ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2025)

14ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Από τις Ιδέες στα Αντικείμενα: Μαθηματικά, Υπολογιστική Σκέψη και Τρισδιάστατη Εκτύπωση

Κάτια Σχίζα, Μαριάνθη Γριζιώτη

doi: 10.12681/cetpe.9368

Βιβλιογραφική αναφορά:

Σχίζα Κ., & Γριζιώτη Μ. (2026). Από τις Ιδέες στα Αντικείμενα: Μαθηματικά, Υπολογιστική Σκέψη και Τρισδιάστατη Εκτύπωση. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 1047–1056. https://doi.org/10.12681/cetpe.9368

https://epublishing.ekt.gr | **e-Εκδότης:** ΕΚΤ | **Πρόσβαση:** 25/02/2026 03:50:42

Από τις Ιδέες στα Αντικείμενα: Μαθηματικά, Υπολογιστική Σκέψη και Τρισδιάστατη Εκτύπωση

Κάτια Σχίζα, Μαριάνθη Γριζιώτη
katiaschiza@eds.uoa.gr, mgriziot@eds.uoa.gr
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Η τρισδιάστατη (3D) εκτύπωση αποτελεί ένα ελκυστικό μέσο εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία. Ωστόσο, εξακολουθεί να τίθεται το ερώτημα για το κατά πόσο αυτή η τεχνολογία μπορεί να υποστηρίξει ουσιαστικά την ανάπτυξη δεξιοτήτων, όπως η Υπολογιστική Σκέψη (Computational Thinking-CT), καθώς και να διευκολύνει την κατανόηση σύνθετων μαθηματικών εννοιών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια μελέτη με μαθητές Λυκείου, οι οποίοι αξιοποίησαν ένα ψηφιακό εργαλείο που τους έδωσε τη δυνατότητα να σχεδιάζουν και να χειρίζονται δυναμικά τις ιδιότητες των 3D εκτυπώσιμων μοντέλων με τη χρήση προγραμματισμού, εστιάζοντας στο εννοιολογικό πεδίο της καμπυλότητας. Η καμπυλότητα, παρά τις σημαντικές δυνατότητες για δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων πλούσιων σε ευκαιρίες ενίσχυσης της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, συχνά παραμένει υποβαθμισμένη στην εκπαιδευτική πράξη. Τα αποτελέσματα της μελέτης εστιάζουν στη σχεδιαστική διαδικασία του μοντέλου από τους μαθητές, τη συμπεριφορά του και τη χρήση του μετά την εκτύπωση, αναδεικνύοντας νέες εκπαιδευτικές δυνατότητες της 3D εκτύπωσης για τη μαθηματική και υπολογιστική σκέψη των μαθητών όταν αυτή συνδυάζεται με τον σχεδιασμό μέσω προγραμματισμού.

Λέξεις κλειδιά: καμπυλότητα, προγραμματισμός, τρισδιάστατα μοντέλα, τρισδιάστατη εκτύπωση, Υπολογιστική Σκέψη

Εισαγωγή

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας στη σύγχρονη κοινωνία εντείνει τις ανησυχίες στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης σχετικά τόσο με το ποια μαθηματικά και ποιες δεξιότητες των μαθητών είναι ουσιώδεις για τη σημερινή εποχή, όσο και με το πώς οι νέες αναδυόμενες τεχνολογίες αξιοποιούνται για να διερευνηθούν τέτοιου είδους ερωτήματα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αφορά το πεδίο της τρισδιάστατης γεωμετρίας και του χώρου (Gravemeijer et al., 2017), σε συνδυασμό με την αναδυόμενη τεχνολογία της τρισδιάστατης εκτύπωσης, η οποία εισέρχεται ραγδαία στον χώρο της εκπαίδευσης και μας καλεί να επανεξετάσουμε τις παιδαγωγικές μας πρακτικές ενόψει αυτής της τρισδιάστατης επανάστασης (Ng et al., 2018). Η κατασκευή και εκτύπωση ψηφιακών 3D μοντέλων θεωρείται ότι μπορεί να ενισχύσει τη μαθησιακή διαδικασία, εμπλέκοντας τους μαθητές σε αυθεντικά προβλήματα, δίνοντάς τους ευκαιρίες να καλλιεργήσουν τη φαντασία και τη δημιουργικότητά τους και ανοίγοντας έναν δρόμο για την ανάπτυξη ποικίλων δεξιοτήτων μέσα από τη δημιουργία πρωτοτύπων, όπως η δοκιμή και ο ανασχεδιασμός, η σχεδιαστική σκέψη και η χωρική σκέψη (Coşkun & Deniz, 2022· Dickson et al., 2021). Ωστόσο, οι έρευνες που μελετούν αποκλειστικά τη δυναμική της τρισδιάστατης εκτύπωσης στην εκπαίδευση των μαθηματικών είναι περιορισμένες και εστιάζουν κυρίως σε έννοιες όπως ο όγκος και το εμβαδόν, ή σε ιδιότητες πρισμάτων και άλλων στερεών σωμάτων. Οι περισσότερες, μάλιστα, επικεντρώνονται σε άλλα πεδία της εκπαίδευσης STEM/STEAM ή χρησιμοποιούν έτοιμα 3D μοντέλα, στερώντας από τους μαθητές τη δυνατότητα αυθεντικής εμπλοκής με μαθηματικές έννοιες τόσο της Ευκλείδειας όσο και της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας (Ng et al., 2022), όπως οι καμπύλες. Αν και η καμπυλότητα αποτελεί θεμελιώδη έννοια στα μαθηματικά και σε πλήθος

εφαρμοσμένων επιστημών, δεν έχει βρει ακόμα τη θέση της στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα, ώστε οι μαθητές να διερευνήσουν τις καμπύλες ως γεωμετρικά σχήματα που δημιουργούνται μέσα από συσχετιζόμενες μεταβολές. Για τον λόγο αυτό, στο παρόν άρθρο διερευνούμε τη δυναμική του συνδυασμού του τρισδιάστατου σχεδιασμού και της αναδυόμενης τεχνολογίας της 3D εκτύπωσης, αξιοποιώντας το προγραμματιστικό εργαλείο MaLT2, προκειμένου να υποστηρίξουμε τη μαθηματική και υπολογιστική σκέψη των μαθητών μέσα από την εξερεύνηση καμπυλόγραμμων αντικειμένων.

Θεωρητικό πλαίσιο

Διερεύνηση της καμπυλότητας μέσα από τον προγραμματισμό

Οι συγγραφείς υιοθετούν μια κονστραξιονιστική (constructionist) προσέγγιση τόσο στη σχεδίαση των δραστηριοτήτων όσο και στην ερμηνεία της μαθησιακής διαδικασίας. Στόχος είναι οι μαθητές να εμπλακούν ενεργά με τη γεωμετρική φύση της καμπύλης, διαμορφώνοντας προσωπικό νόημα πειραματιζόμενοι με ψηφιακά μοντέλα και συζητώντας τις μαθηματικές τους ιδέες σε σχέση με αυτά τα μοντέλα και τη συμπεριφορά τους (Kynigos, 2015· Papert, 1980). Η γνώση θεωρείται ως ενεργή κατασκευή από τον ίδιο τον μαθητή, μέσω της εξερεύνησης και της συμβολικής έκφρασης που επιτρέπει το προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2. Οι συγγραφείς εξετάζουν μια αναδόμηση της έννοιας της καμπύλης (Wilensky & Papert, 2010), βασισμένη στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή, χωρίς να παραγκωνίζεται η ίδια η έννοια της καμπυλότητας, όπως συνήθως γίνεται στη σχολική εκπαίδευση. Στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα, οι μαθητές μαθαίνουν για τον κύκλο, τα τόξα και τις διάφορες κωνικές τομές, χωρίς όμως να τους δίνεται η ευκαιρία να ανακαλύψουν και να διερευνήσουν τις καμπύλες ως γεωμετρικά σχήματα με αυθόρμητο τρόπο.

Στο MaLT2, η μαθηματική προσέγγιση για τα τρισδιάστατα σχήματα αντλεί στοιχεία από τη διαφορική γεωμετρία, όπου η καμπυλότητα περιγράφεται ως εγγενής ιδιότητα των καμπυλών και των επιφανειών. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα βασίζεται στη "Γεωμετρία της Χελώνας" (Papert, 1980), η οποία αποτελεί μια μορφή διαφορικής γεωμετρίας βασισμένη σε κινήσεις, όπου οι βασικές ιδέες σχετίζονται με εγγενείς ιδιότητες, τοπικότητα και έκφραση μαθηματικών εννοιών μέσα από κατασκευαστικές διαδικασίες αντί για αλγεβρικές εξισώσεις (Abelson & diSessa, 1981). Με αυτόν τον τρόπο, έννοιες όπως η καμπυλότητα (που συνήθως εμφανίζονται σε ανώτερα μαθήματα) μπορούν να γίνουν πιο προσιτές μέσα από διαισθητικές αναπαραστάσεις αντί για αυστηρά αξιωματικά πλαίσια. Η εξερεύνηση και ο πειραματισμός με τρισδιάστατα ψηφιακά αντικείμενα μέσω δυναμικής μεταβολής των τιμών των μεταβλητών στο περιβάλλον προγραμματισμού MaLT2 αποσκοπεί στο να προσφέρει στους μαθητές μια τοπική και εγγενή προσέγγιση της καμπυλότητας στον χώρο.

Παράλληλα, η μελέτη της μαθητικής δραστηριότητας γίνεται υπό ένα ευρύ πρίσμα, αναζητώντας πώς οι μαθηματικές ιδέες των μαθητών χρησιμοποιούνται στη σχεδίαση και στην κατασκευή τρισδιάστατων καμπυλόγραμμων αντικειμένων, με την έννοια της καμπυλότητας να προσεγγίζεται ως εννοιολογικό πεδίο (Vergnaud, 1983) και όχι ως απομονωμένη έννοια. Για παράδειγμα, η προσπάθεια σχεδίασης ενός τριγώνου πάνω σε κυλινδρική επιφάνεια ενεργοποιεί ποικίλες έννοιες, όπως η στρέψη, ο ρυθμός μεταβολής και η καμπυλότητα — όχι μόνο ως χαρακτηριστικό των καμπυλωμένων σωμάτων, αλλά και σε αντιπαραβολή με ευθύγραμμα ή επίπεδα αντικείμενα (Stevenson, 1995). Όλες αυτές οι έννοιες ανήκουν στο ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο της καμπυλότητας στον χώρο. Προηγούμενες έρευνες οι οποίες έχουν μελετήσει την καμπυλότητα μέσω του προγραμματισμού με κατασκευή τόξων σε δισδιάστατα (Kynigos & Psycharis, 2003) και ελικοειδή σχήματα (Kynigos & Zantzos, 2017) συμπέραναν ότι αυτή η προσέγγιση ενισχύει τη νοηματοδότηση

των μαθητών γύρω από το εννοιολογικό πεδίο της καμπυλότητας, ενώ παράλληλα ανέδειξαν και δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της τοπικής συμπεριφοράς της καμπύλης (Montoya Delgadillo, 2018).

Τρισδιάστατη εκτύπωση και μαθησιακή διαδικασία

Η τρισδιάστατη εκτύπωση θεωρείται μια από τις αναδυόμενες τεχνολογίες για την εκπαίδευση του 21ου αιώνα (Huang & Wang, 2022). Ωστόσο παρά τις σημαντικές τεχνολογικές εξελίξεις των τρισδιάστατων εκτυπωτών, οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί εξακολουθούν να αναζητούν ουσιαστικούς και καινοτόμους τρόπους εισαγωγής της τρισδιάστατης εκτύπωσης στη διδασκαλία και τη μάθηση. Πρόσφατες μελέτες παρέχουν κάποιες πρώτες ενδείξεις ότι η τρισδιάστατη εκτύπωση μπορεί να ενισχύσει τα κίνητρα, τις γνώσεις και την ανάπτυξη δεξιοτήτων των μαθητών. Ο συνδυασμός ψηφιακού και φυσικού μοντέλου ενισχύει την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές και προωθεί δεξιότητες όπως η χωρική σκέψη, η δημιουργικότητα, η επίλυση προβλημάτων και ο τεχνολογικός γραμματισμός (Lin et al., 2023· Leinonen, 2020). Μέσω της άμεσης παραγωγής απτών αντικειμένων, η τρισδιάστατη εκτύπωση μπορεί να ζωντανέψει αφηρημένες έννοιες και να διευρύνει την ικανότητα του χρήστη για δημιουργική σκέψη και φαντασία (Lewis, 2019). Παράλληλα, όμως, οι ερευνητές τονίζουν την ανάγκη για περαιτέρω εμπειρική έρευνα και θεωρητικά πλαίσια για την ανάδειξη της προστιθέμενης παιδαγωγικής αξίας των δυνατοτήτων που προσφέρει. Ένα σημαντικό κενό αφορά την έλλειψη δραστηριοτήτων σχεδιασμού και κατασκευής του μοντέλου από τους μαθητές πριν αυτό εκτυπωθεί. Στις περισσότερες υπάρχουσες μελέτες με μαθητές πρωτοβάθμιας ή δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οι εκπαιδευτικοί είτε παρέχουν στα παιδιά έτοιμα μοντέλα (Leinonen, 2020), είτε τους δίνουν συγκεκριμένες οδηγίες για το πώς να τα κατασκευάσουν (Huang & Wang, 2022· Lin et al., 2023), περιορίζοντας τη δημιουργικότητα τους, τη φαντασία τους και την ελεύθερη εμπλοκή τους στο τι θα μπορούσε να τυπωθεί. Αυτό συμβαίνει λόγω της πολυπλοκότητας για τους μικρούς μαθητές να δημιουργήσουν και να χειριστούν ένα περίπλοκο τρισδιάστατο εκτυπώσιμο αντικείμενο με τις υπάρχουσες τεχνολογίες, οι οποίες συνήθως απαιτούν υψηλού επιπέδου μαθηματικές και προγραμματιστικές δεξιότητες (Lin et al., 2023· Nandi et al., 2017).

Στην παρούσα έρευνα επιδιώκουμε να μελετήσουμε και να αναδείξουμε την αξία του σχεδιασμού ενός εκτυπώσιμου αντικειμένου ως προς την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, καθώς και δεξιοτήτων υπολογιστικής σκέψης. Στην προσέγγιση που εφαρμόζεται οι μαθητές ξεκινούν από το σχεδιασμό του μοντέλου και καταλήγουν στο απτό αντικείμενο. Προτείνουμε, δηλαδή, τη συνδυαστική χρήση αυτών των δύο προσεγγίσεων στη μάθηση (ψηφιακό σχεδιασμό και εκτύπωση/ανάλυση φυσικού αντικειμένου), ως μέσα οικοδόμησης και απόδοσης νοήματος στις μαθηματικές έννοιες. Με άλλα λόγια, ένα αξιωματικό σύστημα δεν είναι επαρκές από μόνο του για να πείσει τον μαθητή για την ύπαρξη μιας μαθηματικής έννοιας. Όταν μια έννοια είναι υπερβολικά αφηρημένη ή δεν έχει συνδεθεί με την εμπειρία του μαθητή, τότε μπορεί να γίνει κατανοητή μέσω της σχέσης της με άλλες έννοιες, όπως χωρικές σχέσεις ή φυσικά αντικείμενα, μέσα από έναν επαναληπτικό κύκλο φαντασίας-πρόβλεψης (προγραμματισμός), όρασης (οπτική αναπαράσταση) και αφής (εκτύπωση 3D αντικειμένου). Η παρούσα έρευνα επιχειρεί να απαντήσει το ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα: "*Αν και πώς η κατασκευή μοντέλων μέσω τρισδιάστατου (3D) σχεδιασμού και τρισδιάστατης (3D) εκτύπωσης στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2 μπορεί να ενισχύσει τη μαθηματική και υπολογιστική σκέψη των μαθητών;*"

Δραστηριότητα και ψηφιακό εργαλείο

Το MaLT2 (http://etl.ppp.uoa.gr/malt2) είναι ένα ψηφιακό εργαλείο συμβολικής έκφρασης για μαθηματικές δραστηριότητες μέσω γραπτού προγραμματισμού, με σκοπό τη δημιουργία και εξερεύνηση δυναμικών τρισδιάστατων γραφικών μοντέλων (Kynigos & Grizioti, 2018) που παρέχει τις εξής αλληλοσχετιζόμενες αναπαραστάσεις: i. συμβολική (κώδικας), ii. γραφική (αναπαράσταση στη σκηνή), και iii. δυναμικό χειρισμό γενικευμένων μοντέλων με τη μορφή εκτελούμενων παραμετρικών διαδικασιών (ενεργοποίηση ολισθητή για κάθε μεταβλητή της διαδικασίας) (Σχήμα 1α). Πρόσφατα, το MaLT2 έχει επεκταθεί με προσθήκη της λειτουργικότητας της τρισδιάστατης εκτύπωσης (https://extendt2.com/widgets/malt/), επιτρέποντας στους μαθητές να συνδέσουν τα ψηφιακά μοντέλα με τον φυσικό κόσμο και να προωθήσουν την ανάπτυξη διαφορετικών δεξιοτήτων και διαδικασιών κατασκευής νοήματος για σύνθετες έννοιες (Grizioti et al., 2024).

Στην παρούσα εργασία, δόθηκε στους μαθητές ένα δόμημα που αφορούσε την κατασκευή ενός κυλίνδρου μέσω ενός καμπυλωτού τετράπλευρου χωρίς αναφορά στις μαθηματικές ιδιότητες της ακτίνας, του κέντρου ή οποιουδήποτε εξωτερικού πλαισίου αναφοράς. Χρησιμοποιώντας μόνο την εντολή για μετακίνηση προς τα εμπρός, τις εντολές στροφής προς τα δεξιά και προς τα κάτω, την εντολή επανάληψης και δύο μεταβλητές (Σχήμα 1α), η λογική πίσω από τον σχεδιασμό ήταν να δοθεί έμφαση στον τοπικό χαρακτήρα της καμπύλης και στην κατασκευή της ως αποτέλεσμα της περιστροφής της στον χώρο, σε αντίθεση με μια ευθεία γραμμή. Οι μαθητές προσκλήθηκαν να εξερευνήσουν την τρισδιάστατη καμπύλη που δημιουργείται μέσω της δυναμικής μεταβολής των τιμών των μεταβλητών και να δημιουργήσουν τα δικά τους σχέδια στην επιφάνεια του κυλίνδρου με έναν εγγενή τρόπο. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, η ερευνήτρια ενθάρρυνε τις ομάδες να αποθηκεύουν τα διαφορετικά πρωτότυπα των μοντέλων που ανέπτυσσαν, καθώς οι μαθητές μπορούσαν να εκτυπώσουν οποιοδήποτε πρωτότυπο επιθυμούσαν να δουν σε φυσική μορφή στο τέλος κάθε συνεδρίας. Σκοπός ήταν τόσο οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την ενδιάμεση εκτύπωση ως ανατροφοδότηση πριν από το τελικό τους δόμημα, όσο και οι ερευνητές να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση της χρήσης της τρισδιάστατης εκτύπωσης και της ενδεχόμενης προστιθέμενης αξίας της.

Μέθοδος

Η παρούσα μελέτη περιλάμβανε τη συμμετοχή πέντε μαθητών της Α΄ Λυκείου και τριών μαθητών της Β΄ Λυκείου, οι οποίοι χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες. Συμμετείχαν εθελοντικά στην παρέμβαση στο πλαίσιο μιας Δραστηριότητας Σχεδιαστικής Σκέψης του Μαθηματικού Ομίλου του σχολείου τους, διάρκειας 4 ωρών κατανεμημένων σε 2 συνεδρίες. Οι μαθητές είχαν ήδη κάποια εμπειρία με το εργαλείο MaLT2 και σε κάθε ομάδα δόθηκε ένας φορητός υπολογιστής και ένα τετράδιο. Ο εκπαιδευτικός και η συμμετέχουσα ερευνήτρια (πρώτη συγγραφέας της παρούσας εργασίας) λειτούργησαν ως συντονιστές ενθαρρύνοντας τους μαθητές να μοιράζονται ανοιχτά τις σκέψεις τους με την ομάδα. Με σκοπό μια συνολική εικόνα των ενεργειών των μαθητών κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, η ερευνήτρια συνέλεξε διάφορα είδη δεδομένων, όπως εγγραφές οθόνης υπολογιστή και ήχου, σημειώσεις των μαθητών, κώδικες από το MaLT2 και φωτογραφίες τόσο των μαθητών κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας (όπου και όταν κρίθηκε ενδιαφέρον για την έρευνα) όσο και των εκτυπωμένων αντικειμένων. Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τη μεθοδολογία της θεματικής ανάλυσης, ξεκινώντας από ένα αρχικό σχήμα και αφήνοντας ανοιχτό το ενδεχόμενο εμφάνισης νέων κωδικών. Αφού οι συγγραφείς διασταύρωσαν τα απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα διαλόγου με τα υπόλοιπα δεδομένα, προχώρησαν στην ανάλυση των

δεδομένων βάσει "κρίσιμων επεισοδίων" (Tripp, 1993) σχετικών με τις έννοιες της καμπύλης και της καμπυλότητας, οι οποίες αναδύθηκαν από την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα τρισδιάστατα μοντέλα και ήταν σχετικές με το ερευνητικό ερώτημα της εργασίας. Για να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα, μελετήσαμε περιστατικά όπου οι μαθητές εξέφρασαν αντιλήψεις τους γύρω από έννοιες στενά συνδεδεμένες με την καμπυλότητα ή τις πρακτικές της υπολογιστικής σκέψης (αφαίρεση, αναγνώριση μοτίβων, αποσύνθεση), όπως αυτές προέκυψαν κατά τον σχεδιασμό τους στο MaLT2 και την εκτύπωση των μοντέλων και επιχειρήσαμε να εντοπίσουμε τρόπους με τους οποίους ο τρισδιάστατος σχεδιασμός και η εκτύπωση καμπυλόγραμμων μοντέλων ενίσχυσαν τη μαθηματική σκέψη των μαθητών. Μετά την κωδικοποίηση των διαλόγων, διαμορφώσαμε τα κύρια θεματικά μοτίβα των αποτελεσμάτων γύρω από τις πρακτικές της υπολογιστικής σκέψης όπως προέκυψαν. Καθώς η παρέμβαση αποτέλεσε πιλοτική μελέτη για ένα ευρύτερο ερευνητικό έργο βασισμένο στον σχεδιασμό (Bakker, 2018), τα ευρήματα θα αξιοποιηθούν για τον επόμενο κύκλο της μελέτης και τον επανασχεδιασμό της δραστηριότητας.

Αποτελέσματα

Παρακάτω συζητάμε έναν από τους κωδικούς που προέκυψε κατά την θεματική ανάλυση των δεδομένων και αφορά τη νοηματοδότηση των μαθητών γύρω από την τοπική φύση της καμπύλης και την εφαρμογή και ανάπτυξη της υπολογιστικής σκέψης μέσω της ενσωμάτωσης της 3D εκτύπωσης στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2. Ονομάσαμε αυτή την κατηγορία "phygital", συνδυάζοντας τις λέξεις physical (απτό) και digital (ψηφιακό). Αυτός ο συνδυασμός οδήγησε τους μαθητές σε βαθύτερη εμπλοκή τόσο με τα μαθηματικά όσο και με πρακτικές της υπολογιστικής σκέψης, η οποία δεν θα είχε επιτευχθεί χωρίς τη δυνατότητα της φυσικής εκτύπωσης.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί παρουσιάζεται και αναλύεται μία επιλεγμένη περίπτωση που ανέδειξε με σαφήνεια τη συμβολή της απτικής επαφής με το φυσικό αντικείμενο στην κατανόηση της καμπυλότητας και αφορά την προσπάθεια μιας ομάδας μαθητών να κατασκευάσει την καμπύλη γραμμή που εφάπτεται πάνω στον κύλινδρο, συνδέοντας το κάτω άκρο της κάθετης γραμμής με το άνω άκρο της μεσαίας (Σχήμα 1γ). Η βασική δυσκολία που ανέκυψε ήταν ότι η παραγόμενη καμπύλη έκλεινε προς το εσωτερικό του κυλίνδρου (Σχήμα 1β). Παρά τις επανειλημμένες παρεμβάσεις στον κώδικα και τις μεταβολές των τιμών μέσω των ολισθητών (Σχήμα 1γ), οι μαθητές δεν κατόρθωσαν να επιλύσουν το ζήτημα μέσω του κώδικα και της γραφικής αναπαράστασης και αποφάσισαν να προχωρήσουν στην τρισδιάστατη εκτύπωση του μοντέλου τους. Μέχρι εκείνο το σημείο, η εργασία τους επικεντρωνόταν στο σχεδιασμό της καμπύλης μέσω των εντολών "μπροστά" και "κάτω" εντός επαναληπτικής δομής (repeat), αποσκοπώντας κυρίως στην τροποποίηση της στρέψης της καμπύλης. Ωστόσο, δεν είχαν αντιληφθεί ότι η καμπύλη δεν θα μπορούσε να φτάσει στο επιθυμητό τελικό σημείο μέσα από αυτές τις εντολές. Ενώ η καμπυλότητα δείχνει πόσο απομακρύνεται μια καμπύλη από το να είναι ευθεία, η στρέψη δείχνει πόσο η καμπύλη στρέφεται έξω από το εφαπτόμενο επίπεδο στον τρισδιάστατο χώρο (δηλαδή, πόσο απομακρύνεται από το να είναι επίπεδη). Και οι δύο έννοιες σχετίζονται με την αλλαγή κατεύθυνσης στον χώρο.

Μετά την εκτύπωση του μοντέλου, κρατώντας και παρατηρώντας το εκτυπωμένο αντικείμενο, ο μαθητής Γ σχολίασε: "*Μοιάζει σαν να θέλει να κάνει κύκλο, ενώ εμείς θέλουμε να τεντώνει προς τα πάνω πιο ομαλά.*" Το σχόλιο αυτό καταδεικνύει ότι οι μαθητές προσέγγισαν την έννοια της καμπυλότητας μέσα από μια λειτουργική (procedural) κατανόηση, βασισμένη στις εντολές του προγραμματιστικού περιβάλλοντος. Είχαν εξετάσει το ενδεχόμενο μεταβολής του βαθμού καμπυλότητας στο μοντέλο τους, χωρίς ωστόσο να κατανοούν ότι η συγκεκριμένη

μαθηματική αναπαράσταση θα οδηγούσε πάντοτε σε κυκλικό τόξο με σταθερή καμπυλότητα. Η αδυναμία αυτή ανέδειξε τη δυσκολία μετάβασης σε μία βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της καμπυλότητας, γεγονός που οι μαθητές συζήτησαν και συνειδητοποίησαν μόνο όταν εκτύπωσαν το μοντέλο τους και προχώρησαν σε απασφαλμάτωση του κώδικα που είχαν δημιουργήσει νωρίτερα. Η επόμενη πρόοδος στην εργασία της ομάδας προέκυψε όταν μία μαθήτρια άρχισε να εξετάζει το φυσικό μοντέλο μέσω της αφής.

Μαθήτρια Ε: Η καμπύλη που θέλουμε έχει και την κλίση του κυλίνδρου και μία κλίση προς τα πάνω (δείχνει επανειλημμένα με το δάχτυλο τη διαδρομή της καμπύλης).

Μαθητής Γ: Σωστά. Πώς μπορούμε να κάνουμε ολόκληρη τη γραμμή να ανεβαίνει ώστε να φτάσει το τελικό σημείο;

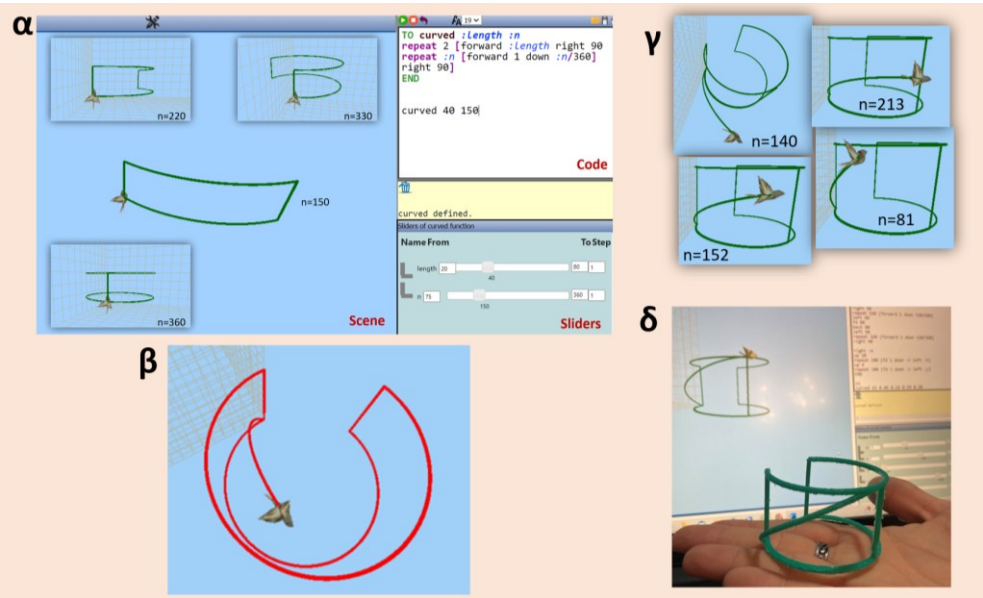
Μαθήτρια Ε: Κι αν… (εξακολουθεί να αγγίζει το εκτυπωμένο μοντέλο και να μετακινεί το δάχτυλό της πάνω στην τροχιά της καμπύλης) Τι σου θυμίζει αυτή η κίνηση;

Μαθητής Δ: Δεν ξέρω. Ένα κύμα; Μια ανηφόρα;

Μαθήτρια Ε: Εμένα μου θυμίζει κουρτίνα. Δεν κάνει η κουρτίνα μια παρόμοια κίνηση προς τα πάνω;

Μαθητής Γ: Ίσως. Αλλά… Η κλίση στην αρχή είναι απότομη και μετά μοιάζει να γίνεται σχεδόν ευθεία.

Μαθήτρια Ε: Σωστά! Τι θα γινόταν αν χωρίζαμε την καμπύλη μας σε δύο καμπύλες; Αν, δηλαδή, αρχικά ανεβάζαμε την καμπύλη μέχρι περίπου εδώ (δείχνει με το χέρι της τη μέση περίπου της διαδρομής-τροχιάς) με μία πιο απότομη κλίση και στη συνέχεια συνεχίζαμε μέχρι το τελικό σημείο με μία πιο ομαλή καμπύλη;



Σχήμα 1. α. Ο κύλινδρος που δόθηκε στους μαθητές μέσα από τις 3 αναπαραστάσεις του MaLT2, β. Το εσφαλμένο μοντέλο μιας ομάδας μαθητών, γ. Ο δυναμικός χειρισμός του μοντέλου μιας ομάδας μέσα από την προσθήκη μεταβλητών στον κώδικα, δ. Το τελικό ψηφιακό μοντέλο και εκτυπωμένο αντικείμενο μιας ομάδας

Η αρχική παρατήρηση του μαθητή Γ σε συνδυασμό με τη μεταγενέστερη συζήτηση οδήγησαν την ομάδα σε συζήτηση και αναστοχασμό γύρω από δύο βασικούς άξονες. Ο πρώτος αφορά την τοπική φύση της καμπυλότητας, καθώς οι μαθητές άρχισαν να επισημαίνουν και να δείχνουν συγκεκριμένα σημεία της διαδρομής, τόσο στο φυσικό όσο και στο ψηφιακό μοντέλο, και να αναλύουν με μεγαλύτερη επίγνωση τη λειτουργία του κώδικα — ιδίως ως προς την εντολή επανάληψης που "οδηγεί" την καμπύλη. Αυτό το γεγονός τους ώθησε να εφαρμόσουν πρακτικές της υπολογιστικής σκέψης, όπως η αναγνώριση μοτίβων μεταξύ των μοντέλων και η αποσύνθεση του κώδικα που σχηματίζει το ψηφιακό τους μοντέλο. Ακόμα, πρόσθεσαν μεταβλητές σε καίρια σημεία του κώδικα, ώστε να μπορούν να δημιουργούν διαφορετικά μεγέθη του μοντέλου τους. Για παράδειγμα, ανέφεραν πως κατασκευάζοντας ένα δυναμικό μοντέλο, το αντικείμενο τους θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για διαφορετικούς σκοπούς και από διαφορετικούς χρήστες (π.χ. μικρό μέγεθος για δαχτυλίδι, μεσαίο μέγεθος για βραχιόλι, μεγάλο μέγεθος για βάση μπουκαλιού) δίνοντας έτσι έναν προσωπικό τόνο δημιουργικότητας στο μοντέλο τους. Ο δεύτερος άξονας σχετίζεται με τη θεώρηση της καμπυλότητας ως ιδιότητα της καμπύλης. Στο πλαίσιο αυτό, οι μαθητές αναγνώρισαν την καμπυλότητα του κύκλου ως σταθερό χαρακτηριστικό και ιδιότητα του μοντέλου τους, και άρχισαν να συσχετίζουν την έννοια της καμπυλότητας με τη γεωμετρική δομή του δικού τους μοντέλου. Το περιστατικό αυτό αναδεικνύει την αξία της συνδυαστικής προσέγγισης ψηφιακού-φυσικού μοντέλου. Η δυνατότητα εναλλαγής μεταξύ της αναπαράστασης στο ψηφιακό περιβάλλον (μέσω προβλέψεων και οπτικοποίησης) και της απτικής διερεύνησης του φυσικού αντικειμένου συνέβαλε ουσιαστικά στην καλλιέργεια της αφαιρετικής σκέψης των μαθητών και στην πορεία προς τη μαθηματικοποίηση της έννοιας της καμπυλότητας. Η πρόταση των μαθητών να κατασκευάσουν μία καμπύλη με μεταβλητή καμπυλότητα ή, όπως το έθεσαν οι ίδιοι, μία καμπύλη ως συνδυασμό δύο επιμέρους καμπυλών με διαφορετική καμπυλότητα, τους οδήγησε στην υιοθέτηση μιας δομικής κατανόησης και χρήσης της έννοιας. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, ήταν η αλληλεπίδραση με το φυσικό αντικείμενο η οποία ενίσχυσε τη σύνδεση με πραγματικά αντικείμενα της καθημερινής ζωής (π.χ. κουρτίνα) και οδήγησε την ομάδα στην απόφαση να "σπάσουν" την καμπύλη τους σε συγκεκριμένο σημείο, οδηγώντας στον επανασχεδιασμό του ψηφιακού μοντέλου και στην τελική κατασκευή του δομήματός τους (Σχήμα 1δ).

Συμπεράσματα-συζήτηση

Η μελέτη που παρουσιάσαμε είχε ως στόχο να διερευνήσει τις ευκαιρίες που προσφέρει η σύνδεση της τρισδιάστατης εκτύπωσης με ένα ψηφιακό εργαλείο σχεδιασμού μοντέλων μέσω του προγραμματισμού. Οι μαθητές ανέδειξαν και χρησιμοποίησαν —είτε κατά την κατασκευή του μοντέλου τους είτε κατά την αιτιολόγηση του συλλογισμού τους— διάφορες έννοιες που εμπίπτουν στο εννοιολογικό πεδίο της καμπυλότητας στον χώρο και εφάρμοσαν ποικίλες πρακτικές της υπολογιστικής σκέψης. Η εναλλαγή ανάμεσα στην προσέγγιση "προβλέπω-βλέπω" του ψηφιακού μοντέλου και στην προσέγγιση "αγγίζω-αντιλαμβάνομαι" του φυσικού αντικειμένου δείχνει πως μπορεί να προσφέρει γόνιμο έδαφος για την καλλιέργεια τόσο της νοηματοδότησης της τοπικής φύσης της καμπυλότητας όσο και της ευκαιρίας να λειτουργήσει ως μεταβατικός μηχανισμός από μία λειτουργική χρήση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές σε μία πιο αφαιρετική και γενικευμένη θεώρηση τους, διευρύνοντας έτσι τις δυνατότητες εφαρμογής τους στα μαθητικά μοντέλα. Όσο αφορά στη χρήση της τρισδιάστατης εκτύπωσης, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ενίσχυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, καθώς το εκτυπωμένο μοντέλο που σχεδίασαν οι ίδιοι δημιούργησε μια "γέφυρα" μεταξύ αφηρημένων ιδεών και χειροπιαστών αντικειμένων, δίνοντάς τους την ευκαιρία να εμπλακούν με την τοπική διάσταση της

καμπυλότητας, όπως παρουσιάστηκε στο παραπάνω κρίσιμο επεισόδιο. Σημαντικά στοιχεία στην ανάπτυξη δεξιοτήτων υπολογιστικής σκέψης και στην εμπλοκή των μαθητών με πλευρές της διαφορικής γεωμετρίας αναδείχθηκαν οι δυνατότητες προγραμματισμού και δυναμικού χειρισμού των ψηφιακών μοντέλων στο προγραμματιστικό περιβάλλον MaLT2 οι οποίες πρόσφεραν την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά με το δυναμικό σχεδιασμό τρισδιάστατων μοντέλων με ενσωμάτωση σύνθετων μαθηματικών και υπολογιστικών εννοιών. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευτεί και ως μια μορφή αυτού που οι Wilensky και Papert (2010) ονόμασαν αναδιάρθρωση ιδεών (restructuration), με την έννοια της αναδιοργάνωσης της γνώσης μέσω νέων μορφών αναπαράστασης και επικοινωνίας που προσφέρει η τεχνολογία, όπως τα προγραμματιστικά περιβάλλοντα, οι οποίες δεν απαιτούν τυπικό φορμαλισμό απαραίτητα για την προσέγγιση και κατανόηση μιας έννοιας, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι τον παρακάμπτουν. Τέτοιες μορφές σχεδιασμού προωθούν τις δραστηριότητες τρισδιάστατης εκτύπωσης ένα βήμα παραπέρα από την παραδοσιακή προσέγγιση της εκτύπωσης συμβατικών ή έτοιμων σχημάτων και μοντέλων διευρύνοντας τα όρια της δημιουργικότητας των μαθητών σχετικά με τι μπορεί και πώς μπορεί να εκτυπωθεί ένα μοντέλο. Επιπρόσθετα, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου μοντέλου (ως κώδικας Logo, ως ψηφιακό γραφικό μοντέλο και ως εκτυπωμένο αντικείμενο), επέτρεψαν στους μαθητές τη βαθύτερη ανάπτυξη πρακτικών υπολογιστικής σκέψης, όπως η αναγνώριση προτύπων, η αποσύνθεση, ο επαναληπτικός σχεδιασμός και ο εντοπισμός σφαλμάτων. Μέχρι τώρα, η υπολογιστική σκέψη έχει μελετηθεί σε ψηφιακά ή φυσικά περιβάλλοντα (Brackmann, 2017· Kite et al., 2021). Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η παρούσα προσέγγιση συνδυάζει τα πλεονεκτήματα και των δύο περιβαλλόντων, καθώς οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να εφαρμόσουν πρακτικές υπολογιστικής σκέψης, αλλά και νοηματοδότησης μαθηματικών εννοιών και στις δύο μορφές.

Κλείνοντας, κρίνεται σκόπιμο να επισημανθούν ορισμένοι περιορισμοί και προκλήσεις της παρούσας έρευνας, που θα πρέπει να ληφθούν υπόψη σε μελλοντικές μελέτες. Το μικρό δείγμα μαθητών καθιστά τα αποτελέσματα μη γενικεύσιμα στον ευρύτερο πληθυσμό. Ωστόσο, παρέχουν σημαντικά αποτελέσματα ποιοτικής ανάλυσης για μια καινοτόμα προσέγγιση που δεν είχε εφαρμοστεί ξανά. Έρευνες μεγαλύτερης κλίμακας θα μπορέσουν να επαληθεύσουν τα αποτελέσματα και να οδηγήσουν σε γενίκευση νέων θεωριών και πλαισίων. Επιπλέον, αξίζει να αναφερθεί πως η εφαρμογή δραστηριοτήτων τρισδιάστατης εκτύπωσης, όπως αυτές που μελετήθηκαν, σε ευρεία κλίμακα και η ενσωμάτωση τους στο τυπικό πρόγραμμα σπουδών αποτελεί μια πρόκληση που χρήζει περαιτέρω έρευνας. Όπως έχουν υποστηρίξει και αντίστοιχες μελέτες (Pearson & Dubé, 2022), τέτοιου τύπου δραστηριότητες απαιτούν έναν ολιστικό μετασχηματισμό της τρέχουσας εκπαιδευτικής προσέγγισης σε ένα νέο μοντέλο που θα προωθεί την καλλιέργεια δεξιοτήτων και την αξιοποίηση τεχνολογιών (όπως η 3D εκτύπωση) σε διαθεματικά έργα συνδεδεμένα με τον πραγματικό κόσμο. Εξίσου σημαντικός είναι και ο μετασχηματισμός του ρόλου των εκπαιδευτικών, ενισχύοντας τις ψηφιακές δεξιότητες τους και την εμπλοκή τους με τον σχεδιασμού υλικού με νέες τεχνολογίες που ανταποκρίνεται στις ανάγκες τους (Cheng et. al. 2024· Kynigos, 2020). Απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση με στόχο την ουσιαστική και δημιουργική αξιοποίηση της τρισδιάστατης εκτύπωσης ως εργαλείο για την καλλιέργεια της μαθηματικής και υπολογιστικής σκέψης των μαθητών, με περαιτέρω εμπειρική έρευνα είτε στο εννοιολογικό πεδίο της καμπυλότητας είτε σε νέα γνωστικά αντικείμενα, και με εξέταση υπό διαφορετικά θεωρητικά πλαίσια με στόχο την ανάδειξη της προστιθέμενης παιδαγωγικής αξίας των δυνατοτήτων που προσφέρει.

Σημείωση

Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από το πρόγραμμα της Ευρωπαϊκής Ένωσης για την έρευνα και την καινοτομία Horizon Europe με τίτλο "Extending Design Thinking with Emerging Digital Technologies (Exten.(D.T.)²)" (Αρ. χρηματοδότησης 101060231). Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Εκτελεστική Υπηρεσία Έρευνας (European Research Executive Agency) στο πλαίσιο του έργου Horizon-Widera με τίτλο "TransEET - Transforming Education with Emerging Technologies" (Αρ. χρηματοδότησης 101078875). Η Ευρωπαϊκή Επιτροπή υποστηρίζει τη δημοσίευση αυτή, χωρίς ωστόσο να φέρει ευθύνη για το περιεχόμενό της, το οποίο αντανακλά αποκλειστικά τις απόψεις των συγγραφέων.

Αναφορές

Abelson, H. & diSessa, A. (1981). *Turtle geometry: The computer as a medium for exploring mathematics.* MIT Press.

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Brackmann, C. P., Román-González, M., Robles, G., Moreno-León, J., Casali, A., & Barone, D. (2017). Development of computational thinking skills through unplugged activities in primary school. In *Proceedings of the 12th Workshop on Primary and Secondary Computing Education (WiPSCE '17)* (pp. 65-72). ACM. https://doi.org/10.1145/3137065.3137069

Cheng, L., Antonenko, P. D., & Ritzhaupt, A. D. (2024). The impact of teachers' pedagogical beliefs, self-efficacy, and technology value beliefs on 3D printing integration in K-12 science classrooms. *Educational Technology Research and Development*, *72*(1), 181-208.

Coşkun, T. K., & Deniz, G. F. (2022). The contribution of 3D computer modeling education to twenty-first century skills: self-assessment of secondary school students. *International Journal of Technology and Design Education, 32*, 1553-1581. https://doi.org/10.1007/s10798-021-09660-y

Dickson, B., Weber, J., Kotsopoulos, D., Boyd, T., Jiwani, S., & Roach, B. (2021). The role of productive failure in 3D printing in a middle school setting. *International Journal of Technology and Design Education, 31*(3), 489-502. https://doi.org/10.1007/s10798-020-09568-z

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. -L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Grizioti, M., Kynigos, C., & Nikolaou, M. -S. (2024). Enhancing Computational Thinking with 3D printing: Imagining, designing, and printing 3D objects to solve real-world problems. *Proceedings of the 23rd Annual ACM Interaction Design and Children Conference* (IDC '24) (pp. 133-141) Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3628516.3655810

Huang, C.-Y., & Wang, J. C. (2022). Effectiveness of a three-dimensional printing curriculum: Developing and evaluating an elementary school design-oriented model course. *Computers & Education*, *187*, 104553. https://doi.org/10. 1016/j.compedu.2022.104553

Kite, V., Park, S., & Wiebe, E. (2021). The code-centric nature of computational thinking education: A review of trends and issues in computational thinking education research. *SAGE Open, 11*(2), 215824402110164. https://doi.org/10.1177/21582440211016418

Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of learning or theory of design? In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 417-438). Springer International. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6

Kynigos, C. (2020). Half-baked constructionism: a strategy to address the challenge of infusing constructionism in education in Greece. In *Designing constructionist futures: The art, theory, and practice of learning designs* (pp. 61-72). MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/12091.003.0009

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming approaches to Computational Thinking: Integrating turtle geometry, dynamic manipulation and 3D space. *Informatics in Education, 17*(2), 321-340. https://doi.org/10.15388/infedu.2018.17

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13-year olds' meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation. In N. A. Paterman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox

(Eds.), *Proceedings of the 27th Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 3, pp. 165-172). University of Hawaii.

Kynigos, C, & Zantzos, I. (2017). Constructing the shortest path on a cylindrical surface. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10) (pp. 2579-2586). DCU Institute of Education and ERME. https://hal.science/hal-01946340v1

Lewis, A. D. (2019). Practice what you teach: How experiencing elementary school science teaching practices helps prepare teacher candidates. *Teaching and Teacher Education, 86*, 102886. https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.102886

Lin, K.-Y., Lu, S.-C., Hsiao, H.-H., Kao, C.-P., & Williams, P. J. (2023). Developing student imagination and career interest through a STEM project using 3D printing with repetitive modeling, *Interactive Learning Environments, 31*(5), 2884-2898. https://doi.org/10.1080/10494820.2021.1913607

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(2), 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Nandi, C., Caspi, A., Grossman, D., & Tatlock, Z. (2017). Programming language tools and techniques for 3D printing. *Proceedings of the 2nd Summit on Advances in Programming Languages* (SNAPL 2017) (pp 1-10). Schloss Dagstuhl-LeibnizZentrum fuer Informatik.

Ng, D. T. K., Tsui, M. F., & Yuen, M. (2022). Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. *Asian Journal for Mathematics Education, 1*(3), 338-358. https://doi.org/10.1177/27527263221129357

Ng, O-L., Sinclair, N., & Davis, B. (2018). Drawing off the page: How new 3D technologies provide insight into cognitive and pedagogical assumptions about mathematics. *The Mathematics Enthusiast, 15*(3), 14, 563-578. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1445

Papert, S. (1980). *Mindstorms-Children, Computers and powerful ideas.* Basic Books, Inc.

Stevenson, I. (1995). *Constructing curvature: the iterative design of a computer-based microworld for non-Euclidian geometry* [Doctoral dissertation]. Institute of Education, University of London.

Pearson, H. A., & Dubé, A. K. (2022). 3D printing as an educational technology: Theoretical perspectives, learning outcomes, and recommendations for practice. *Education and Information Technologies, 27*, 1-28. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10733-7

Leinonen, T., Virnes, M., Hietala, I., & Brinck, J. (2020). 3D printing in the wild: Adopting digital fabrication in elementary school education. *International Journal of Art & Design Education, 39*, 600-615. https://doi.org/10.1111/jade.12310

Tripp, D. (1993). *Critical Incidents in teaching: Developing professional judgement*. Routledge.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of math concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Wilensky, U. & Papert, S. (2010). Restructurations: Reformulations of knowledge disciplines through new representational forms. In J. Clayson, & I. Kalas (Eds.), *Proceedings of the Constructionism 2010 Conference* (pp.97-111). AUP.