

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2006)

5ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»



**Διδασκαλία Επίλυσης Μαθηματικού
Προβλήματος με Υποστήριξη Τεχνολογικών
Μέσων**

Γιώργος Ν. Φιλίππου , Νικόλας Γ. Μουσουλίδης

Βιβλιογραφική αναφορά:

Φιλίππου Γ. Ν., & Μουσουλίδης Ν. Γ. (2026). Διδασκαλία Επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος με Υποστήριξη Τεχνολογικών Μέσων. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, 1, 585–592. ανακτήθηκε από <https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/9153>

■ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ

Γιώργος Ν. Φιλίππου

edphilip@ucy.ac.cy

Νικόλας Γ. Μουσουλίδης

n.mousoulides@ucy.ac.cy

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής

Πανεπιστήμιο Κύπρου

Περίληψη

Η Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος (ΕΜΠ) εξακολουθεί να αποτελεί βασικό στόχο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια προωθείται η ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών ως μέσο ανάπτυξης της μαθηματικής ισχύος του μαθητή και φυσικά της ικανότητάς του για ΕΜΠ. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η δυνατότητα αξιοποίησης ενός λογισμικού στη διδασκαλία ενός μεταπτυχιακού μαθήματος που αποσκοπούσε στην βελτίωση της ικανότητας εκπαιδευτικών να επιλύουν και να διδάσκουν ΕΜΠ. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό WebCT ως συμπληρωματικό μέσο για την εμπλοκή των εκπαιδευτικών σε δραστηριότητες ΕΜΠ, για επικοινωνία ιδεών και συζήτηση των προτεινομένων λύσεων. Ο συνδυασμός της διδασκαλίας στην τάξη και της ηλεκτρονικής μάθησης ήταν αποτελεσματικός. Φάνηκε να προωθεί την αλληλεπίδραση ανάμεσα στους φοιτητές και να βελτιώνει την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα.

Λέξεις Κλειδιά

WebCT, Επίλυση Μαθηματικού Προβλήματος, Υβριδικό Μοντέλο Διδασκαλίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η ανάπτυξη της ικανότητας ΕΜΠ αποτέλεσε για χρόνια πρωταρχικό στόχο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η ΕΜΠ θεωρείται συχνά ως έννοια συνώνυμη του «γνωρίζω και κάνω μαθηματικά». Η διαδικασία ΕΜΠ παραμένει η βάση της διδασκαλίας των μαθηματικών, παρόλο που τα τελευταία χρόνια η σχετική έρευνα έχει αναδείξει τη σημασία πρόσθετων στόχων όπως είναι η εννοιολογική κατανόηση, η αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων και η επικοινωνία (Schoenfeld, 1992).

Στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, η ΕΜΠ εμπεριέχει τρία διακριτές πτυχές: (α) τη διδασκαλία περιεχομένου που θα προωθείται κατά την ΕΜΠ, (β) τη διδασκαλία της διαδικασίας ΕΜΠ, όπως είναι οι στρατηγικές και ευρετικές μέθοδοι που προάγουν μια γενική ικανότητα επίλυσης πρωτότυπων προβλημάτων, και (γ) τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της ΕΜΠ, δηλαδή την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μέσω πραγματικών προβληματικών καταστάσεων (Stacey, 2005). Για να είναι σε θέση να βοηθήσει αποτελεσματικά τους μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα ΕΜΠ,

ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να είναι ο ίδιος ικανός λύτης προβλημάτων, να διαθέτει ισχυρές δεξιότητες αιτιολόγησης και στρατηγικές λύσης προβλημάτων και να έχει θετικές επιστημολογικές πεποιθήσεις απέναντι στα μαθηματικά.

Αρχικά στόχοι της ΕΜΠ ήταν η ανάπτυξη ευέλικτων στρατηγικών λύσης και αυτορρυθμιζόμενων δεξιοτήτων μάθησης, όμως πιο πρόσφατα δίνεται έμφαση στα κίνητρα, στις μεταγνωστικές δεξιότητες, και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών κατά την ΕΜΠ (Hmelo-Silver, 2004). Στο ίδιο πλαίσιο, οι Raavola και Hakkarainen (2005) ισχυρίζονται ότι οι δύο παραδοσιακές μεταφορές της μάθησης (ως *απόκτηση γνώσεων* και ως *κοινωνική αλληλεπίδραση*) δεν επαρκούν για κατανόηση της φύσης και του ρόλου της γνώσης. Προτείνουν μια τρίτη μεταφορά «*τη δημιουργία γνώσης*», η οποία να εστιάζει στη *συνεργατική κατασκευή εργαλείων και μοντέλων*, μέσα από ατομική και συνεργατική μάθηση και αξιοποίηση των κατάλληλων τεχνολογικών εργαλείων.

Η συνεργατική μάθηση με την υποστήριξη τεχνολογικών εργαλείων (Computer-supported collaborative learning (CSCL) προβάλλεται ως αποτελεσματικό μοντέλο (Hurme & Järvelä, 2005), με την έννοια ότι αξιοποιείται η τεχνολογία ως εργαλείο διαμεσολάβησης μεταξύ των μελών μιας ομάδας για την από κοινού *δημιουργία γνώσης*, την επίλυση προβλήματος. Στο περιβάλλον μάθησης που αναπτύσσεται, είναι σημαντικό οι συμμετέχοντες να παρουσιάζουν με σαφήνεια σκέψεις, ιδέες και προτεινόμενες λύσεις, έτσι ώστε να προωθείται η συνεργατική μάθηση και πιο συγκεκριμένα η ΕΜΠ (Hurme & Järvelä, 2005). Νοείται ότι η εφαρμογή του μοντέλου CSCL στη διδασκαλία ΕΜΠ δεν είναι απρόσκοπη. Οι μαθηματικές έννοιες, τα σύμβολα, οι συναρτήσεις και τα θεωρήματα δεν είναι εύκολο να αναπαρασταθούν στο περιβάλλον του υπολογιστή κατά τις διαδικτυακές συζητήσεις. Συχνά παρεμβάλλουν εμπόδια στην προσπάθεια των μαθητών να περιγράψουν αναλυτικά στους συμμαθητές τους τον τρόπο σκέψης, τις ιδέες και τις προτεινόμενες λύσεις (Hurme & Järvelä, 2005).

Στην παρούσα εργασία ως εργαλείο για το μοντέλο CSCL χρησιμοποιήθηκε το WebCT, ένα λογισμικό που προσφέρεται για ασύγχρονη συζήτηση, για προώθηση της κατανόησης μαθηματικών ιδεών και ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Kurz, Middleton, & Yanik, 2004). Μια πιθανή αδυναμία αντίστοιχων με το WebCT εργαλείων για εξ' αποστάσεως μάθηση είναι η αύξηση της «κατά μόνας» μάθησης (Johnson, 2005). Ο μαθητής μπορεί να αποξενωθεί από την ομάδα καθώς προωθεί τη μάθηση του μέσα από τον υπολογιστή, να αποκοπεί από τους συμμαθητές του και τον εκπαιδευτικό, με αποτέλεσμα να υστερεί στη συλλογική κατανόηση και χρήση του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών που θα του χρειαστεί στη μελλοντική του ζωή (Johnson, 2005: Ο' Connor & Ross, 2004).

Ο Johnson (2005) συμφωνεί με τους Ross et al., (2003) ότι η εξ' αποστάσεως μάθηση πρέπει να συνδυάζει γνωστικές και συναισθηματικές συνιστώσες. Οι τελευταίοι προτείνουν ότι η μάθηση πρέπει να είναι ΕΡΩΤΙΚΗ - E.R.O.T.I.C., δηλαδή, ψυχαγωγική (Entertaining), σχετική με τα ενδιαφέροντα των μαθητών (Relevant), οργανωμένη και εστιασμένη (Organized και Thematic), να εμπλέκει τους μαθητές (Involving) και να είναι δημιουργική (Creative). Τα πιο πάνω χαρακτηριστικά περιέχονται σε ένα υβριδικό μοντέλο (Willett, 2002), το οποίο συνδυάζει την αμεσότητα της διδασκαλίας στην τάξη με την επικοινωνία μέσω ενός μοντέλου CSCL. Το νέο αυτό μαθησιακό περιβάλλον προσφέρει

στο μαθητή αρκετό χρόνο για να εργαστεί ατομικά στην ΕΜΠ, να αναπτύξει δεξιότητες αυτορρύθμισης και αυτοαξιολόγησης, χωρίς να παρεμποδίζει την επικοινωνία ανάμεσα στην ομάδα και την αλληλεπίδραση στην τάξη. Ένα υβριδικό μοντέλο διδασκαλίας προσφέρει ένα «ασφαλές» περιβάλλον μάθησης για τους μαθητές, μέσα στο οποίο εκφράζουν τις δικές τους ιδέες, διαπραγματεύονται στρατηγικές λύσης και δίνουν ανατροφοδότηση στις λύσεις των συμμαθητών τους. Ο κάθε μαθητής μπορεί να συμμετέχει με το δικό του ρυθμό, χωρίς χρονικούς περιορισμούς, ενώ έχει την ευχέρεια να αξιοποιεί πηγές όπως το διαδίκτυο, μαθηματικά βιβλία και άλλα τεχνολογικά εργαλεία, όπως π.χ. λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η συνδρομή και αξιοποίηση του περιβάλλοντος CSCL στη συζήτηση και αλληλεπίδραση μεταξύ των φοιτητών και στην ανάπτυξη της ικανότητας ΕΜΠ των φοιτητών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν 25 μεταπτυχιακοί φοιτητές που παρακολουθούσαν ένα μάθημα διδασκαλίας της ΕΜΠ. Τέσσερις ήταν φοιτήτριες με πτυχίο μαθηματικών και ελάχιστη ή και καθόλου διδακτική εμπειρία, δεκαπέντε δασκάλες και έξι δάσκαλοι με διδακτική εμπειρία από ένα μέχρι δεκατέσσερα χρόνια. Η ηλικία τους κυμαινόταν μεταξύ 25 και 37 ετών.

Βασικός σκοπός του μαθήματος ήταν να βοηθήσει τους φοιτητές να αναπτύξουν ένα ολοκληρωμένο νόημα του τι σημαίνει γνωρίζω και κάνω μαθηματικά, και να βελτιώσουν τις ικανότητες τους στην ΕΜΠ, μέσα από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας και την ενασχόληση με πρωτότυπα προβλήματα. Το μάθημα είχε διάρκεια 13 εβδομάδες, με τριώρες συναντήσεις που διεξάγονταν από τις έξι μέχρι τις εννιά το βράδι, αφού οι περισσότεροι φοιτητές ήταν εργαζόμενοι εκπαιδευτικοί. Όπως συμβαίνει συχνά, οι φοιτητές αναμενόταν να μελετήσουν τη σχετική βιβλιογραφία και να ετοιμάσουν φοιτητική μελέτη. Μέσα στο πλαίσιο αυτό είναι προφανές ότι δεν υπήρχε επαρκής χρόνος για να ασχοληθούν οι φοιτητές με πρωτότυπα προβλήματα, να ανταλλάξουν ιδέες με τους συμμαθητές τους, να συνεργαστούν για τη διατύπωση και έλεγχο υποθέσεων, να ανα-στοχαστούν και να δημιουργήσουν γνώση.

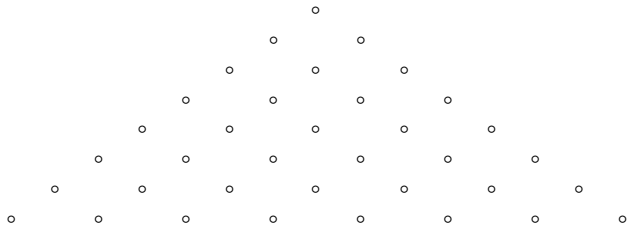
Η ενσωμάτωση του WebCT αποσκοπούσε να προσφέρει χρονική άνεση για ατομική μάθηση, και παράλληλα, μέσω της ασύγχρονης συζήτησης, να προάγει την επικοινωνία και συνεργασία μεταξύ των φοιτητών. Μέσα από την αξιοποίηση του παιδαγωγικού μοντέλου CSCL και την παρουσίαση - συζήτηση των προβλημάτων στην τάξη, αναμενόταν η ενίσχυση της ικανότητας των φοιτητών στην ΕΜΠ και η βελτίωση των στάσεων τους απέναντι στην ΕΜΠ.

Συγκεκριμένα, το πρόγραμμα οργανώθηκε ως εξής: Ο διδάσκοντας παρουσίαζε ένα πρόβλημα κάθε εβδομάδα στο WebCT. Στη συνέχεια οι φοιτητές είχαν την ευκαιρία να παρουσιάσουν στο WebCT αρχικές προτάσεις για λύση, αλλά ταυτόχρονα να δώσουν ανατροφοδότηση στους συμμαθητές τους. Καθώς οι προτεινόμενες λύσεις των φοιτητών ολοκληρώνονταν, ένας ή δύο φοιτητές καλούνταν να παρουσιάσουν τις προτεινόμενες λύσεις στην τάξη. Κατά τη διάρκεια της παρουσίας οι φοιτητές είχαν την ευκαιρία να συζητήσουν στρατηγικές ΕΜΠ, αναφορικά με τις γνωστικές και μεταγνωστικές δεξιότητες που απαιτούνταν για την επίλυση του προβλήματος, να προτείνουν προεκτάσεις και να κατασκευάσουν αντίστοιχα προβλήματα για μαθητές.

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν οι λύσεις

και η συμμετοχή των φοιτητών στο περιβάλλον του WebCT και οι σημειώσεις του διδάσκοντα κατά τη διδασκαλία και τις παρουσιάσεις στην τάξη. Η ανάλυση των ποιοτικών δεδομένων έγινε με τη χρήση ποιοτικών ερμηνευτικών τεχνικών (Miles & Huberman, 1994). Λόγω έλλειψης χώρου, στην παρούσα εργασία παρατίθενται τρία από τα προβλήματα που δόθηκαν και αναλύονται σχόλια και απαντήσεις των φοιτητών σε συνάρτηση με την προσπάθεια επίλυσης του πρώτου προβλήματος. Παρουσιάζονται, επίσης, στοιχεία από την προσπάθεια των φοιτητών στα άλλα δύο προβλήματα.

1. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για να αναστραφεί το πιο κάτω ισοσκελές τρίγωνο αν σε κάθε βήμα μετακινείται ένα μόνο σημείο; Περιγράψτε με συντομία μια κατάλληλη διδακτική στρατηγική για το πρόβλημα αυτό.



2. Ποια είναι η πιθανότητα η 13^η μέρα του μήνα να είναι Παρασκευή;

3. Ένα επίπεδο τέμνει τρία άλλα επίπεδα. Να βρείτε το μέγιστο αριθμό χώρων στους οποίους μπορεί να διαιρεθεί ο τρισδιάστατος χώρος.

Σχήμα 1. Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το πρώτο πρόβλημα αναφερόταν στην αναστροφή τριγώνων (Σχήμα 1) και παρουσιάστηκε στο WebCT την Παρασκευή, μια μέρα μετά την πρώτη συνάντηση. Το πρόβλημα ήταν πετυχημένο, αφού προκάλεσε ζωηρή συζήτηση, η οποία ξεκίνησε με διευκρινιστικές ερωτήσεις, λανθασμένες ή ελλιπείς λύσεις αλλά και ιδέες για το πώς θα μπορούσε να αξιοποιηθεί το πρόβλημα στη διδασκαλία της ΕΜΠ. Οι φοιτητές χειρίστηκαν με άνεση το περιβάλλον του WebCT και συμμετείχαν ενεργά στη συζήτηση. Μέχρι την Κυριακή είχαν δημοσιευτεί 16 μηνύματα και ακόμη 11 τη Δευτέρα και Τρίτη. Αξίζει να σημειωθεί ότι σχεδόν όλοι οι φοιτητές συμμετείχαν σε αυτή την πρώτη συζήτηση.

Στα αποσπάσματα που ακολουθούν παρουσιάζονται διάφορες λύσεις που προτάθηκαν από τους φοιτητές, καθώς επίσης και ενδεικτικά αποσπάσματα από την αλληλεπίδραση και συζήτηση μεταξύ τους. Διακρίνονται η βαθμίδα στην οποία διδάσκει ο φοιτητής (Π-πρωτοβάθμια και Δ-δευτεροβάθμια εκπαίδευση), ο αριθμός προσπαθειών από τον ίδιο φοιτητή στο WebCT, η μέρα και η ημερομηνία-ώρα της προσπάθειας:

Δ1 (π1, Κυρ. 6-2: 13.32): Ξεκίνησα την προσπάθεια μου με ένα τρίγωνο τριών σημείων. Ήταν προφανές ότι χρειαζόταν μόνο μια μετακίνηση. Χρειάζονται δύο βήματα για ένα τρίγωνο 6 σημείων, 3 βήματα για ένα

τρίγωνο 10 σημείων, 5 για τρίγωνο 15 σημείων και 9 βήματα για ένα τρίγωνο 21 σημείων.

Π1 (π1, Κυρ. 6-2: 14.55): Φίλη μου έχεις λάθος! Χρειάζονται τουλάχιστον 4 βήματα για το τρίγωνο που αποτελείται από 10 σημεία. Πώς βρήκες λύση με 3 βήματα;

Η ίδια φοιτήτρια επανήλθε μετά από μερικά λεπτά, διορθώνοντας την προηγούμενη αυθόρμητη της απάντηση και δεχόμενη τη λύση που είχε απορρίψει. Ακολούθησε μια τρίτη παρέμβαση, στην οποία ανέφερε ότι: «το τρίγωνο που αποτελείται από 21 σημεία χρειάζεται οκτώ κινήσεις και όχι εννιά» (π3, Κυρ. 6-2: 15.52).

Κατά τη διάρκεια του Σαββατοκυριακού αρκετοί φοιτητές πρότειναν σωστές λύσεις στο πρόβλημα, παρόλο που μερικοί από αυτούς παρουσίαζονταν λίγο αβέβαιοι για το αποτέλεσμα τους. Μια τυπική περίπτωση ήταν η ακόλουθη:

Π2 (π1, Κυρ. 6-2: 17.18): Προσπάθησα να καταλήξω σε μια γενική λύση, η οποία όμως είναι αρκετά περίπλοκη. **Ελπίζω** να είναι ορθή. Δείτε το συνοδευτικό αρχείο.

Μερικές από τις προτεινόμενες λύσεις κατέληγαν με μια γενική λύση, όπου απαιτούνταν $[n/3]$ βήματα, δηλαδή, το ακέραιο μέρος του κλάσματος, όπου n το πλήθος των σημείων από τα οποία αποτελούνταν το τρίγωνο. Προτάθηκαν επίσης πιο σύνθετες λύσεις, οι οποίες παρουσίασαν μια φόρμουλα $\eta = (2 + (n-3))[(n-3)+1]/2$, που ήταν όμως σωστή μόνο για τις πρώτες τιμές του n . Τέλος, στην πλειοψηφία των απαντήσεων και των προτεινόμενων λύσεων υπήρχε μια γενική ανησυχία για το πώς θα μπορούσε να αποδειχθεί η προτεινόμενη φόρμουλα. Στην περίπτωση της λύσης $[n/3]$ προτάθηκε η τέλεια επαγωγή.

Όλοι σχεδόν οι φοιτητές πρότειναν για τη διδασκαλία του προβλήματος τις ίδιες στρατηγικές ΕΜΠ που χρησιμοποίησαν και οι ίδιοι, όπως «δοκιμή πιο απλού προβλήματος», «κατασκευή πίνακα», και «δοκιμή και πλάνη». Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση αναφερόταν στην αξιοποίηση ενός μαθηματικού εφαρμογίδιου (math applet) από το διαδίκτυο:

Π3 (π1, Κυρ. 6-2: 20.40): Για τη διδασκαλία του προβλήματος οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στην κατασκευή των σχημάτων, δοκιμάζοντας τις διάφορες περιπτώσεις, κατασκευάζοντας πίνακες και καταλήγοντας σε μια γενική λύση. Η αξιοποίηση ενός ψηφιακού γεωπίνακα μπορεί να διευκολύνει την προσπάθεια αυτή.

Δύο μέρες αργότερα μια άλλη φοιτήτρια επανήλθε, προσθέτοντας:

Π4 (π1, Πεμ. 10-2: 21.35): Η ιδέα του Π3 για την αξιοποίηση του γεωπίνακα φαίνεται ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Το έχω δοκιμάσει, αλλά χωρίς επιτυχία, καθώς το λογισμικό Geo-computer παρουσιάζει μόνο τετραγωνικό πλέγμα.

Ο Π3 απάντησε μετά από δύο μέρες:

Π3 (π2, Σαβ. 13-2: 8.45): Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αν χρησιμοποιήσεις ένα γεωπίνακα με τριγωνικό πλέγμα, τον οποίο μπορείς να εντοπίσεις στη διεύθυνση: http://matti.usu.edu/nlvm/category_g_2_t_3.html. Το εφαρμογίδιο είναι το Geoboard - Isometric, το οποίο μπορεί ακόμη να αξιοποιηθεί και για την παρουσίαση τρισδιάστατων σχημάτων.

Η εισήγηση αυτή, οδήγησε το διδάσκοντα και τους φοιτητές σε προβληματισμό σχετικά με τη δυνατότητα επέκτασης του προβλήματος στις τρεις διαστάσεις.

Μια διαφορετική προσέγγιση για την επίλυση του προβλήματος προτάθηκε από ένα πιο έμπειρο εκπαιδευτικό, ο οποίος είχε πρακτική προσέγγιση.

Π6 (π1, Τρι. 8-2: 18.18): Πιστεύω ότι η λύση του προβλήματος είναι αρκετά απλή. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με πρακτικό τρόπο, χρησιμοποιώντας την αρχή των ισεμβαδικών τριγώνων. Το αναστραμμένο τρίγωνο θα έχει το ίδιο εμβαδό με το αρχικό. Αν κάνουμε λοιπόν ένα διφανές αντίγραφο του τριγώνου και το εναποθέσουμε πάνω στο αρχικό με τέτοιο τρόπο που να καλύπτει όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία, η λύση μας είναι ο αριθμός των σημείων που εναπομένουν.

Παρόμοιες συζητήσεις έγιναν στο πλαίσιο και των υπολοίπων προβλημάτων. Για παράδειγμα, οι αρχικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα με τις πιθανότητες (Σχήμα 1) αναφέρονταν στο $1/7$, με το επιχείρημα του προφανούς. Ακολούθως, χρησιμοποιήθηκαν ημερολόγια, κατασκευάστηκαν πίνακες και έγινε έλεγχος των απαντήσεων για μια περίοδο 28 χρόνων κατά την οποία «ολοκληρώνεται ένας πλήρης κύκλος». Στη συνέχεια, μέσα από εποικοδομητική συζήτηση οι φοιτητές κατέληξαν στη σωστή απάντηση με βάση την περίοδο των 400 χρόνων, που είναι ο ακριβής κύκλος.

Οι φοιτητές αντιμετώπισαν πολλές δυσκολίες στην προσπάθεια τους να λύσουν το πρόβλημα με τα τεμνόμενα επίπεδα (Σχήμα 1), καθώς δεν είχαν ευχέρεια να αναπαραστήσουν οπτικά το πρόβλημα στο επίπεδο. Άτομα με ευχέρεια στη μεταφορά τρισδιάστατων σχημάτων στο επίπεδο βρήκαν λύσεις. Ο φοιτητής με τη πρακτική-εποπτική προσέγγιση παρουσίασε μια απλή και ενδιαφέρουσα πρόταση, παρόλο που η αρχική του προσπάθεια ήταν ανεπιτυχής:

Π6 (π5, Πεμ. 17-2: 20.30): Προσπάθησα να λύσω το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια τριγωνική πυραμίδα τεμνόμενη από ένα επίπεδο. Η απάντηση 16 που έδωσα στην προηγούμενη μου παρέμβαση είναι λανθασμένη. Η σωστή απάντηση είναι 15.

Αναφορικά με τη διδασκαλία του προβλήματος αυτού προτάθηκε και πάλι η στρατηγική επίλυσης μιας απλούστερης περίπτωσης, δηλαδή της μέτρησης των επιπέδων μερών που χωρίζει μια ευθεία ένα επίπεδο, δύο ευθείες τρεις ευθείες σημείο και των ημιεπιπέδων που χωρίζουν το επίπεδο μια ευθεία, δύο ευθείες κλπ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της μελέτης αυτής ήταν να εξετάσει τη δυνατότητα προώθησης της συνεργατικής μάθησης στην ΕΜΠ με την υποστήριξη τεχνολογικών εργαλείων (CSCL), χωρίς να περιορίζει την ανάπτυξη δεξιοτήτων αυτοελέγχου και αυτορρύθμισης, οι οποίες είναι σημαντικές στη μάθηση των μαθηματικών. Ένα πρώτο συμπέρασμα από τα δεδομένα της έρευνας είναι ότι το παιδαγωγικό μοντέλο CSCL παρουσιάζεται να είναι αποτελεσματικό, αφού προώθησε τη συζήτηση και επικοινωνία μεταξύ των φοιτητών και παράλληλα βελτίωσε τις στρατηγικές και τεχνικές τους στην ΕΜΠ. Εξίσου σημαντικό θεωρείται το γεγονός ότι η συζήτηση που αναπτύχθηκε στο περιβάλλον του WebCT ενθάρρυνε τη χρήση λεκτικών περιγραφών για την ερμηνεία και επεξήγηση των μαθηματικών ιδεών και συμπερασμάτων, στοιχείο ιδιαίτερα σημαντικό στην ΕΜΠ.

Βασικός στόχος είναι η ανάπτυξη νέων μεθόδων διδασκαλίας της ΕΜΠ, οι οποίες να συνδυάζουν τόσο τη μάθηση σε ατομικό επίπεδο, όσο και τη συνεργατική μάθηση στο περιβάλλον της τάξης ή εξ αποστάσεως. Η αξιοποίηση των σύγχρονων τεχνολογικών εργαλείων στο σχεδιασμό και υλοποίηση των νέων αυτών μεθόδων διδασκαλίας και μάθησης φαίνεται να διανοίγει νέους ορίζοντες. Η παρούσα εργασία αποτελεί ένα μικρό δείγμα επιτυχημένης προσπάθειας εφαρμογής ενός τέτοιου παιδαγωγικού μοντέλου διδασκαλίας με υβριδικά χαρακτηριστικά. Στο μοντέλο αξιοποίησης της συνεργατικής μάθησης με την υποστήριξη τεχνολογικών εργαλείων που παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία η μάθηση δεν περιορίστηκε στο επίπεδο της συλλογικής προσπάθειας μέσα από ασύγχρονη επικοινωνία και κοινή αναζήτηση, αλλά αντίθετα λειτούργησε και σε ατομικό επίπεδο, με σαφείς ενδείξεις ότι να μπορεί να αναπτύξει εσωτερικά κίνητρα, στόχους μάθησης καθώς και δεξιότητες αυτοελέγχου και αυτορρύθμισης.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάστηκε από τους φοιτητές στην προσπάθεια τους να συνδέσουν τα προβλήματα που είχαν δοθεί με την καθημερινή τους πρακτική στην τάξη. Η παρούσα εργασία παρουσιάζει αρκετά δείγματα ενεργητικής εμπλοκής των φοιτητών, συνεχούς και επίπονης εργασίας και αποτελεσματικής αλληλεπίδρασης μεταξύ τους. Ένα τελευταίο απόσπασμα, προερχόμενο από ένα παντρεμένο άντρα φοιτητή, δείχνει με ευχάριστο τρόπο ότι τουλάχιστον για κάποιους φοιτητές η εμπλοκή και μάθηση μέσα από το συγκεκριμένο λογισμικό δεν ήταν άσχετη με την *“ερωτική σχέση”!*

Π7 (π5, Δευ. 14-2: 23.00). Αυτά τα προβλήματα έχουν καταντήσει μπελάς. Μόλις έχω επιστρέψει από ένα δείπνο που είχα πάει με τη γυναίκα μου για τη γιορτή του Αγ. Βαλεντίνου. Καθ' όλη τη διάρκεια του δείπνου σκεφτόμουν το πρόβλημα. Τελικά κατάφερα να βρω τη λύση και πάω για ύπνο. Ελπίζω να είναι και σωστή.

Η πιο πάνω περικοπή δείχνει με χαρακτηριστικό τρόπο το ενδιαφέρον, τη διάθεση εμπλοκής με τα προβλήματα και τη χαρά των φοιτητών από αυτή την ενασχόληση τους. Στην παρούσα εργασία δεν εμφανίστηκε κανένα από τα χαρακτηριστικά της απομόνωσης των φοιτητών που αναφέρονται από τον Johnson (2005). Οι φοιτητές αντιμετώπισαν με σιγουριά τα προβλήματα που δόθηκαν, ακόμη και στην περίπτωση που δεν ήταν καθόλου εύκολα. Ιδιαίτερης σημασίας ήταν επίσης το φιλικό και προσιτό περιβάλλον που αναπτύχθηκε με τη χρήση του WebCT και το οποίο είχε καταλυτική επίδραση στη συμμετοχή των φοιτητών. Τέλος, το παιδαγωγικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε έδωσε

λύσεις, τόσο στις ανάγκες των φοιτητών για περισσότερο χρόνο και μέσα κατά την ΕΜΠ όσο και για στην οργάνωση ενός περιβάλλοντος από κοινού αναζήτησης, ανταλλαγής απόψεων και ανατροφοδότησης. Απομένει η συνέχιση της προσπάθειας μέσα από ένα πιο συγκροτημένο πειραματικό σχεδιασμό με σαφέστερους στόχους, μεθοδολογία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology Review*, 16(3), 235-266.
- Hurme, T., & Järvelä, S. (2005). Students' Activity in Computer-Supported Collaborative Problem Solving in Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(1), 49-73.
- Johnson, G.M. (2005). Student alienation, academic achievement, and WebCT use. *Educational Technology & Society*, 8(2), 179-189.
- Khait, A. (2005). The definition of mathematics: Philosophical and pedagogical aspects. *Science & Education*, 14, 137-159.
- Kurz, T., Middleton, J., & Yanik H. B. (2004). Preservice teachers conceptions of mathematics based software. In M. J. Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, 313-320). Bergen University.
- Miles, M. & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd Edition). London: Sage Publications.
- O' Connor, S., & Ross, A. (2004). WEBCT role-playing: Immediacy versus e-mediacy in learning environments. *Learning Environments Research*, 7, 183-201.
- Paavola, S., & Hakkarainen, K. (2005). The knowledge creation metaphor – An emergent epistemological approach to learning. *Science & Education*, 14, 535-557.
- Ross, A., Siepen, G., & O' Connor, S. (2003). Making distance learning E.R.O.T.I.C.: applying interpretation principles to distance learning. *Environmental Educational Research*, 9(4), 479-495.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (Ch. 15) New York: Simon & Schuster Macmillan.
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24(3-4), 341-350.
- Willet, H. G. (2002). Not one or the other but both: hybrid course delivery using WebCT. *The Electronic Library*, 20(5) 413-419.