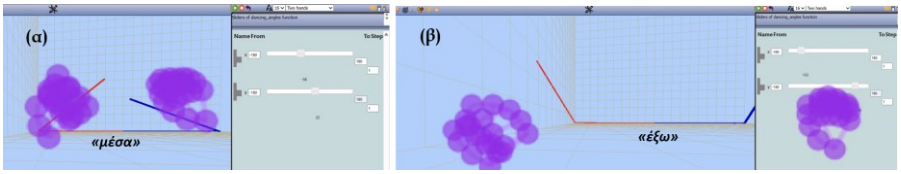
Σχήμα 4. Ο ολισθητής δείχνει την τιμή -7 (α) ενώ το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα ανοίγει προς το πάνω μέρος της οθόνης. Αντίθετα όταν ο ολισθητής κινείται προς τις θετικές τιμές, το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα κινείται προς το κάτω μέρος της σκηνής (β)

Μ5: Κάτσε, ακολούθα εμένα…
Ο μαθητής ενεργοποιεί και το δεύτερο χέρι.
Μ5: Πάνω -κάτω, πάνω -κάτω (Σχήμα 5)



Σχήμα 5. Ο μαθητής λέει "πάνω" ενώ μετακινεί τον ολισθητή y στην τιμή 103. Η μπλε γωνία ανοίγει προς το πάνω μέρος της οθόνης (αριστερά). Λέει "κάτω" ενώ μετακινεί τον ολισθητή στην τιμή 9. Το μπλε ευθύγραμμο τμήμα κινείται προς το κάτω μέρος της οθόνης (δεξιά)

Μ6: Όχι, όχι, μέσα έξω, μέσα έξω είναι. Μέσα έρχεται έτσι κοντά (Σχήμα 6α) και μετά έξω πηγαίνει μακριά (Σχήμα 6β).



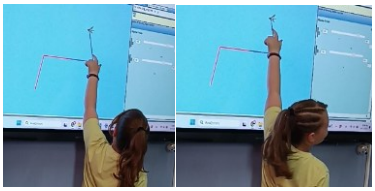
Σχήμα 6. Ο μαθητής παρατηρεί πως η κίνηση που πρέπει να κάνουν θα πρέπει να είναι μέσα όταν χέρια τους είναι κοντά (α) και έξω (β) όταν τα χέρια τους είναι μακριά

Σε αυτό το επεισόδιο (Επεισόδιο 2), οι μαθητές χρησιμοποιούν χωρικές μεταφορές για να περιγράψουν την κίνηση που προκαλούν οι ολισθητές. Η κίνηση προς το "μπροστά" ταυτίζεται με την αύξηση τιμής στον ολισθητή, ενώ το "μέσα" και το "έξω", αν και δεν αναφέρεται ρητά, ταυτίζεται με το κοντά και το μακριά από την τιμή 0 στους δύο ολισθητές, υποδηλώνοντας την κατανόηση της αυξομείωσης του μέτρου αλλά σε διαφορετικό προσανατολισμό.

Η γωνία ως μεταβαλλόμενο μέτρο

Στην αρχή της δραστηριότητας, όταν ζητήθηκε από τα παιδιά να εξηγήσουν τι αλλάζει με τη μετακίνηση των ολισθητών, τα παιδιά συμφώνησαν ότι "αλλάζει η γωνία". Όταν τους

ζητήθηκε να το δείξουν, έδειξαν το ευθύγραμμο τμήμα που μετακινείται κάθε φορά (Σχήμα 7), μια συχνή παρανόηση που αναφέρεται στη βιβλιογραφία: τα παιδιά εστιάζουν σε ορατά στοιχεία της γωνίας όταν τη βλέπουν ως σχήμα και συγχέουν το μέγεθος τους με το μήκος της πλευράς τους (Piu et al., 2016). Αν και η παρανόηση αποδίδεται στη στατική απεικόνιση της γωνίας, εδώ φαίνεται ότι παραμένει ακόμα και όταν η γωνία προσεγγίζεται δυναμικά και τα παιδιά καλούνται να περιγράψουν "τι αλλάζει".



Σχήμα 7. Η μαθήτρια δείχνει το ευθύγραμμο τμήμα, όταν της ζητείται να δείξει τη γωνία που αλλάζει με την κίνηση του ολισθητή

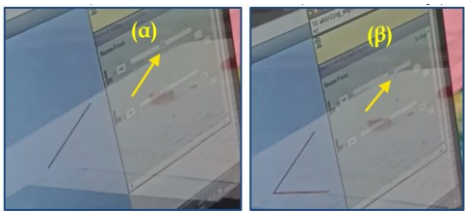
Καθώς τα παιδιά είχαν στόχο να φτιάξουν χορευτικές φιγούρες, με στόχο να δημιουργήσουν μια χορογραφία η προσοχή τους σταδιακά μετατοπίστηκε από τα ορατά στοιχεία του σχήματος και επικεντρώθηκε στη διαδικασία μεταβολής του μέσα από την κίνηση των ολισθητών. Στο Επεισόδιο 3 οι μαθήτριες δουλεύουν στον δεύτερο μικρόκοσμο. Προσπαθώντας να εξηγήσει τη μεταβολή που προκαλεί ο πρώτος ολισθητής στο σχήμα η μαθήτρια περιγράφει:

Επεισόδιο 3

Μ4: Κουνιέται το κόκκινο και μεγαλώνει και μικραίνει. Όταν το πας έτσι προς τα δεξιά (εννοεί τον πρώτο ολισθητή) μεγαλώνει και μικραίνει όταν το πας λίγο πιο κάτω (δείχνει κινώντας τον ολισθητή).

Ε: Τι είναι αυτό που μεγαλώνει;

Μ4: Η γωνία γιατί ανοίγει πιο πολύ και πάει σε μεγαλύτερο αριθμό ας πούμε εκεί ξεκινάει το 0 (Σχήμα 8α) και πάω στο 49 (Σχήμα 8β).



Σχήμα 8. Η μαθήτρια κινεί τον ολισθητή από το 0 (α) ως το 49 (β)

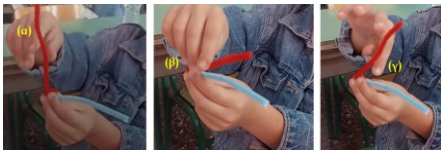
Ε: Γίνεται πιο μεγάλο έτσι το κόκκινο δηλαδή;

Μ4: Ναι αν πάει στους μεγαλύτερους αριθμούς

Μ3: Όχι αφού αυτό το ίδιο είναι, δε βάλαμε άλλο…(παίρνει στα χέρια της τη φιγούρα). Η γωνία…(δείχνει στο pipe cleaner για να εξηγήσει όπως φαίνεται στην Σχήμα 9) η γωνία είναι αυτό που αν είναι ορθή είναι αυτό (Σχήμα 9α)…Την κουνάω και τη μικραίνω (Σχήμα 9β).

Ε: Τι μικραίνει;

Μ3: Αυτό εδώ…(Σχήμα 9γ)



Σχήμα 9. Η μαθήτρια δείχνει την ορθή γωνία (α) και πώς την κουνάει και τη μικραίνει (β). Στο τέλος δείχνει πως αυτό που μικράινει βρίσκεται στην περιοχή ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα (γ)

Όπως και σε προηγούμενες έρευνες, και εδώ, η μαθήτρια εκφράζει μία συχνή παρανόηση, τη σύγχυση του μεγέθους της γωνίας με το μήκος των πλευρών της (Piu et al., 2016). Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στο Επεισόδιο 4, όταν η ερευνήτρια ρωτά τα παιδιά τι κινεί ο πρώτος ολισθητής.

Επεισόδιο 4

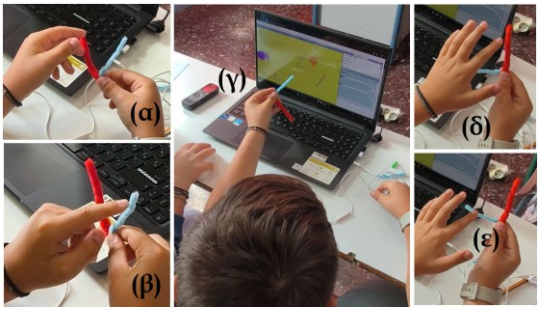
M4: Αλλάζει το κόκκινο. Η γωνία.

M5: Οι μοίρες. Για παράδειγμα αυτή είναι η ορθή γωνία 90 μοίρες (Σχήμα 10α), αυτή είναι μεγαλύτερη από 90 μοίρες (Σχήμα 10β), αυτή είναι λιγότερο από 90 μοίρες (Σχήμα 10γ).

Σχήμα 10. Ο μαθητής δείχνει στη φιγούρα και εξηγεί πως αυτό που αλλλάζει είναι οι μοίρες. Δείχνει την αλλαγή συγκρίνοντας την ορθή (α), με μία που είναι μεγαλύτερη από 90 μοίρες (β) και με μία που είναι λιγότερο από 90 μοίρες (γ)

E: Ας δούμε τι αλλάζει με το άλλο (ολισθητής a)

Παίρνει το τρίτο παιδί το pipe cleaner.



Σχήμα 11. Ο μαθητής παρατηρεί πως ο ένας ολισθητής μετακινεί το κόκκινο κομμάτι της κατασκευής (α) και ο άλλος το μπλε (β). Συγκρίνει το φυσικό με το ψηφιακό αντικείμενο (γ) και επιβεβαιώνει πως οι μοίρες βρίσκονται στην περιοχή ανάμεσα στα κομμάτια της κατασκευής (δ, ε)

Μ6: Το πρώτο αλλάζει αυτό (Σχήμα 11α)…Το άλλο αλλάζει αυτό… (Σχήμα 11β).
Ε:Αλλάζουν οι μοίρες που μου έδειξε πριν;
Μ6: Όχι αλλά κινείται και αυτό (Σχήμα 11β) αρά αλλάζουν κάπως και οι μοίρες…το περιστρέφει όλο.
Ο μαθητής τώρα συγκρίνει το φυσικό αντικείμενο με το ψηφιακό (Σχήμα 11γ)
Μ5: Οι μοίρες είναι εδώ στο κόκκινο (ανοιγοκλείνει το pipe cleaner), εδώ (δείχνει ανάμεσα), δεν αλλάζουν (Σχήμα 11δ, ε).
Μ6: Περιστρέφει τις μοίρες!

Και στα δύο Επεισόδια (3, 4) η χρήση του ολισθητή για τη μεταβολή της γωνίας συνδέεται με σωματική εμπειρία του χειρισμού του pipe cleaner, μέσα από την οποία τα παιδιά αισθητοποιούν πως η γωνία δεν είναι το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα αλλά κάτι που βρίσκεται στην περιοχή που δείχνουν στις Εικόνες 10γ, 11, ε. Η έννοια της γωνίας γίνεται αντικείμενο διερεύνησης μέσα από τη σχέση της με τις μοίρες. Τα παιδιά επιχειρούν να εντοπίσουν τι ακριβώς αλλάζει κάθε φορά που κινούν τους ολισθητές. Και στις δύο περιπτώσεις δείχνουν πως αυτό που αλλάζει "είναι το κόκκινο". Ο μαθητής στο Επειδόσιο 4 επεμβαίνει λέγοντας πως "αλλάζουν οι μοίρες", υποδηλώνοντας πως συνδέει την έννοια της γωνίας με μία ποσότητα. Στη συνέχεια μάλιστα εξηγεί χρησιμοποιώντας αριθμούς, "η ορθή είναι 90 μοίρες" "αυτή είναι μεγαλύτερη από 90 μοίρες". Ο μαθητής αποδίδει σε αυτό που αλλάζει, στη γωνία που δείχνει κάθε φορά διαφορετική τιμή και ταυτίζει το πόσο η γωνία "ανοίγει" με το πόσο περισσοτερες ή λιγότερες μοίρες αντιστοιχούν στο κάθε στιγμιότυπο, όπως και η μαθήτρια στο Επεισόδιο 3 (Σχήμα 8). Όταν εν συνεχεία αρχίζουν να σκέφτονται τι αλλάζει όταν κινούν τον δεύτερο ολισθητή οι μαθητές στο Επεισόδιο 4 δυσκολεύονται να συνδέσουν την έκφραση "μοίρες" με την περιστροφή του σχήματος, υποδηλώνοντας πως η έμφαση στα εμφανή χαρακτηριστικά της γωνίας δεν ευνοεί την αντίληψη της ως στροφή. Ωστόσο αυτό που είναι ενδιαφέρον είναι πως διαισθητικά συμφωνουν τελικά πως αυτό που αλλάζει είναι "μοίρες" καθώς παρατηρούν πως με τον δεύτερο ολισθητή το μπλε ευθύγραμμο τμήμα κινείται και αυτό με ανάλογο τρόπο με τον οποίο κινείται και το κοκκινο στην πρώτη περίπτωση. Επομένως συνδέουν έστω και διαισθητικά την κίνηση με την αλλαγή κάποιας ποσότητας. Χαρακτηριστικό είναι πως στο τέλος του επεισοδίου ο μαθητής λέει πως αυτό που περιστρεφεται με την κίνηση του δεύτερου ολισθητή είναι οι "μοίρες", εννοώντας το σχήμα που περιστρέφεται στην σκηνή, ταυτίζοντας τον όρο μοίρες με τη γωνία.

Συμπεράσματα και συζήτηση

Η παρούσα μελέτη διερεύνησε τις εννοιολογικές μεταφοράς και τα νοήματα που αναπτύσσουν παιδιά της Δ΄ Δημοτικού αναφορικά με την έννοια της γωνίας στο πλαίσιο δραστηριοτήτων που περιλάμβαναν τη χρήση ενός ψηφιακού εργαλείου ενσώματης αλληλεπίδρασης και φυσικά αντικείμενα χειρισμού. Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η μαθηματική σκέψη των παιδιών μπορεί να ενεργοποιηθεί και να διαμορφωθεί ουσιαστικά μέσα από ενσώματες εμπειρίες που λειτουργούν ως μεταφορικά πεδία για τη διαμεσολάβηση αφηρημένων εννοιών (Lakoff & Núñez, 2000· Presmeg, 2013· Varela et al., 2017). Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, τα παιδιά ανέπτυξαν μεταφορές ενσώματης ταύτισης και χωρικές μεταφορές για να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους για τη γωνία. Μεταφορές όπως το "σπαγγάτο" και η "πιρουέτα" δηλώνουν την αισθητοποίηση της γωνίας ως δυναμικού μεγέθους και ως στροφής. Παράλληλα, οι μαθητές χρησιμοποίησαν χωρικές μεταφορές εγγύτητας όπως "μέσα–έξω" και "μπροστά–πίσω" για να αποδώσουν σχέσεις μεγέθους. Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, τα παιδιά ανέπτυξαν πολυτροπικά νοήματα για τη γωνία ως δυναμικά μεταβαλλόμενο αλλά και μετρήσιμο μέγεθος, συνδέοντας την

έννοια της στροφής με την αριθμητική μεταβολή. Η χρήση των ολισθητών σε συνδυασμό με τη χρήση αντικειμένων χειρισμού των φυσικών αντικειμένων (όπως τα pipe cleaners) επέτρεψε την άμεση αίσθηση της αλλαγής, ενισχύοντας την εννοιολόγηση της μέτρησης ως ποσοτικοποίηση της μεταβολής (Psycharis & Kynigos, 2008).

Αν και η παρούσα μελέτη προσφέρει πολύτιμες γνώσεις σχετικά με το πώς οι μαθητές του δημοτικού αναπτύσσουν εννοιολογικές μεταφορές και νοήματα για την έννοια της γωνίας η μελέτη έχει σημαντικούς περιορισμούς. Ως έρευνα σχεδιασμού, τα αποτελέσματα της δεν μπορούν να γενικευτούν, ωστόσο η αναλυτική περιγραφή των δραστηριοτήτων και της συλλογής και ανάλυσης δεδομένων εξασφαλίζει την εξωτερική της αξιοπιστία (Bakker & van Earde, 2014). Επιπλέον, μελλοντική έρευνα θα πρέπει να εξετάσει την ενσωμάτωση περισσότερων πολυτροπικών μεθόδων συλλογής και ανάλυσης δεδομένων, όπως συστηματική βιντεοσκόπηση, ώστε να αποτυπωθεί καλύτερα η δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ σώματος, ψηφιακού εργαλείου και περιβάλλοντος. Περαιτέρω μελέτες θα μπορούσαν επίσης να εξετάσουν πώς διαφορετικά είδη σχεδιασμού δραστηριοτήτων (π.χ., πιο δομημένες ερευνητικές προκλήσεις ή συνεργατικές αποστολές με συγκεκριμένους στόχους) επηρεάζουν τη φύση των μεταφορών και των νοημάτων που αναπτύσσουν τα παιδιά μέσα από την ενσώματη αλληλεπίδραση τόσο με ψηφιακά όσο και φυσικά εργαλεία.

Αναφορές

Bakker, A., & Dolly, & van Earde, D. (2014). An introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Advances in mathematics education* (pp. 429-466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Dubinsky, E. (2020). Actions, processes, objects, schemas (APOS) in Mathematics education. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_3

Georgiou, Y., & Ioannou, A. (2019). Embodied learning in a digital world: A systematic review of empirical research in K-12 education. In P. Díaz, A. Ioannou, K. Bhagat, & J. Spector (Eds.) *Learning in a digital world. Smart computing and intelligence* (pp. 155-177). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-8265-9_8

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics, 41,* 209-238. https://doi.org/10.1023/A:1003927811079

Núñez, R., & Lakoff, G. (2005). The cognitive foundations of mathematics: The role of conceptual metaphor. In *The Handbook of mathematical cognition* (pp. 109-124). Psychology Press.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Basic Books.

Piu, A., Fregola, C., & Santoro, A. (2016). Using a simulation game to make learning about angles meaningful. An exploratory study in primary school. *European Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 490-500.

Presmeg, N. C. (2013). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In *Mathematical reasoning* (pp. 267-279). Routledge.

Psycharis, G. & Kynigos, C. (2008) Exploring angle through geometrical constructions in a simulated 3D space. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematics Education* (pp. 1-7). ICME.

Smith, C. P., King, B., & Hoyte, J. (2014). Learning angles through movement: Critical actions for developing understanding in an embodied activity. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 95-108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.001

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (2017). *The embodied mind, revised edition: Cognitive science and human experience.* MIT press.

Xu, W., & Zammit, K. (2020). Applying thematic analysis to education: A hybrid approach to interpreting data in practitioner research. *International Journal of Qualitative Methods, 19*(2), 1-9. https://doi.org/10.1177/1609406920918810