

# Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2006)

5ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»



Εναύσματα μετάβασης στην πολλαπλασιαστική στρατηγική κατά την κατασκευή δυναμικών σχημάτων με χρήση γλώσσας προγραμματισμού

Γιώργος Ψυχάρης, Νικολέτα Γιαννούτσου

## Βιβλιογραφική αναφορά:

Ψυχάρης Γ., & Γιαννούτσου Ν. (2026). Εναύσματα μετάβασης στην πολλαπλασιαστική στρατηγική κατά την κατασκευή δυναμικών σχημάτων με χρήση γλώσσας προγραμματισμού. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, 1, 358–366. ανακτήθηκε από <https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/9123>

## ■ ΕΝΑΥΣΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΛΩΣΣΑΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

### Γιώργος Ψυχάρης

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Τμήμα ΦΠΨ  
Πανεπιστήμιο Αθηνών  
grpsych@ppp.uoa.gr

### Νικολέτα Γιαννούτσου

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Τμήμα ΦΠΨ  
Πανεπιστήμιο Αθηνών  
yiannou@sch.gr

### Περίληψη

Το άρθρο αυτό εστιάζει στην παρουσίαση μίας έρευνας που μελέτησε τους ίδιους μαθητές σε δύο διαδοχικές φάσεις (Α, Β' Γυμνασίου) κατά την εμπλοκή τους σε δύο παρεμφερείς δραστηριότητες κατασκευής δυναμικών σχημάτων με υπολογιστικά εργαλεία. Αντικείμενο της έρευνας αποτέλεσαν οι στρατηγικές κατασκευής που ανέπτυξαν οι μαθητές όπως αυτές εμφανίστηκαν στα πλαίσια των διαφορετικών εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων και οι παράγοντες – τα εναύσματα μετάβασης – που φάνηκε να υποστηρίζουν αυτή την εξέλιξη. Η συγκριτική ανάλυση των δεδομένων ανέδειξε το ρόλο των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του υπολογιστικού περιβάλλοντος αλλά και της εκπαιδευτικής δραστηριότητας.

### Λέξεις Κλειδιά

Έναυσμα μετάβασης, πολλαπλασιαστική στρατηγική, αυξομείωση, γλώσσα προγραμματισμού.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο επίκεντρο της παρούσας έρευνας βρίσκεται η μελέτη των διαδικασιών μετάβασης στην πολλαπλασιαστική στρατηγική, όπως εμφανίζεται σε διαδικασίες κατασκευής και αυξομείωσης γεωμετρικών σχημάτων από τους μαθητές ενός γυμνασίου κατά τη διάρκεια συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων σε δύο διαδοχικά σχολικά έτη. Με τον όρο *αυξομείωση* αναφερόμαστε στη δυνατότητα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης δυναμικά μεταβαλλόμενων γεωμετρικών σχημάτων, η κατασκευή των οποίων βασίζεται σε σχέσεις αναλογίας μεταξύ μεταβλητών μεγεθών τους που μπορεί να εκφραστούν στη μορφή  $Y = mX$  (Karplus et al., 1983). Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες χρησιμοποιώντας υπολογιστικά εργαλεία συμβολικής –μέσω προγραμματιστικής γλώσσας- και γραφικής αναπαράστασης, έχοντας παράλληλα δυνατότητα χειρισμού των μεταβλητών μεγεθών των γεωμετρικών κατασκευών. Η θεωρητική αφετηρία της παρούσας έρευνας εκκινεί από την άποψη ότι η συγκρότηση των εννοιών, άρα και οι απαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες του ατόμου, διαμεσολαβούνται

από τη χρήση συμβόλων και εργαλείων, που με τη σειρά τους διαμορφώνουν τη δόμηση και την έκφραση νοημάτων ( Vygotsky, 1978). Στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών οι δυνατότητες της υπολογιστικής τεχνολογίας στη δημιουργία εργαλείων συμβολικής έκφρασης, έχουν αποτελέσει τη βάση για την εξέταση υπό νέο πρίσμα των διαδικασιών συμβολισμού, και ειδικότερα του αλγεβρικού συμβολισμού, στη μαθησιακή διαδικασία (Sherin, 2001). Στην παρούσα έρευνα η αυξομείωση τίθεται στο επίκεντρο ως διαδικασία (Noss & Hoyles, 1996) και μελετάται με βάση δύο άξονες: (α) τα μέσα έκφρασης αλγεβρικών σχέσεων μέσω προγραμματισμού και (β) την εξέλιξη των στρατηγικών των ίδιων μαθητών σε δύο διαφορετικές χρονικές φάσεις.

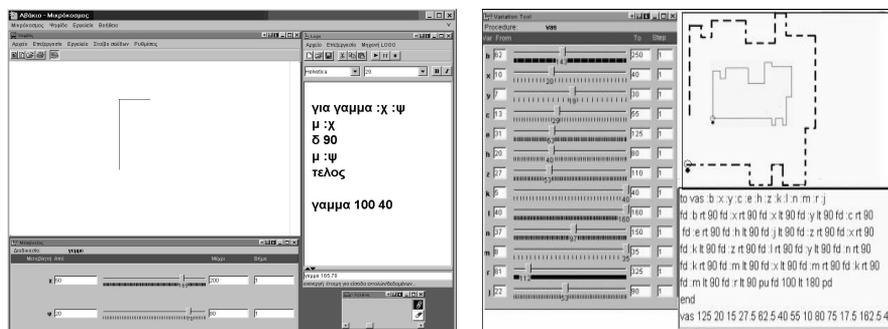
Στα προβλήματα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης η έρευνα έχει επισημάνει τη δυσκολία των παιδιών να διακρίνουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που διέπουν τη συγκεκριμένη διαδικασία, την οποία επιμένουν να μεταφράζουν προσθετικά: θεωρούν, δηλαδή, ότι όμοιο σχήμα προς ένα αρχικό προκύπτει όταν προστεθούν στα μήκη των πλευρών του κατάλληλα μήκη, μέχρι αυτά να εξισωθούν με εκείνα των αντίστοιχων πλευρών του αρχικού σχήματος (Turniaire & Pulos, 1985). Η σύζηση σχετικά με τις στρατηγικές των μαθητών για την μεγέθυνση-σμίκρυνση ενός αρχικού σχήματος επικεντρώνεται στην επιλογή των αριθμητικών τελεστών που απαιτούνται για τον πολλαπλασιασμό των πλευρών του σε μια κατάσταση απλής αναλογίας (Vergnaud, 1983). Στην περίπτωση των δυναμικά μεταβαλλόμενων γεωμετρικών σχημάτων η αυξομείωση περιλαμβάνει τη χρήση μεταβλητών και τη συγκρότηση συναρτησιακών σχέσεων και έτσι διασυνδέεται με σύνθετες νοητικές διαδικασίες που σχετίζονται τόσο με το επίπεδο της αναγνώρισης της σχέσης συμμεταβολής δύο μεταβλητών με βάση διαφορετικές αναπαραστάσεις (π.χ. αριθμητικές ή γραφικές), όσο και με το επίπεδο του συμβολισμού της συγκεκριμένης σχέσης με βάση την ανάλυση των δεδομένων ενός προβλήματος (Ursini & Trigueros, 2001). Στο πλαίσιο αυτό οι Hoyles και Noss (1989) έχουν επισημάνει τον κρίσιμο ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η ύπαρξη μιας προγραμματιστικής γλώσσας στην έκφραση των απαραίτητων πολλαπλασιαστικών συσχετίσεων για τη μεγέθυνση-σμίκρυνση, ιδιαίτερα όταν τα παιδιά εργάζονται σε υπολογιστικά περιβάλλοντα με διασυνδεδεμένες γραφικές και συμβολικές αναπαραστάσεις. Παράλληλα, όμως, η πολυσύνθετη –και όχι αυτονόητη- διασύνδεση μεταξύ της διδακτικής αξιοποίησης της υπολογιστικής τεχνολογίας και της κατανόησης συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών (Mariotti, 2002), θέτει υπό διερεύνηση τον ρόλο των χαρακτηριστικών ενός υπολογιστικού εργαλείου στη μαθησιακή διαδικασία. Η σχέση του μαθητή με ένα υπολογιστικό εργαλείο, μπορεί να εξελιχθεί με διαφορετικούς και μη προβλέψιμους τρόπους, στοιχείο που παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία και την επηρεάζει (βλ. π.χ. Guin & Trouche 1999). Έτσι, οι δυνατότητες που μπορεί να παρέχει ένα υπολογιστικό εργαλείο –τι μπορεί να κάνει κάποιος- για να “μεταμορφωθούν” σε πρακτικές –τι κάνει στην πραγματικότητα- χρειάζεται να ενταχθούν στο κατάλληλο πλαίσιο και να υποστηριχθούν αντίστοιχα. Στο παρόν άρθρο εστιάζομαστε ιδιαίτερα στη διαμεσολάβηση των λειτουργικοτήτων των υπολογιστικών εργαλείων και των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στη διαμόρφωση των παραγόντων που ευνοούν τη μετάβαση των παιδιών σε πολλαπλασιαστικές στρατηγικές αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών.

## ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας που παρουσιάζεται εδώ οριοθετήθηκε από φαινομενολογικές -εθνομεθοδολογικές και εθνογραφικές- μεθόδους για τη φυσική παρατήρηση ανθρώπινων δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα σε πραγματικό χρόνο (Goetz & LeCompte, 1984). Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα γυμνάσιο κατά τη διάρκεια δύο διαδοχικών σχολικών ετών: κατά το πρώτο έτος μελετήθηκαν για 4 μήνες δύο τμήματα μαθητών της Α' τάξης, ενώ το επόμενο έτος μελετήθηκαν για 6 μήνες οι ίδιοι μαθητές στην Β' τάξη. Στη συλλογή δεδομένων συμμετείχαν δύο ερευνητές ως συμμετοχικοί παρατηρητές. Σε κάθε τμήμα βιντεοσκοπήθηκαν (α) η ίδια ομάδα δύο μαθητών (ομάδα εστίασης) (β) επεισόδια από το σύνολο των ομάδων της τάξης αλλά και τις παρεμβάσεις του διδάσκοντα. Οι μαθητές εργάζονταν ανά δύο σε συνεργαζόμενες ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου κατά τη διάρκεια ενός δίωρου μαθήματος κάθε εβδομάδα. Την πρώτη σχολική χρονιά οι δεκατρείς ομάδες των παιδιών κάθε τμήματος κλήθηκαν να κατασκευάσουν μια δυναμική γραμματοσειρά με όλα τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου με μεταβλητό μέγεθος (στο εξής η δραστηριότητα αυτή θα αναφέρεται ως ΚΔΓ), ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη γραφή λέξεων ή φράσεων διαφορετικών μεγεθών. Την επόμενη σχολική χρονιά οι μαθητές των ίδιων τμημάτων συμμετείχαν σε μια δραστηριότητα κατασκευής δυναμικού χάρτη (στο εξής η δραστηριότητα αυτή θα αναφέρεται ως ΚΔΧ) που θα αναπαριστούσε μέρος του χώρου του σχολείου (κάθε ομάδα κατασκεύαζε μία ή δύο κατόψεις κτηρίων) κατόπιν μετρήσεων των ίδιων των μαθητών στο χώρο αυτό. Στόχος της κατασκευής ήταν η δημιουργία χάρτη ο οποίος θα επέτρεπε τη δυναμική αλλαγή της κλίμακας χωρίς να αλλοιώνονται οι χωρικές σχέσεις των κτηρίων. Στα πλαίσια της δραστηριότητας ΚΔΓ κάθε ομάδα ανέλαβε την κατασκευή δύο γραμμάτων, ενώ σε επόμενο στάδιο οι ομάδες αντάλλαξαν τα γράμματά τους με σκοπό τη δοκιμή της συμμεταβολής τους κατά την ταυτόχρονη αυξομείωσή τους. Αντίστοιχα, η δραστηριότητα ΚΔΧ προέβλεπε ότι η κατασκευή των τελικών χαρτών όλων των ομάδων θα προέκυπτε από την ένωση των μερών των χαρτών που θα αντάλασσαν οι ομάδες ανά δύο, καθώς κάθε ομάδα γνώριζε εκ των προτέρων ότι θα ενώσει το χάρτη της με αυτόν της διπλανής της ομάδας. Οι δραστηριότητες προέβλεπαν την εμπλοκή των παιδιών στο εννοιολογικό πεδίο λόγου και αναλογίας χωρίς άμεση αναφορά σε αυτό, αλλά αποδίδοντας έμφαση στην διαπλοκή στόχου και χρήσης (Ainley & Pratt, 2002) των γεωμετρικών κατασκευών. Για την κατασκευή χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού Logo έτσι όπως έχει υλοποιηθεί στο Χελωνόκοσμο (Αβάκιο) (<http://E-slate.cti.gr>, για τα χαρακτηριστικά του Αβακίου βλ. Kynigos, 2004). Τρία είναι τα χαρακτηριστικά αυτού του υπολογιστικού περιβάλλοντος που ενδιαφέρουν εδώ: (α) η άμεση και δυναμική σύνδεση της συμβολικής έκφρασης (γλώσσα προγραμματισμού) με το γραφικό αποτέλεσμα (β) η δυνατότητα αριθμητικής και γραφικής αναπαράστασης των μεταβαλλόμενων μεγεθών και (γ) ο δυναμικός χειρισμός των αριθμητικών τιμών κάθε μεταβαλλόμενου μεγέθους -και κατ' επέκταση της γραφικής τους αναπαράστασης- με τη χρήση ενός ειδικού εργαλείου δυναμικού χειρισμού που λέγεται μεταβολέας.

Για να γίνει κατανοητή η έννοια της μετάβασης από τη μία στρατηγική στην άλλη, χρειάζεται να αναφερθούν ορισμένα στοιχεία σχετικά με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κατασκευής έτσι όπως αυτή προσδιορίστηκε από τη

χρήση του εργαλείου. Ειδικότερα, τόσο τα γράμματα όσο και οι χάρτες ζητήθηκε από τα παιδιά να αυξομειώνονται καθώς τα μεν γράμματα θα έπρεπε να αλλάζουν με τον ίδιο τρόπο όταν τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο, οι δε χάρτες θα έπρεπε να αυξομειώνονται χωρίς να αλλοιώνονται οι χωρικές τους σχέσεις (πλευρές κτηρίων, αποστάσεις κ.λπ.) κατά την αλλαγή. Έτσι, ζητήθηκε από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν στις κατασκευές τους όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές, με απώτερο στόχο τη χρήση μιας μεταβλητής, μέσω της αλλαγής της οποίας να επιτυγχάνεται η ζητούμενη αυξομείωση. Στο σχήμα 1, για παράδειγμα, η κατασκευή ενός αυξομειούμενου Γ επιτυγχάνεται με την πολλαπλασιαστική έκφραση (π.χ.  $\chi/3$ ) της μεταβλητής  $\psi$  του οριζώντιου μήκους σε σχέση με τη μεταβλητή  $\chi$  του κατακόρυφου μήκους.



Σχήμα 1. Το γράμμα Γ και η κάτοψη ενός κτηρίου με 2 και 12 μεταβλητές αντίστοιχα.

## ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η βασισμένη στα δεδομένα ανάλυση (Strauss & Corbin, 1998) ανέδειξε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις τα παιδιά ξεκινούσαν με την κατασκευή ενός σταθερού σχήματος (πρότυπο), το οποίο επιχειρούσαν να αυξομειώσουν στη συνέχεια με τη χρήση μεταβλητών. Μια στρατηγική θεωρήθηκε αναλογική όταν τα παιδιά, κατά τη διαδικασία ανταλλαγής των εργασιών τους με άλλες ομάδες, είχαν κατασκευάσει αυξομειούμενη κατασκευή με μία μεταβλητή χρησιμοποιώντας τουλάχιστον μία πολλαπλασιαστική συναρτησιακή σχέση (βλ. Ψυχάρης, 2005). Η επιλογή του συγκεκριμένου κριτηρίου λειτουργήσε ως σημείο σύγκλισης του πριν και του μετά μιας κατασκευής, καθώς στάθηκε η αφετηρία για την εξέταση της κατασκευαστικής πορείας 'προς τα πίσω' και 'προς τα μπρος'. Στην πρώτη περίπτωση αναζητήθηκαν τα κατασκευαστικά στάδια που οδήγησαν σε μια συγκεκριμένη κατασκευή και οι παράγοντες της επιρροής τους, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η διαδικασία εξέλιξης -ή μη- μιας στρατηγικής μετά την επαφή των παιδιών με την εργασία άλλων ομάδων. Για παράδειγμα, κατά τη μετάβαση από το πρότυπο στα δυναμικά μεταβαλλόμενα σχήματα παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις ως προς τον τρόπο αντιστοίχισης τιμών και μεταβλητών που με τη σειρά τους χαρακτήρισαν τις αντίστοιχες στρατηγικές. Ειδικότερα, στη δραστηριότητα ΚΔΧ οι μαθητές προχώρησαν από την κατασκευή προτύπου στη χρήση πολλών μεταβλητών και στο τέλος στη χρήση μίας μεταβλητής (Yiannoutsou & Kynigos, 2004). Αντίθετα, στη δραστηριότητα ΚΔΓ καταγράφηκε ευρύτατα μια ακόμη στρατηγική που ακο-

λούθησε την κατασκευή προτύπου: η –λανθασμένη- αντιστοίχιση της ίδιας μεταβλητής σε όλα τα μεγέθη μιας κατασκευής χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι μεταξύ τους σχέσεις. Η παρατήρηση αυτή έστρεψε το ερευνητικό ενδιαφέρον στα στοιχεία εκείνα που συντελούν στη διαμόρφωση των συνθηκών μετάβασης από τη μία στρατηγική στην άλλη και στο σκοπό που εξυπηρετεί η χρήση της κάθε στρατηγικής. Χρησιμοποιούμε τον όρο *έναυσμα μετάβασης* για να περιγράψουμε το κίνητρο της μετάβασης των παιδιών από μια στρατηγική σε μια άλλη. Το συγκεκριμένο κίνητρο στην ανάλυση θεωρήθηκε αντιπροσωπευτικό στοιχείο των συνθηκών της κατάστασης στην οποία ανέκυψε και αναλύεται τόσο σε επίπεδο χρήσης εργαλείων όσο και σε επίπεδο κατασκευής νοημάτων από τους μαθητές.

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### Η γλώσσα προγραμματισμού ως έναυσμα μετάβασης

Η διαμόρφωση πολλαπλασιαστικών σχέσεων από τα παιδιά διασυνδέθηκε με διαδικασίες μεταβολής του αριθμού των χρησιμοποιούμενων μεταβλητών κατά την προσπάθεια τους να κατασκευάσουν γράμματα ή κτήρια τα οποία να αυξομειώνονται χωρίς να αλλοιώνεται το σχήμα τους. Το ερώτημα που διερευνάται εδώ, είναι με ποιο τρόπο οι μαθητές μεταβαίνουν από τη χρήση πολλών μεταβλητών σε μία και ποιο είναι το στοιχείο που ενεργοποιεί αυτή τη μετάβαση. Σε μια κατασκευή του νι (N) οι εναλλαγές στη μεταβολή του αριθμού των χρησιμοποιούμενων μεταβλητών (βλ. διαδικασίες κατασκευής σε γλώσσα Logo, Πίνακας 1) αποτέλεσαν μέρος της εξοικείωσης των παιδιών με το υπολογιστικό περιβάλλον αλλά και τον άξονα της ανάπτυξης στρατηγικών. Μετά την κατασκευή προτύπου (Φάση 1) τα παιδιά χρησιμοποίησαν την ίδια μεταβλητή για όλα τα μεγέθη της κατασκευής (Φάση 2) θεωρώντας, ενδεχομένως, ότι με αυτό τον τρόπο υλοποιούν την απαίτηση της δραστηριότητας ΚΔΓ για κατασκευή αυξομειούμενου γράμματος με μια μεταβλητή. Το έναυσμα μετάβασης από τη Φάση 2 στη Φάση 3 διασυνδέθηκε με το χάλασμα του σχήματος κατά τη μετακίνηση του μοναδικού μεταβολέα.

*E* Για μεγάλωσέ τη. Τι έγινε τώρα; Έγινε νι;

*M1* Όχι.

*E* Γιατί δεν έγινε νι;

[Ο *M1* βάζει νέα μεταβλητή για

*M1* Πρέπει να αλλάξει κι αυτό [ενν. το πλάγιο].

το πλάγιο τμήμα.]

Η έλλειψη γραφικής αρτιότητας στο νι λειτουργεί ως κίνητρο χρήσης δεύτερης μεταβλητής, σηματοδοτώντας έτσι την εμπλοκή των παιδιών στη διαδικασία ταυτόχρονης αλλαγής και των δύο μεταβλητών μέσω των αντίστοιχων μεταβολών για τη σχεδίαση μοντέλων του νι διαφορετικών μεγεθών. Η αυξομειούμενη κατασκευή ανέκυψε μέσα από μεταφράσεις της διαισθητικής εικασίας ‘το πλάγιο είναι μιάμιση φορά το κατακόρυφο’ (Φάση 4) και επακόλουθες δοκιμές ακριβέστερων προσεγγίσεων του πολλαπλασιαστικού παράγοντα, που οδήγησαν στην τροποποίηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης στην τελική κατασκευή (Φάση 5).

**Πίνακας 1.** Οι διαδικασίες του νι σε διαδοχικές φάσεις τις κατασκευής.

για νι μ 200 δ 145 μ 240 α 145 μ 200 τελος	για νι :ρ μ :ρ δ 145 μ :ρ α 145 μ :ρ τελος	για νι :ρ :τ μ :ρ δ 145 μ :τ α 145 μ :ρ τελος	για νι :ρ μ :ρ δ 145 μ 1,5* :ρ α 145 μ :ρ τελος	για νι :ρ μ :ρ δ 145 μ 1,41* :ρ α 145 μ :ρ τελος
Φάση 1	Φάση 2	Φάση 3	Φάση 4	Φάση 5

Από εννοιολογική σκοπιά η μετάβαση στη Φάση 2 μπορεί να ειπωθεί ως το ‘ενδιάμεσο μονοπάτι’ που οδήγησε στην ανάδειξη της αλληλεξάρτησης των δύο μεγεθών, βήμα απαραίτητο για την περαιτέρω συσχέτισή τους. Στην περίπτωση της δραστηριότητας ΚΔΧ, η μετάβαση στην πολλαπλασιαστική στρατηγική είχε συνήθως ως αφετηρία τη χρήση πολλών διαφορετικών μεταβλητών (μια για κάθε σταθερή τιμή του προτύπου του κτηρίου), όπως φαίνεται στο απόσπασμα που ακολουθεί.

- 1 M1 Χρειαζόμαστε πολλές μεταβλητές. Μία μεταβλητή γι’ αυτή την τιμή (δείχνει
- 2 τον κώδικα στον υπολογιστή) μία γι’ αυτή μία, δύο, τρεις, (μετράει τις μεταβλ)
- 3 M2 Όχι, αυτή και αυτή θα είναι ίδιες. Θα έχουν την ίδια τιμή.
- 4 M1 Α, δες, μπορούμε, αφού το 50 είναι χι, το 100 είναι δύο χι, το 150 τρία χι.
- 5 M2 Ναι, μπορούμε να το φτιάξουμε όλο με μία μεταβλητή. Δεν τις θέλουμε όλες.

Ο εντοπισμός της ισότητας μεταξύ συγκεκριμένων σταθερών τιμών του προτύπου και η αναγνώριση της δυνατότητας χρήσης της ίδιας μεταβλητής (γραμμή 3) φαίνεται να αποτελούν το έναυσμα για την ανάπτυξη της διαδικασίας πολλαπλασιαστικής συσχέτισης όλων των μεταβλητών της κατασκευής. Στη διαδικασία αυτή καθοριστικό ρόλο φαίνεται να παίζει η δυνατότητα κατασκευής και ανακατασκευής του σχήματος μέσα από διαδικασίες αντικατάστασης των σταθερών τιμών του προτύπου με μεταβλητές αλλά και με σχέσεις μεταβλητών. Η συναρτησιακή έκφραση των αναδυόμενων σχέσεων στην προγραμματιστική γλώσσα, παρότι βασίζεται στη συσχέτιση σταθερών τιμών (γραμμή 4), γενικεύεται πολλαπλασιαστικά με τη δυνατότητα χρήσης μεταβλητών (π.χ. αν η μία μεταβλητή είναι χ και αντιστοιχεί στην τιμή 50 η άλλη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην τιμή 100 μπορεί να εκφραστεί ως 2χ). Το σύνολο των παραπάνω χαρακτηριστικών φαίνεται να δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα δυναμικής διασύνδεσης του συγκεκριμένου με το γενικό, όπως και την περιγραφή των χωρικών σχέσεων μέσα από τη συσχέτιση μεταβλητών.

### Ο σχεδιασμός των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων ως έναυσμα μετάβασης

Σε άλλες περιπτώσεις η ενσωμάτωση πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ των μεγεθών της κατασκευής έλαβε χώρα μέσα από την επικοινωνία των παιδιών με εργασίες συμμαθητών τους μετά από την ανταλλαγής τους. Η φάση της ανταλλαγής των εργασιών των μαθητών λειτούργησε ως ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές χρειάστηκε να αναλύσουν τις στρατηγικές των συμμαθη-

τών τους και να επανεξετάσουν τις στρατηγικές τους μέσα από επακόλουθες συγκρίσεις. Για παράδειγμα, ένα αυξομειούμενο μοντέλο του ύψιλον (Υ) είχε κατασκευαστεί πριν τη διαδικασία ανταλλαγής από μια ομάδα παιδιών με 1 προς 1 αντιστοιχία της μεταβλητής χ στα τρία τμήματα του γράμματος. Η ενσωμάτωση πολλαπλασιαστικών σχέσεων ανέκλυσε όταν τα παιδιά επιχειρήσαν -μετά την ανταλλαγή- να σχεδιάσουν το ύψιλον στην ίδια διαδικασία με το γράμμα ξι (Ξ) που δανείστηκαν από άλλη ομάδα. Το ξι είχε κατασκευαστεί με μία μεταβλητή χ που αντιστοιχούσε στα μεγάλα οριζόντια τμήματα της βάσης αλλά και στο ύψος του. Με τη χρήση του μεταβολέα επιβεβαιώθηκε από τα παιδιά και γραφικά η ανισότητα των υψών των δύο γραμμάτων, καθώς στο ύψιλον η μεταβλητή χ αντιστοιχούσε στο κατακόρυφο τμήμα και στο ξι στο συνολικό ύψος του γράμματος. Σταδιακά, η έμφαση στην αρτιότητα κάθε μεμονωμένης κατασκευής, που χαρακτήρισε την εργασία των παιδιών το προηγούμενο διάστημα, διαπλέχθηκε με τη συσχέτιση των κατασκευών μεταξύ τους με άξονα την προσέγγιση κοινού ύψους.

M1 Τα είχαμε βάλει χι δεύτερα [ενν. όλα τα μήκη του Υ].

M2 Βασικά μας έβγαине πιο μικρό [ενν. το ύψος του Υ σε σχέση με το ύψος του Ξ].

Ο M2 δικαιολογεί την απόρριψη της έκφρασης  $\chi/2$  για όλα τα τμήματα του ύψιλον αναφέροντας ως έναυσμα για τη χρήση της τη σύγκριση του συνολικού ύψους του γράμματος σε σχέση με το ύψος του ξι, που ήταν ήδη σχεδιασμένο με ξεχωριστή διαδικασία στην οθόνη. Στην τελική διαδικασία κατασκευής τα μήκη του αυξομειούμενου ύψιλον αντικαταστάθηκαν από συναρτησιακές σχέσεις ( $\chi/3$  για το κατακόρυφο,  $\chi/1,2$  για τα πλάγια) που ανέκλυσαν ως αποτέλεσμα διορθωτικών ενεργειών των παιδιών (Psycharis & Kynigos, 2004) για την προσέγγιση του επιθυμητού ύψους των δύο γραμμάτων. Στην περίπτωση της δραστηριότητας ΚΔΧ το έναυσμα για την περαιτέρω τροποποίηση της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής από μια ομάδα ανέκλυσε όταν τα παιδιά επιχειρήσαν να 'προσθέσουν' στον κώδικά τους (κτηριο1) τον κώδικα της συνεργαζόμενης ομάδας (κτηριο2).

4 M3 Όταν το κτήριο1 είναι 10, το κτήριο 2 είναι 25. Είναι το αντίθετο.

5 M4 Περίμενε, αφού το κτήριο 1 είναι 3 φορές μικρότερο από το κτήριο 2 θα διαιρέσουμε το χ με το 3.

6 M3 Όχι. Τώρα όταν το κτήριο1 είναι 10 το κτήριο2 είναι 25. Ανάποδα. Αρα,

8 το 10 στο 25 χωράει 2,5. Επομένως, τα χι στο κτήριο1 θα τα κάνουμε

9 διόμηση φορές πιο μικρά απ' ό,τι τα έχουν κάνει.

Το γραφικό αποτέλεσμα που προκύπτει στην οθόνη όταν τα παιδιά επιχειρούν να αυξομειώσουν τα δύο κτήρια μαζί έρχεται σε αντίθεση με την αντίληψή τους σχετικά με το ποια θα έπρεπε να είναι τα μεγέθη των κτηρίων και άρα οι μεταξύ τους λόγοι (1:2,5 για τον M3 και 1:3 για τον M4). Παρόλο που και για τα δύο κτήρια είχε χρησιμοποιηθεί η ίδια μεταβλητή ο M3, συγκρίνοντας τις τιμές δύο πλευρών που θεωρεί ανάλογες (γραμμές 4 και 7), γενικεύει τη συσχέτισή τους για όλα τα υπόλοιπα μεγέθη (γραμμές 8-9) και τη μεταφέρει στη γλώσσα προγραμματισμού διαιρώντας όλα τα μεταβλητά μήκη του κτηρίου2 με 2,5. Το έναυσμα για τον ακριβή καθορισμό της πολλαπλασιαστικής σχέσης αποτέλεσε (α) η αντίθεση του γραφικού αποτελέσματος με την αντίληψη των

μαθητών για τη σχέση μεγέθους των δύο κτηρίων και (β) η σύγκριση μερών των κωδίκων των δύο κτηρίων.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η συγκριτική ανάλυση των δεδομένων που προέρχονται από τις δύο παρεμφερείς δραστηριότητες κατασκευής δυναμικών σχημάτων σε δύο διαδοχικά σχολικά έτη ανέδειξε ως αντικείμενο μελέτης όχι μόνο τις κατασκευαστικές στρατηγικές των μαθητών αλλά και τη διαδικασία εξέλιξής τους και ιδιαίτερα τα εναύσματα μετάβασης από μία στρατηγική σε άλλη. Ένας από τους παράγοντες που φάνηκε να συμβάλλουν στην μετάβαση των μαθητών προς πολλαπλασιαστικές στρατηγικές ήταν τα χαρακτηριστικά της γλώσσας προγραμματισμού και ειδικότερα: η δυνατότητα περιγραφής των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τη σχέση των διαφόρων μεγεθών, η δυνατότητα συσχέτισης συγκεκριμένων τιμών με μεταβλητές αλλά κυρίως η δυνατότητα συσχέτισης των μεταβλητών μεταξύ τους. Επίσης, η φύση και οι απαιτήσεις των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων φάνηκε να δημιουργούν ένα πλαίσιο επανεξέτασης και αναδόμησης διαμορφωμένων στρατηγικών με έντονο το στοιχείο της επεξεργασίας πολλαπλασιαστικών συσχετίσεων, που εμφανίστηκε σε μεγαλύτερο βαθμό στο πλαίσιο της δραστηριότητας ΚΔΧ. Στα σχετικά επεισόδια τα εναύσματα μετάβασης των παιδιών στην πολλαπλασιαστική στρατηγική ήταν αμεσότερα εστιασμένα τόσο στη συσχέτιση των μεταβλητών όσο και στη συσχέτιση των δυναμικών σχημάτων μεταξύ τους.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ainley J., Pratt D. (2002) Purpose and utility in pedagogic task design, *Proceedings of the 26th PME Conference*, Norwich, England, Vol. 2., 17-24.
- Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1984) *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*, Academic Press, London.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculator, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 3, No. 3, pp. 195-227.
- Hoyle, C. & Noss, R. (1989) The computer as a catalyst in children's proportion strategies, *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 53-75.
- Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. K. (1983) Proportional reasoning of early adolescents, in R. Lesh, & M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Academic Press, New York.
- Kynigos, C. (2004) A "black-and-white box" approach to user empowerment with component computing, *Interactive Learning Environments*, Vol. 12, Nos. 1-2, 27-71.
- Mariotti, M.A. (2002) Influence of technologies advances on students' math learning, in L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 695-723, LEA.
- Noss, R. & Hoyle, C. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer.
- Psycharis, G. & Kynigos, C. & (2004) Normalising geometrical constructions: A context for the generation of meanings for ratio and proportion, *Proceedings of the 28th PME Conference*, Bergen, Norway, Vol. 4, 65-72.
- Sherin, B. L. (2001) A comparison of programming languages and algebraic notation as expressive languages for Physics, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6: 1-61.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1998) *Basics of Qualitative Research*, Sage Publications.

- Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985) Proportional reasoning: A review of the literature, *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Ursini, S. & Trigueros, M. (2001) A model for the uses of variable in elementary algebra, *Proceedings of the 25th PME Conference*, Vol. 4, 327-334.
- Vergnaud, G. (1983) Multiplicative structures, in R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Acad. Press, London, 127-173.
- Vygotsky, L. (1978) *Mind in Society*, Harvard University Press.
- Yiannoutsou, N. & Kynigos, C. (2004) Map construction as a context for studying the notion of variable scale, *Proceedings the 28th PME Conference*, Bergen, 4, 465-472.
- Ψυχάρης, Γ. (2005) *Ανάπτυξη νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας σε προβλήματα αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών με χρήση ειδικών εργαλείων υπολογιστικής τεχνολογίας*, Διδακτορική διατριβή, ΕΕΤ, Τμήμα ΦΠΨ, ΕΚΠΑ.