ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2025)

14ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Σώμα, Κώδικας και Αντικείμενο: Μία Ενσώματη Εμπειρία Μαθητών ΕΠΑΛ Μέσω Προγραμματισμού Δυναμικών Ψηφιακών Μοντέλων και Τρισδιάστατης Εκτύπωσης

Χαρίκλεια Κορομπλή, Χρόνης Κυνηγός

doi: 10.12681/cetpe.9370

Βιβλιογραφική αναφορά:

Κορομπλή Χ., & Κυνηγός Χ. (2026). Σώμα, Κώδικας και Αντικείμενο: Μία Ενσώματη Εμπειρία Μαθητών ΕΠΑΛ Μέσω Προγραμματισμού Δυναμικών Ψηφιακών Μοντέλων και Τρισδιάστατης Εκτύπωσης. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 1057–1066. https://doi.org/10.12681/cetpe.9370

Σώμα, Κώδικας και Αντικείμενο: Μία Ενσώματη Εμπειρία Μαθητών ΕΠΑΛ Μέσω Προγραμματισμού Δυναμικών Ψηφιακών Μοντέλων και Τρισδιάστατης Εκτύπωσης

Χαρίκλεια Κορομπλή, Χρόνης Κυνηγός
charkor@eds.uoa.gr, kynigos@eds.uoa.gr
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα εξετάζει τη μαθηματική δραστηριότητα μαθητών ΕΠΑΛ κατά τον προγραμματισμό ψηφιακών μοντέλων για τρισδιάστατη εκτύπωση, υπό το πρίσμα της ενσώματης μαθηματικής σκέψης. Βασιζόμενη στη θεωρία της ενσώματης εργαλειοποίησης (Embodied Instrumentation) διερευνά πώς η σωματική δράση, η αλληλεπίδραση με ψηφιακά εργαλεία και η κατασκευαστική διαδικασία εμπλουτίζουν τη μαθηματική νοηματοδότηση. Μέσω μιας ποιοτικής εμπειρικής έρευνας, μελετάται πώς οι μαθητές αναπτύσσουν ενσώματα σχήματα σκέψης και στρατηγικές κατά τη δημιουργία φυσικών μοντέλων. Τα ευρήματα υπογραμμίζουν το ρόλο των εργαλείων στη διευκόλυνση της μετάβασης από τις αφηρημένες νοητικές, μαθηματικές και χωρικές διεργασίες, στις σωματικές εκφράσεις/δράσεις, και αντίστροφα. Συμβάλλει τόσο στη διδακτική των μαθηματικών με ψηφιακά εργαλεία όσο και στη συζήτηση σχετικά με την ενσώματη μάθηση, προτείνοντας ότι η ενσωμάτωση της 3D μοντελοποίησης και του προγραμματισμού, καθώς και η εισαγωγή νέων εννοιολογικών πεδίων, όπως αυτό της Εγγραψιμότητας, μπορεί να κομίσουν πρόσθετα παιδαγωγικά οφέλη.

Λέξεις κλειδιά: 3D printing, dynamic manipulation, δυναμικός χειρισμός, εγγραψιμότητα, ενσώματα Μαθηματικά, προγραμματισμός, τρισδιάστατη εκτύπωση

Εισαγωγή

Την τελευταία εικοσαετία, από την έρευνα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών προκύπτει πως η συμβολική και δυναμική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών αποτελεί μια κρίσιμη διάσταση της μαθησιακής εμπειρίας. Ο δυναμικός χειρισμός ενός γεωμετρικού αντικειμένου αναγνωρίζεται ότι μπορεί να υποστηρίξει την ανάπτυξη της μαθηματικής συλλογιστικής, τη γενίκευση και την ανάπτυξη εικασιών (Arzarello et al., 2002· Baccaglini & Mariotti, 2010· Healy & Hoyles, 2002). Ταυτόχρονα, καταγράφεται μία έντονη τάση εισαγωγής δραστηριοτήτων μαθηματικοποίησης-μοντελοποίησης, καθώς αναγνωρίζεται πως τείνουν να καλλιεργήσουν την κριτική ικανότητα των παιδιών (Blum & Niss, 1991). Ωστόσο, υπάρχει ένα κενό στη βιβλιογραφία σχετικά με το πώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται και χρησιμοποιούν τα προγραμματιστικά εργαλεία, για την έκφραση και τη μοντελοποίηση γεωμετρικών εννοιών. Η Γεωμετρία, παρόλο που αποτελεί γόνιμο πεδίο για μαθηματική μοντελοποίηση (Freudenthal, 1972) και διασυνδεδεμένες προσεγγίσεις (Κυνηγός, 2011), φαίνεται να υπολείπεται σε σχετικές έρευνες. Ακόμα και σήμερα, η διδασκαλία της γεωμετρίας βασίζεται συχνά σε προσχεδιασμένα οπτικά εργαλεία (χειραπτικά ή ψηφιακά), χωρίς να δίνεται επαρκής προσοχή στη δυναμική δημιουργία αντικειμένων από τα ίδια τα παιδιά (Ng & Chan, 2019). Παρά τις δυνατότητες που προσφέρουν οι τεχνολογίες τρισδιάστατης σχεδίασης και εκτύπωσης (Ng & Chan, 2019· Ng & Ferrara 2020· Ng & Ye, 2022), η σύνδεση μεταξύ της μοντελοποίησης γεωμετρικών εννοιών αξιοποιώντας λειτουργικότητες δυναμικού χειρισμού (Dynamic Manipulation) και η υλοποίηση τους μέσω τρισδιάστατης εκτύπωσης, παραμένει ελάχιστα διερευνημένη.

Η παρούσα μελέτη στοχεύει να διαπραγματευθεί αυτό το ζήτημα, εξετάζοντας πώς ο δυναμικός χειρισμός (Dynamic Manipulation) μοντέλων, στα οποία ενσωματώνονται γεωμετρικές σχέσεις, ιδιότητες και αναλλοίωτα, μπορεί να συνδυαστεί με τη διαδικασία της τρισδιάστατης εκτύπωσης, ώστε να ενισχυθεί η μαθησιακή εμπειρία. Στόχος ήταν να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

Α) Πώς ο δυναμικός χειρισμός των μοντέλων και των παραμέτρων που τα καθορίζουν, καθώς και η προοπτική υλοποίησης που προσφέρει η τρισδιάστατη εκτύπωση, επηρεάζουν τους τρόπους με τους οποίους τα παιδιά αναπτύσσουν ενσώματα σχήματα σκέψης κατά τις κατασκευές τους;

Β) Πώς τα παιδιά εξερευνούν την πορεία από το δισδιάστατο σχήμα στο τρισδιάστατο σώμα και πώς αποτυπώνουν (λεκτικά, χειρονομώντας, συμβολικά) την πορεία αυτή;

Θεωρητικό υπόβαθρο

Ενσώματη Μαθηματική Σκέψη (Embodied Mathematical Thinking) και Κατασκευαστική Μάθηση (Learning as Making)

Κατά τη θεωρία της Ενσώματης Μαθηματικής Σκέψης, η μαθηματική νοηματοδότηση αναδύεται μέσω σωματικών αλληλεπιδράσεων με το περιβάλλον και με υλικά εργαλεία (Alibali & Nathan, 2011). Εμπειρικές μελέτες επιβεβαιώνουν ότι η χειροκίνητη εμπλοκή (π.χ. χειρονομίες, χειρισμός αντικειμένων) αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τη μαθηματική κατανόηση (Nemirovsky et al., 2013), με την κίνηση και τη γνώση να συνιστούν δυναμικά αλληλένδετα φαινόμενα (Abrahamson & Bakker, 2016· Roth, 2016). Ειδικότερα, έρευνες όπως αυτή των Roth & Maheux (2015) καταδεικνύουν ότι η μαθηματική σκέψη δεν περιορίζεται σε εικονικές αναπαραστάσεις, αλλά εκδηλώνεται μέσω δημιουργικών διαδικασιών όπου το σώμα και ο νους συνεργάζονται αδιάσπαστα (de Freitas & Sinclair, 2014). Τα "μαθηματικά όργανα" (mathematical instruments) δεν είναι απλά παθητικά μέσα, αλλά συστήματα που ενσωματώνουν υλικές, πρακτικές και πολυτροπικές αλληλεπιδράσεις, όπου η γνώση αναδύεται μέσω της σωματικής εμπλοκής, υπονοώντας μετασχηματισμούς στις βιωμένες εμπειρίες των παιδιών (Nemirovsky et al., 2020). Η θεώρηση αυτή, αμφισβητεί την παραδοσιακή διάκριση μεταξύ "εσωτερικής" γνώσης και "εξωτερικής" πράξης, θέτοντας τη σωματική δράση ως συστατικό της μαθηματικής νοηματοδότησης και πρακτικής.

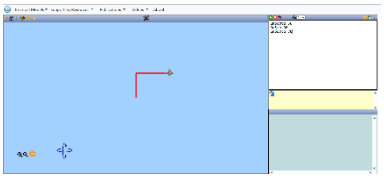
Σε αυτό το πλαίσιο, τεχνολογίες που παρέχουν τη δυνατότητα κατασκευής, όπως για παράδειγμα τα 3D στυλό και η 3D εκτύπωση, αναδεικνύονται ως κρίσιμα εργαλεία, καθώς η υλική υποστασιοποίηση, οι χειρονομίες και η μετατροπή μαθηματικών εννοιών σε απτά αντικείμενα ευνοούν την ανάδυση νέων νοημάτων (Edwards et al., 2014· Ng & Chan, 2019· Ng & Ferrara, 2020). Ως διαδικασία, η Κατασκευαστική Μάθηση (Learning as Making) ενισχύει τόσο τις πρακτικές δεξιότητες όσο και τη δημιουργική έκφραση, προάγοντας την αίσθηση ιδιοκτησίας, την καλλιτεχνική αισθητική και την ψυχολογική ικανοποίηση. Από τη σκοπιά της ενσώματης μάθησης, η μάθηση μέσω της Κατασκευής αφορά την ενσώματη αλληλεπίδραση με υλικά, όπου η γνώση κατασκευάζεται μέσω πολυτροπικών εμπειριών (αφής, κίνησης, αντίληψης) (Radford, 2009). Αυτή η προσέγγιση αμφισβητεί τις παραδοσιακές διχοτομίες (π.χ. σώμα-νους, υλικό-αφηρημένο) και εναρμονίζεται με τις αρχές της Κατασκευαστικής Θεωρίας (Constructionism) (Papert, 1980), όπου η μάθηση προκύπτει μέσω της δημιουργίας δημόσιων και υλικών οντοτήτων που έχουν προσωπικό νόημα για τα παιδιά (diSessa, 1991).

Ενσώματη εργαλειοποίηση (Embodied instrumentation)

Το θεωρητικό πλαίσιο της Ενσώματης Εργαλειοποίησης συνδέει τις θεωρίες της Εργαλειοποίησης (Instrumental Approach Theories) και της Ενσώματης Γνώσης (Embodied Cognition Theories), προσφέροντας μια ολιστική προσέγγιση για τη μελέτη του ρόλου του σώματος στη μαθηματική μάθηση με ψηφιακά μέσα (Alberto et al., 2019). Συνθέτοντας αυτές τις προοπτικές, τονίζει τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ σχημάτων εργαλειοποίησης (στρατηγικών που αφορούν τη χρήση εργαλείων) και σχημάτων αισθητοκινητικής δράσης (σωματικές πράξεις), αποκαλύπτοντας πώς ο συντονισμός τους διαμορφώνει τη μαθηματική κατανόηση (Drijvers, 2019· Shvarts et al., 2021). Κεντρική ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι η αναγνώριση ότι τα ψηφιακά εργαλεία (τεχνητά αντικείμενα) δεν μεταδίδουν απλώς αφηρημένες έννοιες, αλλά συμμετέχουν ενεργά σε διαδικασίες συν-ανάδυσης: η αισθητοκινητική εμπλοκή, η τεχνική δεξιότητα στη χρήση εργαλείων και η μαθηματική γνωστική διαδικασία εξελίσσονται συνεργικά. Το πλαίσιο υπογραμμίζει τον ρόλο του σώματος στη ρύθμιση εργαλειοποιημένων δράσεων, όπου η φυσική αλληλεπίδραση με την τεχνολογία (π.χ. ο χειρισμός τρισδιάστατων μοντέλων) ενισχύει τη νοηματοδότηση. Παράλληλα, προσαρμόζεται στις εξελίξεις των ψηφιακών περιβαλλόντων, όπου η πολυτροπική ανατροφοδότηση (π.χ. απτική, οπτική) ενισχύει τη σύνδεση μεταξύ αντίληψης και μαθηματικής σκέψης. Στην παρούσα μελέτη, χρησιμοποιείται με διττό ρόλο, καθώς παρέχει αφενός μια προοπτική εργαλειοποίησης, εστιάζοντας στην εξέλιξη σχημάτων σε στερεά τρισδιάστατα σώματα και, αφ' ετέρου μια ενσώματη προοπτική, αναδεικνύοντας πώς οι σωματικές δράσεις (π.χ. χειρονομίες, χωρική πλοήγηση) και οι εμπειρίες αντίληψης (π.χ. απεικόνιση περιστροφών) εδραιώνουν αφηρημένες έννοιες μέσω της φυσικής αλληλεπίδρασης.

MaLT2

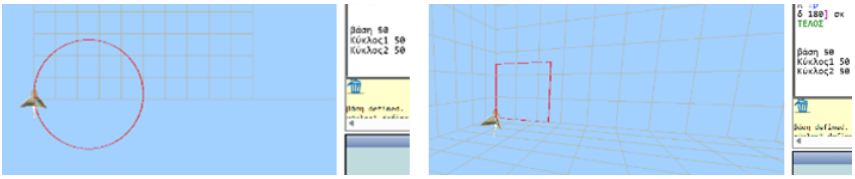
Το MaLT2 (http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/#Gr) είναι ένα υπολογιστικό περιβάλλον για τη δημιουργία και το χειρισμό τρισδιάστατων δυναμικών ψηφιακών μοντέλων (Σχήμα 1). Ενοποιεί πολυτροπικές αναπαραστάσεις, συμβολικές (κώδικας Logo) και εικονικές (γραφικά αντικείμενα) και επιτρέπει το δυναμικό χειρισμό των παραμέτρων μιας εκτελεσμένης διαδικασίας, διασυνδέοντας λειτουργικότητες που αλληλεπιδρούν δυναμικά (Kynigos & Grizioti, 2018). Ταυτόχρονα, παρέχει τη δυνατότητα αλλαγής γωνίας θέασης του τρισδιάστατου χώρου. Επιτρέπει στο χρήστη να ορίσει υπολογιστικές διαδικασίες (sets of commands), οι οποίες κατά την εκτέλεσή τους, παράγουν γεωμετρικά σχήματα σε μια τρισδιάστατη "σκηνή", γεφυρώνοντας τον προγραμματισμό με τις μαθηματικές έννοιες και το μαθηματικό φορμαλισμό (Κυνηγός, 2011). Ο δυναμικός χειρισμός των μοντέλων δίνει την ευκαιρία στο χρήστη να εισάγει μεταβλητές στον κώδικα και να τις τροποποιεί μέσω ολισθητών (sliders), προωθώντας έτσι την απευθείας παρακολούθηση της επίδρασης των μεταβλητών στα γραφικά αποτελέσματα και ενισχύοντας την κατανόηση της σχέσης ανάμεσα σε αλγεβρικές παραμέτρους και γεωμετρικές ιδιότητες (Grizioti & Kynigos, 2021).



Σχήμα 1. Το περιβάλλον MaLT2

Πιλοτική έρευνα

Η παρούσα έρευνα αποτελεί το πιλοτικό μέρος μιας ευρύτερης έρευνας σχεδιασμού (design-based research) (Barab & Squire, 2004). Πραγματοποιήθηκε σε ένα ΕΠΑΛ της Αθήνας ως δραστηριότητα σχεδιαστικής σκέψης (Design Thinking Project). Η διάρκειά της ήταν 5 δίωρες παρεμβάσεις. Συμμετείχαν 20 παιδιά ηλικίας 16-17 χρονών (Β' Λυκείου) που πρώτη φορά έρχονταν σε επαφή με το MaLT2. Είχαν γνώση προγραμματισμού σε Python και ένα βασικό επίπεδο Άλγεβρας, Γεωμετρίας και Τριγωνομετρίας. Εργάστηκαν σε ομάδες των 2-3 ατόμων, στο εργαστήριο Η/Υ, με έναν υπολογιστή ανά ομάδα, εναλλάσσοντας ρόλους στο χειρισμό του ποντικιού και του πληκτρολογίου. Το έργο σχεδιαστικής σκέψης το οποίο υλοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της έρευνας είχε ως αντικείμενο το σχεδιασμό μοντέλων που, όταν εκτυπώνονταν, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως λύσεις αποθήκευσης και οργάνωσης αντικειμένων (όπως καλώδια, κλειδιά, ακουστικά) και προσωποποιημένων ειδών καθημερινής χρήσης (όπως θήκες ποτηριών - cup holders). Αφού εξοικειώθηκαν με το MaLT2, τα παιδιά ήρθαν σε επαφή με κάποιους κώδικες που είχαν σχεδιαστεί εκ των προτέρων - κάποια δισδιάστατα μοντέλα, τα οποία θα μπορούσαν να εξερευνήσουν και να επεξεργαστούν- ή ακόμα και να τα χρησιμοποιήσουν ως δομικούς λίθους ("building units") για τις κατασκευές τους. Συγκεκριμένα, τους δόθηκαν διαδικασίες που κατασκευάζουν κύκλο και τετράγωνο (Σχήμα 2). Οι ομάδες όρισαν ποιους σκοπούς θέλουν να ικανοποιούν τα μοντέλα τους, διερεύνησαν πρακτικά ζητήματα (διαστάσεις, λειτουργικότητα) και σχεδίασαν τα μοντέλα τους. Μετά την εκτύπωση, ακολούθησε παρουσίαση και ομαδική ανατροφοδότηση, όπου τα παιδιά εξέτασαν τα μοντέλα των άλλων, έκαναν σχόλια και επέστρεψαν στο MaLT2 για αλλαγές ή/και διορθώσεις στα ψηφιακά τους μοντέλα, βάσει νέων ιδεών που γεννήθηκαν κατά την ανατροφοδότηση από τους συμμαθητές τους.



Σχήμα 2. Τα 2D-μοντέλα που δόθηκαν στα παιδιά στην αρχή της παρέμβασης

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Οι πηγές συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα είναι: α) αρχεία καταγραφής οθόνης και ήχου του υπολογιστή της κάθε ομάδας, β) ηχητική καταγραφή των συζητήσεων στα πλαίσια της ομάδας, γ) πρόχειρα σχήματα των παιδιών, δ) τα αρχεία .mlt με τα ψηφιακά δομήματα που προέκυψαν, ε) τα εκτυπωμένα μοντέλα (3D-printed artefacts) και στ) σημειώσεις πεδίου. Τα παραπάνω δεδομένα τριγωνοποιήθηκαν και για την ανάλυση τους χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των κρίσιμων συμβάντων (Angelides, 2001), δηλαδή σημαντικών επεισοδίων κατά τα οποία τα παιδιά αντιμετωπίζουν μία πρόκληση και συνεργάζονται για την εξεύρεση λύσης. "Κρίσιμα", ως προς τα ερευνητικά μας ερωτήματα, λογίστηκαν συμβάντα στα οποία τα εργαλεία (δυναμικός χειρισμός και 3D-εκτύπωση) και τα ενσώματα σχήματα σκέψης των παιδιών διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στα νοήματα που δόμησαν και στις πρακτικές που ακολούθησαν, όταν βρέθηκαν αντιμέτωπα με συγκεκριμένες προκλήσεις κατά την πορεία κατασκευής.

Αποτελέσματα-προκαταρκτικά ευρήματα

Η Ομάδα 1 αποτελούμενη από τους Μαθητές Μ1 και Μ2, είχε ως στόχο να κατασκευάσει ένα σουβέρ/cup holder. Παρακάτω αποτυπώνονται τρία κρίσιμα συμβάντα-ορόσημα της πορείας κατασκευής του μοντέλου τους. Στους αντίστοιχους πίνακες (Πίνακας 1, Πίνακας 2 και Πίνακας 3) παρουσιάζονται διασυνδεδεμένα τα ενσώματα στοιχεία, οι προγραμματιστικές εντολές των παιδιών και στιγμιότυπα από την κατασκευή του εκάστοτε μαθηματικού αντικειμένου - μέρους του ψηφιακού τους μοντέλου.

Κρίσιμο συμβάν 1: Εγγραφή του κύκλου στο τετράγωνο

Η επιθυμία των παιδιών να εγγράψουν τον κύκλο στο τετράγωνο που θα αποτελούσε τη βάση του μοντέλου cupholder τους, δημιουργεί μία ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόκληση. Εγείρει το ζήτημα της εγγραψιμότητας ενός σχήματος σε ένα άλλο και φέρνει στην επιφάνεια τη σχετική θέση των κέντρων των δύο σχημάτων και την σχέση ακτίνας-πλευράς, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα διαλόγου:

Μ1: *Να μπει μέσα ο κύκλος.. να είναι στο κέντρο ακριβώς (ενν. του τετραγώνου) όταν ξεκινάει να φτιάχνει τον κύκλο.*

Μ2: *Ναι, τα δύο κέντρα μαζί.*

Μ1: *Α, μπορούμε να πετύχουμε πρώτα αυτό και μετά να μεγαλώσουμε την ακτίνα μέχρι να φτάσει άκρη-άκρη, να ακουμπήσει στο τετράγωνο.*

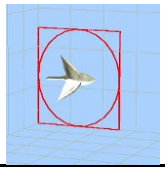
Μ2: *Η ακτίνα να είναι το μισό από την πλευρά, εε;*

Μ1: *Σίγουρα;*

Μ2: *Νομίζω ναι ... αλλά κάτσε να το δοκιμάσουμε!*

Επειδή δεν μπορούσαν να έχουν μέσω δοκιμών το επιθυμητό αποτέλεσμα, τα παιδιά αποφάσισαν να εισάγουν μεταβλητή για την ακτίνα του κύκλου. Ο δυναμικός χειρισμός της τιμής του μήκους της ακτίνας, κουνώντας τον slider, μέχρι να επιτύχουν την εγγραφή, τους βοήθησε να επιβεβαιώσουν την αρχική εικασία του Μ2. Συνέχισαν, ορίζοντας ότι ο κύκλος πρέπει να έχει ακτίνα ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί πως μία άλλη ομάδα ήρθε αντιμέτωπη με την αντίστροφη ακριβώς μαθηματική πρόκληση, δηλαδή την εγγραφή ενός τετραγώνου σε κύκλο. Τα συγκεκριμένα ευρήματα αφορούν πτυχές που αποκλίνουν από τους στόχους του παρόντος συνεδρίου στις Τεχνολογίες της Εκπαίδευσης. Για να διατηρήσουμε την εστίαση στο πλαίσιο και να σεβαστούμε τους περιορισμούς έκτασης, αποφασίσαμε να μην τα αναλύσουμε εδώ. Πιστεύουμε ότι θα ταίριαζαν καλύτερα σε πλαίσιο συνεδρίου διδακτικής των Μαθηματικών. Εντούτοις, είναι διαθέσιμα για συζήτηση κατά την παρουσίαση.

Πίνακας 1. Εγγραφή Κύκλου - Διασύνδεση ενσώματων σχημάτων, κώδικα και μοντέλου

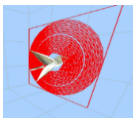
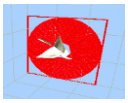
Μαθηματικό Αντικείμενο	Ενσώματα Στοιχεία		Κώδικας	Στιγμιότυπα Κατασκευής του Ψηφιακού Μοντέλου
	Λεκτικές Περιγραφές	**Σωματικές δράσεις**		
Κύκλος εγγεγραμμένος σε τετράγωνο	**Μ1:** Να ***ακουμπάει*** ακριβώς **Μ2:** Να φτάνει να ***αγγίξει*** το τετράγωνο	Χειρονομίες που αποδίδουν την επαφή του κύκλου στην πλευρά του τετραγώνου.	Ταύτιση κέντρων & Εισαγωγή μεταβλητής για την ακτίνα του κύκλου	

Ο **M1** σχεδιάζει
πρόχειρα σε σκίτσο
[Εικόνα 3Α]

Κρίσιμο συμβάν 2: Κάλυψη κυκλικού δίσκου

Τα παιδιά αποφάσισαν να καλύψουν την επιφάνεια της βάσης του σουβέρ με ομόκεντρους κύκλους ολοένα μειούμενης ακτίνας. Σε επίπεδο κώδικα, αυτό αποτυπώνεται με μία σειρά επαναλήψεων της εντολής για την κατασκευή κύκλων και μείωση της τιμής της ακτίνας κατά 0,5. Η φθίνουσα ακολουθία ακτινών [από 50 έως και 0,5] αποφασίστηκε εκ των υστέρων, αφού παρατήρησαν ότι αν ελάττωναν κατά 1 μονάδα την ακτίνα, έμεναν "κενά" ανάμεσα στους κύκλους που, όπως είπε ο M1 "*θα δημιουργούσαν πρόβλημα στην εκτύπωση, πρέπει να είναι ενιαίο αυτό, το κάτω.., χωρίς κενά*"

Πίνακας 2. Κυκλικός Δίσκος - Διασύνδεση ενσώματων σχημάτων, κώδικα και μοντέλου

Μαθηματικό Αντικείμενο	Ενσώματα Στοιχεία		Κώδικας	Στιγμιότυπα Κατασκευής του Ψηφιακού Μοντέλου
	Λεκτικές Περιγραφές	**Σωματικές δράσεις**		
Κυκλικός Δίσκος	**M2:** Για να ***σταθεί***-πρέπει να φτιαχτεί ένα ***επίπεδο*** από κάτω.. Να γίνει κάπως να...ας πούμε, μετά από τον κάθε κύκλο να φτιάξουμε άλλον, λίγο πιο μικρό, πιο μικρό, πιο μικρό.. και συνεχόμενα να μικραίνουν οι κύκλοι πολύ λίγο **M1:** Πολύ λίγο όμως! Να μην έχει κενά - να είναι κολλημένοι..	Με τα χέρια ο **M2** δείχνει ομόκεντρους κύκλους που όλο και μικραίνουν	Κύκλος2 50 Κύκλος2 25 Κύκλος2 24.5 Κύκλος2 24 Κύκλος2 23.5 Κύκλος2 23 Κύκλος2 22.5 Κύκλος2 22	 

Κρίσιμο συμβάν 3: "Ανάδυση" του κυλίνδρου από τον κύκλο

Παρατηρούμε τα παιδιά να συλλαμβάνουν την κατασκευή του κυλίνδρου ως την καθ' ύψος ανάπτυξη μέσω επανάληψης ίσων κύκλων. Καθόλη τη διάρκεια της προσπάθειας τους να δημιουργήσουν τον κύλινδρο, τα παιδιά χειρονομούσαν έντονα και χρησιμοποιούσαν λέξεις όπως "*ψηλώνει*", "*ανεβαίνει*", "*βγαίνει*", που αντανακλούν στο λόγο τους την ανάδυση του τρισδιάστατου αντικειμένου από το δισδιάστο γεννήτορά του, τον κύκλο. Στη συνέχεια, η προοπτική της τρισδιάστατης εκτύπωσης, έκανε τα παιδιά να ασχοληθούν με πιο πρακτικά ζητήματα, όπως το τελικό ύψος του κυλίνδρου και την κατασκευή διαγωνίων στη βάση-σουβέρ για καλύτερη στήριξη της συνολικής κατασκευής, όπως φαίνεται παρακάτω:

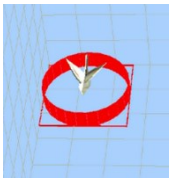
M2: *Άμα όμως είναι έτσι (δείχνει με το ποντίκι την επιφάνεια-βάση του τετραγώνου)..έτσι σκέτο, θα σπάσει.. αυτό να το γεμίσουμε λέω…*

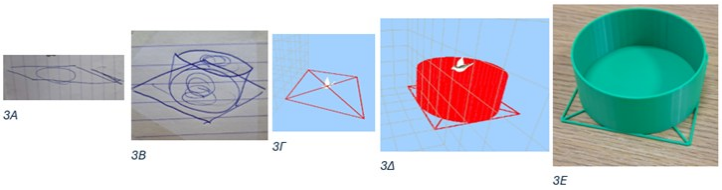
M1: *Να βάλουμε ας πούμε κάτι να κρατάει λίγο; Ναι, μη χαλάσει όταν εκτυπωθεί και το βγάλουμε.*

M2: *Ναι, μη το γεμίσουμε όλο.. (σκέφτεται) τι να κάνουμε;*

M1: *Μμμ.. Α! Αν βάλουμε αυτά (χειρονομεί κοντά στην οθόνη)..αχ πώς τα λένε.. (σχεδιάζει στο πρόχειρο σκίτσο τις διαγώνιες του τετραγώνου).*

Πίνακας 3. Κύλινδρος - Διασύνδεση ενσώματων σχημάτων, κώδικα και μοντέλου

Μαθηματικό Αντικείμενο	Ενσώματα Στοιχεία		Κώδικας	Στιγμιότυπα Κατασκευής του Ψηφιακού Μοντέλου
	Λεκτικές Περιγραφές	**Σωματικές δράσεις**		
	Μ1: Όπως είναι εδώ, η επιφάνεια του σουβέρ ας πούμε, πάνω στο τραπέζι, να ***βγαίνει*** έτσι πάνω... σαν θήκη για το ποτήρι.. δεν μπορώ καν να το περιγράψω..	Τα χέρια ενώνονται σαν κύκλος και ανεβαίνουν κατακόρυφα, αποδίδοντας έναν κύλινδρο		
Κύλινδρος	**Μ1:** Να γίνει έτσι.. να ***ψηλώσει***.. να είναι ο ένας κύκλος ίσα-ίσα πάνω από τον άλλον, για να ψηλώσει τελικά αυτό.. **Μ2:** Να ***ξεκολλήσει*** από το επίπεδο, από το τραπέζι, εννοείς..,ε?? **Μ1:** ναι ναι, κάπως να ***ανέβει***	Από το επίπεδο του θρανίου, το χέρι του **Μ1** κινείται παράλληλα και προς τα πάνω, σαν να "κόβει" σε πολλά επίπεδα τον αέρα, σε στρώσεις. Ο **Μ1** σχεδιάζει πρόχειρα σε σκίτσο [Εικόνα 3Β] - όπως φαίνεται, το σκέφτεται σαν σπείρα που "ανεβαίνει" στο αόρατο εσωτερικό του κυλίνδρου	ΓΙΑ κύλινδρο επανάλαβε 20[σπ πάνω 90 μ 0.5 κάτω 90 σκ Κύκλος2 25] ΤΕΛΟΣ	



Σχήμα 3. Σκίτσα (3Α, 3Β), Ψηφιακά μοντέλα (3Γ, 3Δ) και 3D printed μοντέλο (3Ε)

Συζήτηση

Τα πρώτα ευρήματα της παρούσας πιλοτικής μας έρευνας καταδεικνύουν ότι τα μοντέλα λειτούργησαν για τα παιδιά ως "*μαθηματικά όργανα*" (Nemirovsky et al., 2020), συνθέτοντας τρεις διαστάσεις: α) υλικότητα (φυσικά υλικά), β) ενσώματες πρακτικές [σωματικές πρακτικές (κίνηση, χειρονομίες) και λεκτικές περιγραφές (εκφράσεις)] και γ) σημειολογικές εκφράσεις (μαθηματικός φορμαλισμός κατά την συγγραφή κώδικα). Απαντώντας στο δεύτερο μας

ερευνητικό ερώτημα, σημειώνουμε πως η πορεία από το δισδιάστατο σχήμα στο τρισδιάστατο σώμα σηματοδοτήθηκε από τη συνέργεια των τριών διαστάσεων αυτών και τη δυναμική τους αλληλεπίδραση καθ' όλη τη διάρκεια της κατασκευής μέσω υλικο-σωματικών πρακτικών. Υπήρχε συνεχής, αμφίδρομη και δυναμική αλληλεπίδραση ανάμεσα στα ενσώματα στοιχεία (χειρονομίες, φράσεις, σκίτσα) που παρατηρήθηκαν, τις προγραμματιστικές εντολές και την ανατροφοδότηση που έπαιρναν τα παιδιά από το εργαλείο κατά την εκτέλεσή τους. Για παράδειγμα, κατά την κατασκευή του κυλίνδρου ως ένα τρισδιάστατο αντικείμενο που "αναδύεται" από το δισδιάστο γεννήτορά του, τα παιδιά χειρονομούσαν έντονα και συζητούσαν χρησιμοποιώντας ρήματα που δηλώνουν σωματική δράση ("*ψηλώνει*", "*ανεβαίνει*", "*βγαίνει*"), ταυτόχρονα πραγματοποιούσαν σκίτσα και επέστρεφαν στον κώδικα, για να τον επεξεργαστούν ώστε να υλοποιεί το μαθηματικό αντικείμενο που είχαν φανταστεί και που προσπαθούσαν με χειρονομίες να επικοινωνήσουν μεταξύ τους ή/και με την ερευνητική ομάδα. Οι χειρονομίες (π.χ. για να αποδοθούν οι ομόκεντροι κύκλοι μειούμενης ακτίνας για την κάλυψη του κυκλικού δίσκου) και οι γλωσσικές εκφράσεις ("*ακουμπάει*", "*αγγίζει*" για την εγγραφή κύκλου σε τετράγωνο) αποκάλυψαν πώς η σωματική δράση και η μαθηματική πρακτική συν-διαμορφώνονται. Τα αποτελέσματά μας λοιπόν, όχι μόνο επιβεβαιώνουν ότι ο συντονισμός των υλικο-σωματικών πρακτικών διαμορφώνει αποφασιστικά τη μαθηματική πρακτική, όπως υπογραμμίζεται από έρευνες σε ψηφιακά περιβάλλοντα (Drijvers, 2019· Pittalis & Drijvers, 2023· Shvarts et al., 2021) και μελέτες σε τεχνολογίες κατασκευής (Ng & Tsang, 2021· Ng & Ye, 2022), μα θέτουν υπό συζήτηση και την αντίστροφη πορεία, επίσης. Ως προς το πρώτο μας ερευνητικό ερώτημα, σημειώνουμε ότι τα ψηφιακά εργαλεία τρισδιάστατης σχεδίασης και εκτύπωσης που εντάξαμε στην μελέτη λειτούργησαν ως γέφυρες μεταξύ αφηρημένων εννοιών (π.χ. γεωμετρικές ιδιότητες) και ενσώματης γνώσης, με τους μαθητές να αναπτύσσουν προσαρμοστικά ενσώματα σχήματα μέσω πειραματισμού. Ιδιαίτερα ο δυναμικός χειρισμός των ψηφιακών μοντέλων διαδραμάτισε κρίσιμο ρόλο στο να "αποκαλυφθούν" κρυφές γεωμετρικές εξαρτήσεις, ενίσχυσε τη μαθηματική νοηματοδότηση και εμπλούτισε την πορεία της κατασκευαστικής δραστηριότητας (βλ. χειρονομίες που απέδιδαν ή, αντίστροφα, ενέπνεαν μετασχηματισμούς επί της οθόνης) και επηρέασε τις επακόλουθες βελτιώσεις του κώδικα και τις υπολογιστικές αποφάσεις. Η συνεισφορά της τεχνολογίας της τρισδιάστατης εκτύπωσης ήταν σημαντική, αλλά ομολογουμένως περιορισμένη στο φαντασιακό επίπεδο: παρείχε στα παιδιά την προοπτική της υλοποίησης και τη δυνατότητα της φυσικής υποστασιοποίησης των μοντέλων τους, μα δεν στάθηκε επικυρωτική των μαθηματικών ή/και των υπολογιστικών αποφάσεων τους. Ενώ ο Blikstein (2013) προειδοποιεί ότι η ψηφιακή κατασκευή μπορεί να οδηγήσει σε 'σύνδρομο του μπρελόκ' (keychain syndrome), όπου οι μαθητές παράγουν φυσικά αντικείμενα με ελάχιστη γνωστική προσπάθεια, στην παρούσα έρευνα παρατηρήθηκε το αντίθετο φαινόμενο: οι μαθητές έλαβαν υπολογιστικές και σχεδιαστικές αποφάσεις (πχ την εισαγωγή μεταβλητής για την ακτίνα του κύκλου ώστε να επιτύχουν την εγγραφή του μέσα στο τετράγωνο), αντιμετώπισαν κατασκευαστικές προκλήσεις και εμβάθυναν στη μαθηματική τους κατανόηση μέσω της διαδικασίας κατασκευής του μοντέλου προς εκτύπωση. Αυτό το εύρημα υπογραμμίζει ότι, υπό κατάλληλες παιδαγωγικές συνθήκες, η τρισδιάστατη εκτύπωση και ο προγραμματισμός μπορούν να αποφύγουν τον "εύκολο δρόμο" και να μετατραπούν σε εργαλεία ποιοτικής μαθηματικής διερεύνησης.

Περιορισμοί και επεκτάσεις

Το δείγμα χαρακτηρίζεται από σχετική ομοιογένεια (όλοι οι συμμετέχοντες ήταν αγόρια της ίδιας τάξης ΕΠΑΛ). Επιπλέον, οι ενδείξεις αυτής της πρώτης, πιλοτικής φάσης της έρευνας που αναλύθηκαν παραπάνω, αν και πολύτιμες είναι μάλλον προκαταρκτικές καθώς

προήλθαν από την εργασία μίας μόνο ομάδας παιδιών. Αναγνωρίζουμε ότι αυτοί οι παράγοντες επηρεάζουν την γενικευσιμότητα των ευρημάτων σε άλλα εκπαιδευτικά πλαίσια ή πληθυσμούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δεδομένα που αναφέρθηκαν μετά το πρώτο κρίσιμο συμβάν (αφορούσαν την εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο και δεν αναλύθηκαν περαιτέρω) θα τροφοδοτήσουν μελλοντικές δημοσιεύσεις. Η Εγγραψιμότητα αναδείχθηκε ως μία γεωμετρική πρόκληση που φαίνεται να διανοίγει ένα πεδίο πλούσιο σε ευκαιρίες δημιουργίας διασυνδεδεμένων νοημάτων και αναπαραστάσεων κατά έναν τρόπο ολιστικό και δυναμικό. Η δυνατότητα εγγραφής ενός γεωμετρικού σχήματος ή ενός στερεού σε ένα άλλο σχήμα ή στερεό, στα πλαίσια ενός πλούσιου τεχνολογικού περιβάλλοντος, θα μπορούσε να καταστεί σημαντική αφορμή για να έλθουν στην επιφάνεια πλήθος διασυνδεδεμένων νοημάτων. Περεταίρω έρευνα θα μπορούσε να ενισχύσει τα ευρήματα, καλύπτοντας το εντοπισμένο κενό της βιβλιογραφίας σε μελέτες που συνδυάζουν τρισδιάστατη εκτύπωση, προγραμματισμό και Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ευχαριστίες

Τμήμα της έρευνας χρηματοδοτήθηκε από το πρόγραμμα HORIZON-WIDERA της REA, Έργο: "TransEET" (Project No. 101078875). Το παρόν άρθρο εκφράζει αποκλειστικά τις απόψεις των συγγραφέων και η Ε.Ε. δεν φέρει ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση γίνει σε πληροφορίες που περιλαμβάνονται σε αυτό.

Αναφορές

Abrahamson, D., & Bakker, A. (2016). Making sense of movement in embodied design for mathematics learning. *Cognitive Research, 1,* 33. https://doi.org/10.1186/s41235-016-0034-3

Alberto, R., Bakker, A., Walker-van Aalst, O., Boon, P., & Drijvers, P. (2019). Networking theories in design research: An embodied instrumentation case study in trigonometry. *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* ERME. Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2011). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences, 21*(2), 247-286. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446

Angelides, P. (2001). The development of an efficient technique for collecting and analyzing qualitative data: The analysis of critical incidents. *International Journal of Qualitative Studies in Education, 14*(3), 429-442. https://doi.org/10.1080/09518390110029058

Arzarello, F., Olivero, F., & Paola, D. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34,* 66-72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15,* 225-253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1

Blikstein, P. (2013). Digital fabrication and "making" in education: The democratization of invention. In J. Walter-Herrmann, & C. Büching (Eds.), *FabLabs: Of machines, makers and inventors* (pp. 203-222). Transcript Publishers.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68. https://www.jstor.org/stable/3482238

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139600378

diSessa, A. (1991). Epistemological micromodels: The case of coordination and quantities. In J. Montenegro, & A. Tryphon (Eds.), *Psychologie génétique et sciences cognitives* (pp. 169-194). Presses Universitaires de France.

Drijvers, P. (2019). Embodied instrumentation: Combining different views on using digital technology in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 8-28). Freudenthal Group & Freudenthal Institute.

Edwards, L. D., Ferrara, F., & Moore-Russo, D. (Eds.). (2014). *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics.* Information Age Publishing.

Freudenthal, H. (1972). *Mathematics as an educational task.* Reidel.

Grizioti M., & Kynigos, C. (2021). Code the mime: A 3D programmable charades game for computational thinking in MaLT2. *British Journal of Educational Technology, 52,* 1004-1023. https://doi.org/10.1111/bjet.13085

Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6,* 235-256. https://doi.org/10.1023/A:1013305627916

Kynigos, C. & Grizioti, M. (2018). Programming approaches to Computational Thinking: Integrating turtle geometry, dynamic manipulation and 3D space. *Informatics in Education, 17*(2), 321-340. https://doi.org/10.15388/infedu.2018.17

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415. https://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.44.2.0372

Nemirovsky, R., Ferrara, F., & Ferrari, G. (2020). Body motion, early algebra, and the colours of abstraction. *Educational Studies in Mathematics, 104,* 261-283. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09955-2

Ng, O., & Chan, T. (2019). Learning as making: Using 3D computer-aided design to enhance the learning of shapes and space in STEM-integrated ways. *British Journal of Educational Technology, 50*(1), 294-308. https://doi.org/10.1111/bjet.12643

Ng, O., & Ferrara, F. (2020). Towards a materialist vision of 'learning as making': The case of 3D Printing Pens in school mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18,* 925-944. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10000-9

Ng, O., & Tsang, W. (2021). Constructionist learning in school mathematics: Implications for education in the fourth industrial revolution. *ECNU Review of Education, 6*(3), 1-19. https://doi.org/10.1177/2096531120978414

Ng, O., & Ye, H. (2022). Mathematics learning as embodied making: Primary students' investigation of 3D geometry with handheld 3D printing technology. *Asia Pacific Education Review, 23,* 311-323. https://doi.org/10.1007/s12564-022-09755-8

Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas.* Harvester Press.

Pittalis, M., & Drijvers, P. (2023). Embodied instrumentation in a dynamic geometry environment: Eleven-year-old students' dragging schemes. *Educational Studies in Mathematics, 113*(2), 1-21. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10222-3

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 111-126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Roth, W. M. (2016). Growing-making mathematics: A dynamic perspective on people, materials, and movement in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 93,* 87-103. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9695-6

Roth, W. M., & Maheux, J. F. (2015). The stakes of movement: A dynamic approach to mathematical thinking. *Curriculum Inquiry, 45*(3), 266-284. https://doi.org/10.1080/03626784.2015.1031629

Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2021). Embodied instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system. *Educational Studies in Mathematics, 107*(3), 447-469. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10053-0

Κυνηγός, Χ. (2011). *Το μάθημα της διερεύνησης, παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών (από την έρευνα στη σχολική τάξη).* Εκδόσεις Τόπος.