ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2006)

5ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Ο ρόλος του ‘drag mode’ στις στρατηγικές μαθητών για τις έννοιες της επιφάνειας και της περιμέτρου στα τρίγωνα

Αθανασία Μπαλωμένου, Μαρία Κορδάκη

Βιβλιογραφική αναφορά:

Μπαλωμένου Α., & Κορδάκη Μ. (2026). Ο ρόλος του ‘drag mode’ στις στρατηγικές μαθητών για τις έννοιες της επιφάνειας και της περιμέτρου στα τρίγωνα. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 507–514. ανακτήθηκε από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/9142

https://epublishing.ekt.gr | **e-Εκδότης:** EKT | **Πρόσβαση:** 24/02/2026 17:13:49

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ 'DRAG MODE' ΣΤΙΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Αθανασία Μπαλωμένου

MEdu
Πειραματικό Λύκειο Πατρών
smpalomenou@in.gr

Μαρία Κορδάκη

Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών και Πανεπιστήμιο Πάτρας
kordaki@cti.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ο ρόλος της λειτουργίας του 'συρσίματος' (drag mode) - η οποία παρέχεται από τα περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας όπως το περιβάλλον Cabri-Geometry II (Laborde, 1990)- στις στρατηγικές μαθητών για τις έννοιες της επιφάνειας και της περιμέτρου στα τρίγωνα. Η μελέτη αυτή αποτελεί ποιοτική έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε σχολείο του Ν. Ηλείας στην οποία συμμετείχαν 25 μαθητές των τριών τάξεων Γυμνασίου. Από την ανάλυση των δεδομένων προέκυψε ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη λειτουργία του 'συρσίματος' στις στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων που τους τέθηκαν με τρεις τρόπους: α) διορθωτικά, β) διερευνητικά και γ) επιβεβαιωτικά. Χρησιμοποιώντας τη λειτουργία του 'συρσίματος' με τους τρεις τρόπους που προαναφέρθηκαν σε συνδυασμό με τις λειτουργίες της αυτόματης μέτρησης μηκών και επιφανειών που παρέχονται από το περιβάλλον Cabri-Geometry II, οι μαθητές βοηθήθηκαν αφ ενός μεν να εξελιχθούν από την έννοια της ισότητας στην έννοια της ισοδυναμίας στα τρίγωνα και αφ ετέρου να διαχωρίσουν την έννοια της επιφάνειας από την έννοια της περιμέτρου.

Λέξεις Κλειδιά

Cabri-Geometry II, drag mode, επιφάνεια, Γυμνάσιο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας είναι σημαντική διότι αποτελεί μέρος των Μαθηματικών της Επιστήμης αλλά και της καθημερινής ζωής των ανθρώπων. Για την κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας βασικό και πρωταρχικό ρόλο παίζει η κατανόηση της διατήρησής της (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981; Maher & Beattys, 1986). Διατήρηση της επιφάνειας σημαίνει ότι ένα επίπεδο σχήμα δύναται να διατηρεί την επιφάνειά του ενώ αλλάζει μορφή (Piaget, et al., 1981). Οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας οι οποίες εστιάζονται στη δυσκολία κατανόησης της διατήρησής της ύστερα από μεταβολή του σχήματός της, είτε ύστερα από τεμαχισμό σε μέρη και ανασύνθεση των μερών είτε μέσω της χρήσης των τύπων υπολογισμού και κατάλληλης μεταβολής των υπεισερχόμενων μεγεθών ώστε

να προκύψει επιφάνεια με το ίδιο εμβαδόν. Ακόμη, οι μαθητές δυσκολεύονται στη διάκριση μεταξύ επιφάνειας και περιμέτρου και χρησιμοποιούν αυτές τις έννοιες εναλλακτικά (Hart, 1989). Η κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας και της διατήρησής της έχει συνδεθεί με τη μορφή των σχημάτων που κάθε φορά μελετώνται (Johnson, 1986). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν περισσότερο τη δυνατότητα της διατήρησης της επιφάνειας σε παραλληλόγραμμα ενώ εμφανίζουν δυσκολίες όταν πρόκειται για ακανόνιστα ή μη κυρτά σχήματα αλλά και τρίγωνα. (Johnson, 1986; Kordaki, 2003).

Η κατανόηση της έννοιας της επιφάνειας και της διατήρησής της έχει επίσης συνδεθεί με το είδος των εργαλείων και ειδικότερα των εργαλείων σε περιβάλλον υπολογιστή (Kordaki & Potari, 2002; Kordaki, 2003). Ειδικότερα, τα Δυναμικά Συστήματα Γεωμετρίας όπως το περιβάλλον Cabri-Geometry II προσφέρουν σημαντικές δυνατότητες για τη μάθηση της έννοιας της επιφάνειας. Οι δυνατότητες αυτές αφορούν στη διαθεσιμότητα πληθώρας εργαλείων που αφορούν σε μια σειρά εννοιών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας καθώς επίσης και στη δυνατότητα άμεσης διαχείρισης μέσω της λειτουργίας του 'συρσίματος' των θεωρητικών εννοιών που εμφανίζονται ως διαγράμματα στην οθόνη του υπολογιστή (Laborde and Laborde, 1995). Τα σχήματα στο περιβάλλον Cabri-Geometry II αποτελούν γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία δύνανται να τροποποιούνται ως προς τη μορφή ενώ διατηρούν τις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες με τις οποίες κατασκευάστηκαν (Noss & Hoyles, 1996; Mariotti, 1995). Αναφέρεται ότι η λειτουργία του 'συρσίματος' μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους (Holzl, 2001, p.83). α) Ως εργαλείο διερεύνησης: οι μαθητές πειραματιζόμενοι με τη μεταβολή των γεωμετρικών κατασκευών στην οθόνη του υπολογιστή μέσω της άμεσής τους διαχείρισης μπορούν να διατυπώσουν υποθέσεις για τις βασικές τους γεωμετρικές ιδιότητες. β) Ως εργαλείο 'ελέγχου': Οι μαθητές μπορούν να επαληθεύσουν μέσω μιας απειρίας εμπειρικών δεδομένων τις τυχόν υποθέσεις που έχουν διαμορφώσει μόνοι τους ή έχουν αποκομίσει μέσω παραδοσιακού πληροφοριακού τύπου διδασκαλίες.

Επιπλέον, το Cabri II παρέχει εργαλεία αυτόματης μέτρησης επιφανειών και μηκών όπως και δυνατότητες αυτόματης πινακοποίησης αυτών των μεγεθών σε συνδυασμό με τη χρήση της λειτουργίας της άμεσης διαχείρισης των σχημάτων στην οθόνη του υπολογιστή. Έτσι, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν τα αριθμητικά δεδομένα που παράγονται και να διατυπώσουν εικασίες, γενικεύσεις και συμπεράσματα.

Στην παρούσα έρευνα, μελετάται ο ρόλος του 'drag mode' στις κατασκευές ισοδυνάμων τριγώνων από τους μαθητές και στην εξέλιξή τους από την έννοια της ισότητας τριγώνων στην έννοια της ισοδυναμίας τριγώνων καθώς και στο διαχωρισμό της έννοιας της επιφάνειας από την περίμετρο. Στη συνέχεια του άρθρου παρουσιάζεται το πλαίσιο της έρευνας, ακολουθεί η παρουσίαση και η συζήτηση των αποτελεσμάτων, ενώ στο τέλος παρατίθενται σχετικά συμπεράσματα.

ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η παρούσα ποιοτική μελέτη (Cohen & Manion, 1989) αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που στόχευε στη διερεύνηση των προσεγγίσεων των μαθητών στην κατασκευή ισοδύναμων τριγώνων με τη χρήση εργαλείων του Cabri-Geometry II (Κορδάκη και Μπαλωμένου 2003; Kordaki and Balomenou, 2006). Κατά τη διάρκεια της έρευνας αυτής δόθηκαν στους μαθητές πέντε δραστη-

ριότητες. Η παρούσα εργασία αφορά σε μία από αυτές. Στην παρούσα μελέτη εστιάζουμε στο ρόλο της λειτουργίας του 'συρσίματος' στις στρατηγικές που κατασκεύασαν οι μαθητές για την προσέγγιση των εννοιών της επιφάνειας και της περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων.

Ειδικότερα, κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας ζητήθηκε από τους μαθητές: α) να κατασκευάσουν ζεύγη τριγώνων με ίσες επιφάνειες με όσο το δυνατό περισσότερους τρόπους μπορούν, β) να διερευνήσουν το τι συμβαίνει με την περίμετρο αυτών των τριγώνων και γ) να αιτιολογήσουν τις κατασκευές τους. Προκειμένου οι μαθητές να κατασκευάσουν όσο περισσότερες λύσεις μπορούν σε ένα πρόβλημα, έχουν την ευκαιρία να εκφράσουν διαφορετικές αντιλήψεις για τις έννοιες που μελετούν και να αποκτήσουν μια πιο διευρυμένη αντίληψη σχετικά με αυτές τις έννοιες (Kordaki, 2003).

Οι μαθητές πριν την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες της έρευνας κλήθηκαν να απαντήσουν στις παρακάτω ερωτήσεις: α) '*είναι δυνατό δύο τρίγωνα να έχουν ίσες επιφάνειες και διαφορετική μορφή?*' και β) *τι πιστεύετε για την επιφάνεια και την περίμετρο ενός σχήματος, είναι ίδιες ή διαφορετικές έννοιες*?. Οι ερωτήσεις αυτές έγιναν με στόχο να διερευνήσουν την εξέλιξη των μαθητών κατά τη διάρκεια του πειράματος. Όπως προέκυψε από τα δεδομένα, όλοι οι μαθητές αναγνώριζαν το ότι δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσες επιφάνειες αλλά ποτέ δεν είχαν αντιμετωπίσει αυτό το ενδεχόμενο σε τρίγωνα με διαφορετική μορφή. Σχετικά με τις έννοιες της περιμέτρου και της επιφάνειας παρά το ότι οι μαθητές γνώριζαν από τη σχολική τους γνώση τους σχετικούς ορισμούς, 3 από τους 25 μαθητές που συμμετείχαν στο πείραμα ανέφεραν, ότι '*επιφάνεια και περίμετρος είναι το ίδιο πράγμα*' ενώ οι υπόλοιποι ανέφεραν ότι δεν τους είχε απασχολήσει ποτέ αυτό το ζήτημα. Σχετικά με την επιφάνεια, οι μαθητές γνώριζαν από τη σχολική τους γνώση τους τύπους υπολογισμού της επιφάνειας στα τρίγωνα.

Το πείραμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο Γυμνάσιο Πανόπουλου Ν. Ηλείας, με 25 συνολικά μαθητές των 3 τάξεων του Γυμνασίου. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 2 ή 3 ατόμων και αρχικά είχαν την ευκαιρία να εξοικειωθούν για περίπου 2 μήνες (2 ώρες την εβδομάδα) με βασικές λειτουργίες ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου. Στη συνέχεια, οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τη χρήση όλων των εργαλείων του Cabri II εκτός από εκείνα που αφορούν σε διανύσματα, γεωμετρικούς τόπους, ομοιοθεσία και μακροκατασκευές. Μετά την ολοκλήρωση της φάσης εξοικείωσης οι μαθητές αντιμετώπισαν τις πέντε δραστηριότητες της έρευνας. Κάθε ομάδα εργάστηκε δύο ώρες κατά μέσο όρο για κάθε δραστηριότητα. Η ερευνήτρια, μια από τις συγγραφείς, συμμετείχε ως παρατηρητής με ελάχιστη παρέμβαση. Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν τα ηλεκτρονικά αρχεία με τις εικόνες των στρατηγικών των μαθητών, οι χειρόγραφες σημειώσεις της ερευνήτριας και κασέτες βιντεοκάμερας.

Η διαδικασία ανάλυσης δεδομένων

Τα διάφορα είδη δεδομένων ταξινομήθηκαν ανά ομάδα μαθητών και στη συνέχεια οι στρατηγικές τους ταξινομήθηκαν σε κατηγορίες με κριτήριο τα εργαλεία του Cabri-Geometry II που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στις κατασκευές τους. Τέλος, αναλύεται ο ρόλος του 'drag mode' σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία του Cabri-Geometry II στις κατασκευές των μαθητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι μαθητές κατασκεύασαν μια ποικιλία στρατηγικών προκειμένου να φέρουν σε πέρας τις δραστηριότητες της έρευνας. Η φύση των δραστηριοτήτων - που ζητούσε όσο το δυνατόν περισσότερες λύσεις - σε συνδυασμό με την ποικιλία των προσφερομένων εργαλείων του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri-Geometry II, οδήγησε τους μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές κατασκευής ισοδυνάμων τριγώνων οι οποίες εντάχθηκαν σε εννέα κατηγορίες και περιγράφονται αναλυτικά στο Kordaki and Balomenou (2006). Πολλές από αυτές τις στρατηγικές είναι ασυνήθιστες στις σχολικές πρακτικές. Κάθε μαθητής κατασκεύασε πάνω από δύο στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος που τέθηκε. Όσον αφορά τις στρατηγικές τις οποίες οι μαθητές κατασκεύασαν εκμεταλλευόμενοι τη λειτουργία του 'drag - mode' και όπως προέκυψε από την ανάλυση αυτών, οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη λειτουργία 'drag - mode' με τρεις διαφορετικούς τρόπους: *α) Διορθωτικά, β) Διερευνητικά, και γ) Επαληθευτικά.* Οι τρόποι αυτοί περιγράφονται στην επόμενη ενότητα σε συσχέτιση με τις στρατηγικές επίλυσης που κατασκεύασαν οι μαθητές στα προβλήματα που τους τέθηκαν:

Χρήση της λειτουργίας 'drag - mode' με διορθωτικό τρόπο

Στρατηγική Σ1: Κατασκευάζοντας ίσα τρίγωνα χρησιμοποιώντας το 'μάτι'. Η στρατηγική αυτή στηρίζεται κυρίως στην οπτική αντίληψη των μαθητών. Ως εκ τούτου, θεωρείται ως μια αρχική- στοιχειώδης (primary) προσέγγιση της επιφάνειας (Piaget, et al., 1981). Οι μαθητές που κατασκεύασαν αυτή τη στρατηγική σχεδίασαν ένα σκαληνό τρίγωνο στην οθόνη του υπολογιστή χρησιμοποιώντας το εργαλείο 'τρίγωνο'. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν το ίδιο εργαλείο προκειμένου να κατασκευάσουν ένα τρίγωνο το οποίο σύμφωνα με την οπτική τους αντίληψη φαινόταν να είναι ίσο με το αρχικό. Προκειμένου να επιβεβαιώσουν την ορθότητα της κατασκευής αυτού του ζεύγους ίσων τριγώνων χρησιμοποίησαν την αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και των δύο τριγώνων. Στο σημείο αυτό οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι οι επιφάνειες των δύο τριγώνων ήταν διαφορετικές. Τότε οι μαθητές αυτοί εξέφρασαν την άποψη ότι '*είναι δύσκολο να κατασκευαστούν με το μάτι ίσα τρίγωνα στο περιβάλλον Cabri-Geometry II*'. Προκειμένου να ξεπεράσουν αυτή τη δυσκολία, οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη λειτουργία του 'drag mode' με διορθωτικό τρόπο σε συνδυασμό με την αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας, με στόχο να διορθώσουν το δεύτερο τρίγωνο ώστε να έχει ίση επιφάνεια με το αρχικό. Έτσι, έσυραν μια ή περισσότερες κορυφές του δεύτερου τριγώνου μέχρι να βρουν κάποιο στιγμιότυπο στην οθόνη του υπολογιστή όπου τα δύο τρίγωνα να έχουν ίδια επιφάνεια. Στην προσπάθειά τους αυτή βρήκαν κάποιες περιπτώσεις όπου τα τρίγωνα είχαν μεν την ίδια επιφάνεια δεν είχαν όμως την ίδια μορφή. Στο σημείο αυτό οι μαθητές εξεπλάγησαν, δοκίμασαν και άλλες φορές και τέλος με έκπληξη παρατήρησαν ότι τελικά '*είναι δυνατό δύο τρίγωνα να έχουν την ίδια επιφάνεια αλλά όχι ακριβώς το ίδιο σχήμα*'. Δηλαδή, μέσα από τη διορθωτική χρήση του 'drag- mode' και σε συνδυασμό με την αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας οι μαθητές βοηθήθηκαν να μεταβούν από την ισότητα στην ισοδυναμία των τριγώνων. Έτσι οδηγήθηκαν στην κατασκευή της στρατηγικής που περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

Χρήση της λειτουργίας 'drag - mode' με διερευνητικό τρόπο (exploratory mode)

Στρατηγική Σ2: χρήση της λειτουργίας 'drag mode' σε συνδυασμό με την αυτόματη μέτρηση επιφάνειας:

- Κατασκευή δύο τριγώνων ΑΒΓ και ΖΚΛ
- Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΚΛ
- Σύρσιμο των κορυφών του τριγώνου ΖΚΛ μέχρι να βρεθούν κάποια στιγμιότυπα κατά τα οποία η επιφάνεια του ΖΚΛ να είναι ίση με την επιφάνεια του ΑΒΓ.

Οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική πειραματίστηκαν με δύο τρίγωνα διαφορετικής μορφής όπου με τη χρήση του 'συρσίματος΄ τροποποιούσαν δυναμικά τη μορφή του δεύτερου τριγώνου ενώ ταυτόχρονα παρατηρούσαν και πινακοποιούσαν τα αποτελέσματα της αυτόματης μέτρησης της επιφάνειάς του. Κατά τη διάρκεια αυτής της διερευνητικής διαδικασίας, οι μαθητές εντόπισαν περιπτώσεις όπου το δεύτερο τρίγωνο είχε ίση επιφάνεια με το αρχικό αλλά διαφορετική μορφή. Με έκπληξη οι μαθητές εξέφρασαν ότι '*είναι δυνατόν δύο τρίγωνα με διαφορετικό σχήμα να έχουν ίσες επιφάνειες*'. Με βάση αυτά τα οπτικά και αριθμητικά στοιχεία, οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν η ευκαιρία να καταλάβουν διαισθητικά την έννοια της διατήρησης της επιφάνειας σε τυχαία τρίγωνα. Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι, κατά τη διάρκεια αυτού του πειραματισμού ορισμένοι μαθητές παρατήρησαν ότι '*όταν η κορυφή του δεύτερου τριγώνου μετακινείται κάπως παράλληλα στην απέναντί του πλευρά προκύπτουν τρίγωνα με ίσες επιφάνειες*'. Έτσι οδηγήθηκαν στην κατασκευή της στρατηγικής που περιγράφεται παρακάτω.

Χρήση της λειτουργίας 'drag - mode' με διερευνητικό και επαληθευτικό τρόπο

Στρατηγική Σ3: διατήρηση του μήκους της βάσης και της απόστασής της από την απέναντι κορυφή του τριγώνου. Αυτή η στρατηγική αποτελεί μια πιο προχωρημένη-εξελιγμένη προσέγγιση της έννοιας της επιφάνειας από τους μαθητές (Piaget, et al., 1981) σε σχέση με τη στρατηγική Σ1.

- Κατασκευή: δύο παράλληλων ευθειών ε1 και ε2, ενός ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ πάνω στην ε1, ενός σημείου Α πάνω στην ε2 και του τριγώνου ΑΒΓ
- Αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας του τριγώνου ΑΒΓ
- Σύρσιμο του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε2
- Πινακοποίηση της επιφάνειας των τριγώνων που σχηματίζονται καθώς το σημείο Α σύρεται πάνω στην ευθεία ε2.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές που πραγματοποίησαν αυτή τη στρατηγική στηρίχθηκαν στην εικόνα και με διαισθητικό τρόπο αντιλήφθηκαν ότι τα παραγόμενα τρίγωνα έχουν ίσα ύψη. Αιτιολόγησαν την εικασία τους λέγοντας ότι: '*αυτά τα τρίγωνα έχουν ίσες επιφάνειες διότι έχουν κοινή βάση και φαίνεται να έχουν ίσα ύψη διότι οι δύο παράλληλες ευθείες ε1 και ε2 έχουν ίση απόσταση*'. Ορισμένοι μαθητές κατασκεύασαν αυτή τη στρατηγική παράγοντας μια πληθώρα ισοδυνάμων τριγώνων με τη χρήση του 'drag mode', (η στρατηγική αυτή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί στο περιβάλλον 'χαρτίμολύβι' με απειρία ισοδυνάμων τριγώνων) ενώ άλλοι αρχικά κατασκεύασαν ένα περιορισμένο αριθμό τριγώνων. Ειδικότερα, αυτοί οι μαθητές κατασκεύασαν 2 παράλληλες ευθείες ε1 και ε2, ένα ευθύγραμμό τμήμα ΒΓ πάνω στην ευθεία ε1, πήραν ένα σημείο Α στην ευθεία ε2 και κατασκεύασαν το τρίγωνο

ΑΒΓ. Στη συνέχεια πήραν άλλα δύο σημεία Κ και Λ πάνω στην ε2 και κατασκεύασαν τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΛΒΓ. Αφού διαπίστωσαν την ισοδυναμία των τριγώνων αυτών ως προς την επιφάνεια, ορισμένοι από αυτούς προχώρησαν και δοκίμασαν να χρησιμοποιήσουν τη λειτουργία του 'συρσίματος' προκειμένου να διερευνήσουν την ισοδυναμία των επιφανειών σε ένα μεγάλο αριθμό τριγώνων τα οποία παράγονταν με αυτό τον τρόπο. Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι μαθητές που πραγματοποίησαν στρατηγικές αυτής της κατηγορίας μέτρησαν αυτόματα τις επιφάνειες των παραγόμενων τριγώνων και ταυτόχρονα πινακοποιούσαν αυτόματα τα αποτελέσματα. Με αυτό τον τρόπο αυτοί οι μαθητές *επαλήθευσαν αυτή τη στρατηγική* ως μέθοδο κατασκευής μιας οικογένειας ισοδυνάμων τριγώνων.

Επιφάνεια και περίμετρος. Οι μαθητές μελέτησαν την επιφάνεια σε σχέση με την περίμετρο στα ισοδύναμα τρίγωνα που κατασκεύασαν με όλους τους τύπους στρατηγικών που επινόησαν. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε περίπτωση οι μαθητές μετρούσαν αυτόματα τις επιφάνειες και τις περιμέτρους των τριγώνων αυτών και σύγκριναν τα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία παράγονταν με τη βοήθεια των λειτουργιών αυτών. Σε όλες τις περιπτώσεις οι μαθητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι '*η επιφάνεια είναι διαφορετικό πράγμα από την περίμετρο*', '*δύο τρίγωνα μπορεί να έχουν ίσες επιφάνειες αλλά διαφορετικές περιμέτρους*'. Ειδικότερα, στις περιπτώσεις που χρησιμοποίησαν τη λειτουργία του 'drag mode' προκειμένου να διερευνήσουν τη δυνατότητα ύπαρξης τριγώνων με ίσες επιφάνειες αλλά διαφορετική μορφή, οι μαθητές διαπίστωσαν ότι ανάμεσα σε ισοδύναμα τρίγωνα το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τη μικρότερη περίμετρο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Οι μαθητές προκειμένου να φέρουν σε πέρας τις δραστηριότητες που τους δόθηκαν εκμεταλλεύτηκαν τις δυνατότητες του περιβάλλοντος Cabri-Geometry II, χρησιμοποιώντας 'με κάθε δυνατό τρόπο' τα παρεχόμενα εργαλεία του, και κατασκεύασαν 9 διαφορετικές προσεγγίσεις στη διατήρηση της επιφάνειας των τριγώνων, σε αντιπαράθεση με την κυρίαρχη σχολική προσέγγιση η οποία στηρίζεται κυρίως στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού. Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθητών από την έννοια της ισότητας στην έννοια της ισοδυναμίας στα τρίγωνα έπαιξε η χρήση της λειτουργίας του 'συρσίματος'. Η λειτουργία του 'συρσίματος' σε συνδυασμό με τη λειτουργία της αυτόματης μέτρησης της επιφάνειας χρησιμοποιήθηκε με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

α) *Με διορθωτικό τρόπο:* Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τη λειτουργία 'drag-mode' ως εργαλείο για να βελτιώσουν-προσαρμόσουν την κατασκευή ίσων τριγώνων με μεθόδους που βασιζόταν πλήρως ή μερικώς στην οπτική τους αντίληψη. Η διορθωτική αυτή διαδικασία βοήθησε ορισμένους μαθητές να εξελιχθούν από την έννοια της ισότητας στην έννοια της ισοδυναμίας τριγώνων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η χρήση αυτού του τύπου της λειτουργίας του "drag mode" δεν έχει ως σήμερα αναφερθεί από ερευνητές.

β) *Με διερευνητικό τρόπο:* Με τη χρήση της λειτουργίας "drag mode" οι μαθητές διερεύνησαν ένα μεγάλο αριθμό τριγώνων και βρήκαν περιπτώσεις ισοδύναμων αλλά όχι υποχρεωτικά ίσων τριγώνων. Έτσι, οι μαθητές εξελίχθηκαν από την έννοια της ισότητας στην έννοια της ισοδυναμίας τριγώνων. Επιπλέον, οι μαθητές διερεύνησαν τη δυνατότητα της διατήρησης

της επιφάνειας σε οικογένειες ισοδυνάμων τριγώνων με κοινή βάση και ίσα ύψη, τα οποία δημιουργούνται έτσι ώστε η βάση να βρίσκεται σε μία ευθεία ε1 ενώ η απέναντι κορυφή να κινείται σε παράλληλη ευθεία προς αυτήν.

γ) *Με επαληθευτικό τρόπο:* Οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις παραπάνω λειτουργίες προκειμένου να επαληθεύσουν όλες τις κατασκευές ισοδυνάμων τριγώνων που παρήγαγαν. Ακόμη, με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να διερευνήσουν και να επαληθεύσουν τη διατήρηση της επιφάνειας σε έναν μεγάλο αριθμό τριγώνων διαφορετικής μορφής και πιο συγκεκριμένα σε οικογένειες τριγώνων μεταξύ παραλλήλων ευθειών, με κοινή βάση και ίσα αντίστοιχα ύψη.

Επιπλέον, η λειτουργία "drag mode" σε συνδυασμό με τις αυτόματες μετρήσεις επιφάνειας, μήκους, περιμέτρου, αυτόματης πινακοποίησης, αξόνων και πλέγματος, έδωσε στους μαθητές τη δυνατότητα: α) διαχωρισμού των εννοιών της επιφάνειας και της περιμέτρου, β) κατασκευής ισοδυνάμων τριγώνων με ασυνήθιστους για τις σχολικές πρακτικές τρόπους γ) μελέτης της διατήρησης της επιφάνειας τριγώνων σε πληθώρα διαφορετικών εικονικών αναπαραστάσεων και στη διατύπωση εικασιών και δ) προσέγγισης της έννοιας της επιφάνειας με διαφορετικούς τρόπους σε σχέση με το περιβάλλον 'χαρτί-μολύβι'.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση των εργαλείων του Cabri-Geometry II και ειδικότερα η λειτουργία 'drag mode', σε συνδυασμό με την αυτόματη μέτρηση της επιφάνειας και της περιμέτρου και την αυτόματη πινακοποίηση έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να μελετήσουν την έννοια της επιφάνειας σε μια ποικιλία ισοδυνάμων τριγώνων, να διορθώσουν τις προσεγγίσεις τους που στηρίζονταν κυρίως στην οπτική τους αντίληψη, να διερευνήσουν τη δυνατότητα διατήρησης της επιφάνειας σε τρίγωνα διαφορετικής μορφής και έτσι να εξελιχθούν από την ισότητα τριγώνων στην ισοδυναμία τριγώνων, να επαληθεύσουν μεθόδους κατασκευής ισοδυνάμων τριγώνων και τέλος να διαχωρίσουν την έννοια της επιφάνειας από την περίμετρο. Επιπλέον, μέσα από αυτή τη διαδικασία, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να διερευνήσουν την έννοια της επιφάνειας μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις (οπτικές, αριθμητικές, συμβολικές), να διατυπώσουν γενικεύσεις και να αποκτήσουν μια πιο διευρυμένη άποψη της παραπάνω έννοιας και της σχέσης επιφάνειας- περιμέτρου ισοδυνάμων τριγώνων. Επιπλέον, οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να κάνουν συνδυασμούς και συνδέσεις μεταξύ διαφόρων ειδών γνώσης που ήδη κατείχαν, χωρίς να περιοριστούν στη μελέτη ενός μικρού αριθμού τριγώνων με την αποκλειστική χρήση του τύπου υπολογισμού της επιφάνειας, πρακτική που κυρίως χαρακτηρίζει τις κυρίαρχες σχολικές πρακτικές. Γενικότερα, το 'drag-mode' σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα εργαλεία του Cabri II και με τη φύση των δραστηριοτήτων, οι οποίες απαιτούσαν πολλαπλές επιλύσεις, επηρέασε τις στρατηγικές των μαθητών για την κατασκευή ισοδυνάμων τριγώνων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cohen, L. and Manion, L. (1989). *Research Methods in Education,* Routledge, London.

Johnson, H. C. (1986). 'Area is a measure', *International Journal of Mathematics Education, Science & Technology,* 17(4), 419-424.

Hart, K-M. (1989). Measurement. In John Murray (Eds), *Childrens Understanding of Mathematics*: 11-16, (pp. 9-22). G. Britain: Athenaeum Press Ltd.

Holzl, (2001).Using Dynamic geometry software to add contrast to geometric situations-A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6(1), 63-86.*

Kordaki, M. and Potari, D. (2002). The effect of tools of area measurement on students' strategies : The case of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7(1), 65-100.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area*. Educational Studies in Mathematics,* 52, 177-209.

Κορδάκη, Μ. και Μπαλωμένου, Α. (2003). Προσεγγίσεις μαθητών στην εγγραφή μιας κλάσης ισοδυνάμων τριγώνων σε ορθογώνιο και μελέτη της σχέσης επιφάνειας και περιμέτρου τους με τη χρήση εργαλείων του Cabri-Geometry II . *6ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην εκπ/ση*. Βόλος 13-15 Οκτωβρίου, 2003.

Kordaki, M. & Balomenou, A. (2006, in press). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broader context: exploiting the tools of Cabri II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.*

Laborde, J-M. (1990). *Cabri-Geometry* [Software], Universite de Grenoble, France.

Laborde, C. and Laborde, J-M. (1995). What about a Learning Environment where Euclidean Concepts are manipulated with a mouse? In A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss and L. Edwards (Eds), *Computers and Exploratory Learning* (pp.241-261), Berlin: Springer-Verlag.

Maher, C.A. and Beattys, C. B. (1986). 'Examining the Construction of area and its Measurement by Ten to Fourteen Year old Students', in E. Lansing, G. Lappan, and R. Even (eds), *Proceedings of the 8th International Conference, Psychology of Mathematics Education,* N. A., pp. 163-168.

Mariotti, M., A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). Berlin: Springer-Verlag.

Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A. (1981). *The child's conception of geometry,* Norton & Company, N.Y.