Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2006)

5ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Τα custom tools λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ως δομικός λίθος θεωρημάτων (εν δράσει) με κατάληξη στην αποδεικτική διαδικασία

Σταυρούλα Πατσιομίτου

■ ΤΑ CUSTOM TOOLS ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΔΟΜΙΚΟΣ ΛΙΘΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ (ΕΝ ΔΡΑΣΕΙ) ΜΕ ΚΑΤΑΛΗΞΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Σταυρούλα Πατσιομίτου

Καθηγήτρια Μέσης Εκπαίδευσης
Med Διδακτικής
και Μεθοδολογίας Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
linapat@math.uoa.gr

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται πως μέσα από την κατασκευή custom tool σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας(Geometer's Sketchpad version 4.06) μπορεί να επιτευχθεί η σταδιακή μετάβαση από τον έλεγχο των υποθέσεων στην εύρεση νέων σχέσεων και την τυπική απόδειξη τους. Θα παρουσιαστεί μια εφαρμογή με κατασκευή σύνθετου custom tool που περιλαμβάνει ανασχηματισμό και η εύρεση διαδικασιών που μπορούμε να εισάγουμε έννοιες του λογισμού με ευχάριστο τρόπο και μέσα από το παιχνίδι, ακόμα και σε παιδιά μικρότερης τάξης από την προβλεπόμενη στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να αποτελέσουν με την κατασκευή οικογενειών δραστηριοτήτων σε συνεχόμενες σελίδες του ίδιου αρχείου, μέσο για ανάπτυξη εικασιών και θεωρημάτων(εν δράσει) της γεωμετρίας και μέσα από την διαδικασία των μετρήσεων και την τυπική απόδειξη των σχέσεων της διασύνδεσης τους με την άλγεβρα και τον λογισμό.

Λέξεις Κλειδιά

Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας(DGS), custom tool, iteration.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εισαγωγή της τεχνολογίας των υπολογιστών στην διδασκαλία των μαθηματικών έχει επαναπροσδιορίσει την κονστρουβιστική προσέγγιση των εννοιών. Είναι γνωστό από έρευνες ότι η εισαγωγή των υπολογιστών στην διδακτική πρακτική μπορεί να επιφέρει μετασχηματισμούς στον τρόπο που δομείται μια έννοια και κατά συνέπεια στον τρόπο που οι μαθητές συμμετέχουν στις δραστηριότητες. Ο μετασχηματισμός των διδακτικών πρακτικών όμως δεν μπορεί να επιτευχθεί μόνο με την αλληλεπίδραση με το εργαλείο του υπολογιστή. Στην πραγματικότητα πρέπει να απαντήσουμε κάποια ερωτήματα όπως :

- Ποια εργαλεία είναι κατάλληλα ώστε εισαγόμενα στην διδακτική πρακτική να μεσολαβήσουν στην κατασκευή των εννοιών από την εμπειρική βάση αναγκαία για την εκμάθηση;
- Ποια πρέπει να είναι τα χαρακτηριστικά του εργαλείου για να επιτρέψουν να αναπτυχθεί η κατάλληλη εμπειρική βάση σε σχέση με την μαθηματική γνώση;

- Ποιες είναι οι απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε ο μαθητής να μπορέσει με την βοήθεια του εργαλείου να διευθύνει αποτελεσματικά την εμπειρία όσον αφορά τα μαθηματικά αντικείμενα της διδασκαλίας και έπειτα να τα χρησιμοποιήσει ως βάση για την εσωτερικοποίηση των μαθηματικών εννοιών ;
- Ποιες είναι οι απαραίτητες διαδικασίες ώστε ένα τμήμα αφηρημένης μαθηματικής γνώσης να ενσωματωθεί στο εργαλείο. Εξαρτάται αυτό από τον τύπο της δραστηριότητας;
- Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που επιτρέπουν την εξερεύνηση του εργαλείου ώστε να προκύψει παραγωγική μάθηση;

Οι δραστηριότητες μέσα σε οποιοδήποτε τομέα της εμπειρίας μπορούν να έχουν διαφορετικούς στόχους: σε αυτό το έγγραφο θα αναφερθούμε σε εκείνες που είναι σχετικές με την προσέγγιση εννοιών άλγεβρας και λογισμού μέσω θεωρημάτων (εν δράσει)(Vergnaud,G.A., 1998) της γεωμετρίας με επαναληπτική διαδικασία (iteration) κατασκευής αρχείου εντολών στο Geometer's Sketchpad που περιλαμβάνει ανασχηματισμό (reconfiguration).

ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΩΝ DGS ΩΣ ΜΕΣΟ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

***Οι υπολογιστές παρέχουν τους τρόπους και τα μαθηματικά που εμείς απλά δεν ονειρευτήκαμε τριάντα έτη πριν. Η λυδία λίθος αυτής της εμπειρίας είναι η εμπειρία του άμεσου χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων και των σχέσεων δηλ. ενός νέου εμπειρικού μαθηματικού ρεαλισμού* (Balacheff and Kaput, 1996, p. 470)**

Αναφερόμενοι σε έναν τομέα του ανθρώπινου πολιτισμού που ο δάσκαλος και οι μαθητές μπορούν να θεωρήσουν ως ομοιογενή, ένα πεδίο εμπειρίας μπορεί να οριστεί ως σύστημα τριών συνιστωσών δηλαδή το εξωτερικό πλαίσιο, το εσωτερικό πλαίσιο του μαθητή και το εσωτερικό πλαίσιο του δάσκαλου (Boero et al.,1995). Στο εξωτερικό πλαίσιο μπορούμε να συμπεριλάβουμε τα *σημειωτικά εργαλεία μεσολάβησης (συμπεριλαμβανομένων των αποσπασμάτων από τις ιστορικές πηγές που επιλέγονται από τον δάσκαλο και αποτελούν την σύνδεση της πολιτιστικής κληρονομιάς με την μαθηματική ιδέα του θεωρήματος) αλλά και τα κομμάτια της γνώσης που παρήχθησαν από τις στατικές ή δυναμικές αναπαραστάσεις*(Dreyfus, 1991). Αυτό είναι σύμφωνο με τις γενικές ιδέες για την παραγωγή των προτάσεων της γεωμετρίας και την κατασκευή των αποδείξεων που στηρίζονται στην θεωρία πραγματοποίησης (Sfard, 1991).

Μερικοί ερευνητές έχουν απαιτήσει την χρησιμοποίηση αποδείξεων για να δημιουργήσουν μια εμπειρία με νόημα σαν μέσο ενίσχυσης των αποτελεσμάτων (Hanna,1998) παρέχοντας την ευκαιρία που περιβάλλοντα όπως της δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να παρέχουν. Τα εργαλεία των υπολογιστών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κερδίσουν την πεποίθηση μέσω της οπτικοποίησης ή της εμπειρικής επαλήθευσης αλλά όπως ο De Villiers (2002) επισημαίνει οι αποδείξεις έχουν πολλαπλές λειτουργίες που μπορούν να υπερβούν την απλή επαλήθευση και που μπορούν να αναπτυχθούν σε περιβάλλον υπολογιστικό : όπως η εξήγηση (γιατί είναι αληθινό και επομένως περιλαμβάνει την συζήτηση που διευκρινίζει την πρόταση ή το αποτέλεσμα) την ανακάλυψη (εφεύρεση νέων αποτελεσμάτων) την επικοινωνία(διαπραγμάτευση της έννοιας) την διανοητική πρόκληση (η εκπλήρωση η προερχόμενη από την κατασκευή της απόδειξης) την συστηματοποίηση (οργάνωση των αποτελεσμάτων σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, εννοιών και θεωρημάτων).

Η απόδειξη οδηγεί στην ύπαρξη ενός κοινού συστήματος επικύρωσης και είναι η εξήγηση που μπορεί να γίνει αποδεκτή από την μαθηματική κοινότητα(Balachef,1987). Ο Balachef έχει προτείνει επίσης μια διάκριση ανάμεσα στην *εμπειρική(pragmatic)* απόδειξη και στην *νοητική ή εννοιολογική* απόδειξη. Οι εμπειρικές αποδείξεις είναι εκείνες που βασίζονται στην αποτελεσματική δράση που πραγματοποιείται στις αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων. Οδηγούν στην πρακτική γνώση που το θέμα μπορεί να χρησιμοποιήσει για να καθιερώσει την ισχύ μιας πρότασης. Οι νοητικές (εννοιολογικές) αποδείξεις απαιτούν αυτή την γνώση που αντανακλάται σ' αυτές και η παραγωγή τους αναγκαία προϋποθέτει την χρήση της γλώσσας που εκφράζει (αποσυνδεδεμένη από τις ενέργειες) τα αντικείμενα, τις ιδιότητές τους, και τις σχέσεις τους. Με άλλα λόγια οι εμπειρικές αποδείξεις είναι βασισμένες στην δράση, ενώ η χρήση της λειτουργικής γλώσσας (που περιλαμβάνει ένα συγκεκριμένο λεξιλόγιο και συμβολισμό) και μια νοητική εμπειρία (όπου οι πράξεις εσωτερικεύονται) χαρακτηρίζει την μετάβαση προς τις εννοιολογικές. Η μετάβαση από την εμπειρική απόδειξη στην εννοιολογική απόδειξη με κατάληξη στην μαθηματική απόδειξη περιέχει τρεις συνιστώσες : την γνώση σε επίπεδο πρακτικής, την γλώσσα ή την συνιστώσα της διατύπωσης και την συνιστώσα της επικύρωσης περιλαμβανομένων όλων των τύπων της λογικής που κρύβονται κάτω από τις παραγόμενες αποδείξεις.

Η λέξη "μαθητεία "μπορεί να θεωρηθεί με την έννοια "της πρακτικής" αλλά η εκμάθηση των μαθηματικών περιλαμβάνει περισσότερο από την πρακτική υπό την επίβλεψη. Ο Schoenfeld (1989) αναφέρεται να κάνει μαθηματικά ως πράξη της "παραγωγής αίσθησης "και οι Goldenberg, Cuoco and Mark (1998) σημειώνουν ότι εμείς πρέπει να βοηθήσουμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις μαθηματικές "συνήθειες του μυαλού". Σύμφωνα με τον Simon (1996)στην θεωρία του περί «μετασχηματιστικού συλλογισμού» το χαρακτηριστικό γνώρισμα της παρουσίας διακεκριμένων σημασιολογικά αναφορών (εξωτερικό πλαίσιο) για την εκτέλεση των συγκεκριμένων ενεργειών που επιτρέπουν την εσωτερικοποίηση του οπτικού πεδίου όπου τα δυναμικά διανοητικά πειράματα πραγματοποιούνται, είναι σύμφωνο με τη γενική θεωρία του Vygotsky σχετικά με τις διανοητικές διαδικασίες και με τα συγκεκριμένα συμπεράσματα στη λειτουργία των δυναμικών διαδικασιών ως προς την παραγωγή των υποθέσεων και την κατασκευή των αποδείξεων.

ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΑΡΧΕΙΩΝ ΕΝΤΟΛΩΝ ΣΤΑ DGS :

Κατά τη διάρκεια της προηγούμενης δεκαετίας, αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα λογισμικού γεωμετρίας όπως το Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1988) και το Cabri Geometry II (Laborde, Baulac, & Bellemain, 1988) έχουν διαδραματίσει ένα σημαντικό ρόλο στη σύγχρονη επίπεδη γεωμετρική απεικόνιση και εξερεύνηση, και τα δύο μέσα στο σχολείο και την μέση εκπαίδευση αλλά επίσης και σε έναν μικρότερο βαθμό στην μαθηματική έρευνα (Jackiw,2003) Η βασική εργαλειοθήκη των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας περιλαμβάνει εργαλεία για κατασκευή τμημάτων, κύκλων, γραμμών κ.α Τόσο το Cabri II (macros) όσο και το Sketchpad (scripts, custom tools) έχουν την προηγμένη δυνατότητα κατασκευής νέων εργαλείων (που κατασκευάζουν οποιοδήποτε μαθηματικό αντικείμενο), της προσθήκης τους στην εργαλειοθήκη και της επαναχρησιμοποίησης τους στις κατασκευές εύκολα και αποτελεσματικά. Έτσι μας επιτρέπεται να εμπλουτίσουμε το μαθηματικό λεξιλόγιο του λογισμικού με τόσες νέες διαδικασίες όσες και επιθυμούμε. Συγκεκριμένα στο Sketchpad όταν δημιουργούμε αρχεία εντολών τα ορίζουμε ως κατασκευές *που κατασκευάζουν αποτελέσματα* από *δεδομένα αντικείμενα*, ενδεχομένως χρησιμοποιώντας ενδιάμεσα *αντικείμενα κατασκευής* (Jackiw,2003). Το προκύπτον εργαλείο θα παραγάγει αντίστοιχα αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται από την εργαλειοθήκη σε οποιοδήποτε ισοδύναμο σύνολο από δεδομένα αντικείμενα. Για να δημιουργήσουμε ένα νέο εργαλείο, δημιουργούμε αρχικά τη γενική κατασκευή που θέλουμε να καθορίσουμε ως εργαλείο. Αυτή η κατασκευή θα χρησιμεύσει και ως ο "ορισμός "κατά τη δημιουργία του εργαλείου. Στο Sketchpad (version 4)για να δημιουργήσουμε την κατασκευή χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε διαθέσιμα εργαλεία και εντολές από το menu-Construct, Transform, Measure, and Graph. Η αποθήκευση στην εργαλειοθήκη μπορεί να γίνει μέσα από το Create New Tool. Το νέο εργαλείο που κατασκευάζουμε λειτουργεί πλέον αυτόματα χωρίς να πρέπει να δείξει τα ενδιάμεσα σημεία κατασκευής.

Η σημασία τους από διδακτικής πλευράς για την ανάπτυξη αφηρημένων εννοιών

Η ιδέα που περιέχεται τόσο στο Sketchpad με την κατασκευή των scripts (custom tools) όσο και στο Cabri με τα macros απεικονίζει μια προσέγγιση από τεχνολογίες όπως του"Repeat" μηχανισμού του Geometric Supposer και φυσικά των υπορουτίνων στην Logo και άλλων γλωσσών προγραμματισμού(Jackiw,2003). Μεταξύ άλλων, αυτές οι τεχνολογίες επιτρέπουν σε έναν δάσκαλο ή μαθητή την ανάπτυξη προγράμματος σπουδών για να παρέχουν ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας που έχει επεκταθεί για να περιλάβει τα εργαλεία για ένα ιδιαίτερο θέμα ή τομέα της έρευνας. Για την διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρίας πιο γενικά υπάρχει μια απαραίτητη προϋπόθεση*: Ο χρήστης του προγράμματος πρέπει να γνωρίζει τις σημαντικές γεωμετρικές οντότητες και τη διαδικασία κατασκευής με έξυπνη και αποτελεσματική χρήση των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων της οικοδόμησης με αρχεία εντολών ώστε να ωφεληθεί από την μετάβαση σε περίπλοκους στόχους της κατασκευής* (Sträßer,R.,2003).Έτσι η διαδικασία κατασκευής ενός εργαλείου οδηγεί σε ένα επίπεδο αφαιρετικών διαδικασιών. Έρευνες στην γνωστική ψυχολογία αναφέρουν ότι η γνωστική ικανότητα καθορίζεται από την χρήση των δομημένων μονάδων και των patterns γνώσης. Αυτή η ιδέα χρησιμοποιείται από τους διδακτικολόγους(Dörfler 1991;Dubinsky 1988 *στο* Kadunz G.,2002) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η αποθήκευση των πληροφοριών σε οργανωμένα συστήματα με στόχο να συγκρατηθούν από την ανθρώπινη μνήμη σχηματίζει τα chunks. *Σε ένα θέμα κατασκευής,τα αρχεία εντολών έχουν μια παρόμοια λειτουργία,ομαδοποιούν ένα αριθμό κατασκευαστικών βημάτων μέσα σε μια εντολή και οργανώνουν όλη την κατασκευή χρησιμοποιώντας γεωμετρικές εκφράσεις. Οι μακροεντολές –αρχεία εντολών επομένως βοηθούν να κατασκευαστεί μια γεωμετρική κατασκευή με την συμπύκνωση μιας πολύπλοκης ακολουθίας κατασκευαστικών βημάτων μέσα από μια απλή–ενιαία εντολή (*Kadunz G.,2002 p.76). *Περισσότερο πολύπλοκες συλλογές μακροεντολών ανοίγουν πόρτες σε γεωμετρικά θέματα απρόσιτα με παραδοσιακά εργαλεία. Συνήθως εντολές χωρίς επανάληψη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουν τις μακροεντολές. Η εντολή iteration του Geometer's Sketchpad αποτελεί μια αξιοσημείωτη εξαίρεση* (Sträßer,R.,2003). Ιστορικά για πολλούς δασκάλους μαθηματικών το scripting θεωρήθηκε ένα μάθημα για προχωρημένους. Παρ΄όλα αυτά το scripting είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στον προγραμματισμό ακόμα και για μη recursive διαδικασίες. Τα scripts αναπαριστούν μια αφαιρετική διαδικασία της εργασίας και επομένως ως «αφαιρετικά» εργαλεία απαιτούν ένα υψηλότερο επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης από ότι τα υπόλοιπα εργαλεία των sketches. Όπως αναφέρουν οι Jackiw&Sinclair(2004) *Τα custom tools σου επιτρέπουν να ενθυλακώσεις κατασκευές (encapsulate constructions) μέσα σε νέες εντολές όπως και να δημιουργήσεις ολόκληρο μικρόκοσμο με δικά σου εργαλεία.. Εσωτερικά στο πρόγραμμα και κρυφά από τον χρήστη ένας μακρό-αποσυμπιεστής θα αντικαταστήσει το σημαίνον με την αρχική ακολουθία εντολών όταν αυτό καλείται να επαναληφθεί(*Kadunz G.,2002 p.73*)* Αν και τα scripts ή τα sketches περιγράφουν το ίδιο φαινόμενο,(*μια κατασκευή από διαφορετικές θέσεις*), τα scripts που λειτουργούν σαν μακροεντολές ή υπορουτίνες, είναι ανεκτίμητοι βοηθοί στην κατασκευαστική διαδικασία.

ITERATION ΣΤΟ GEOMETER'S SKETCHPAD

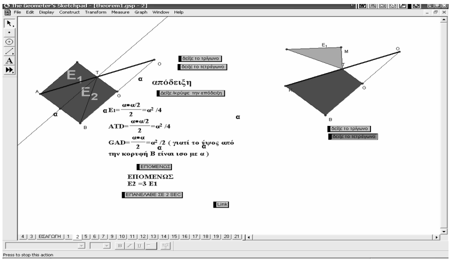
Στην περίπτωση μιας εικόνας που ορίζεται μέσω του εαυτού της θεωρητικά φαίνεται ότι η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές. Η έκφραση στα Μαθηματικά μέσω αναδρομικών τύπων οδηγεί στην σύλληψη μια πτυχής της έννοιας του απείρου. Στην πράξη υπάρχει βέβαια μια συνθήκη ολοκλήρωσης (περάτωσης) της διαδικασίας σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Η επανάληψη (iteration) εμφανίζεται στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, από τις απλούστερες αριθμητικές διαδικασίες (όπως την μέτρηση) στις πολύ πρόσφατες ιδέες για fractals και το χάος. *Η διαδικασία iteration μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους όπως η προσέγγιση κατά συμπερασμό (Extrapolation) υπολογισμοί σε βάθος, επαυξητικές προσεγγίσεις(Incremental Approximation)αλλά και διαιρέσεις του προβλήματος σε μικρά τμήματα που μπορούν να λυθούν (Divide & Conquer!). Η επαναλαμβανόμενη φύση της διαδικασίας iteration την καθιστά έτσι κατάλληλη για διαφορετικά πλαίσια και στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος*(Jackiw,Sinclair,2004). Το πιο σημαντικό είναι ότι με τη διαδικασία iteration οι μετρήσεις επαναλαμβάνονται οργανωμένες,πινακοποιημένες και με δυναμική σύνδεση με το σχήμα. Η διαδικασία όπως εξελίσσεται οδηγεί τους μαθητές διαφορετικών σχολικών επιπέδων στην κατανόηση εννοιών του λογισμού όπως το όριο και η ακολουθία(Πατσιομίτου,2005).

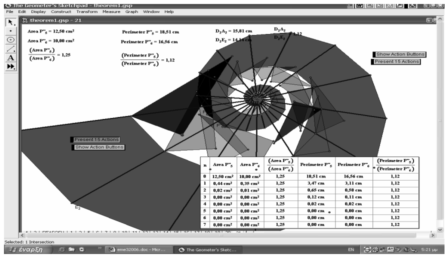
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Στη συνέχεια του παρόντος εγγράφου θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα οικογένειας δραστηριοτήτων, με κατασκευή custom tool ως δομικού λίθου κατάλληλου για την οικοδόμηση εννοιών, σε διαδοχικές σελίδες του ίδιου αρχείου, και το οποίο διατηρεί την ιδιότητα της αρχικής κατασκευής (δηλ. διατήρηση των αναλογιών των μερών του εμβαδών, του ανασχηματισμού με κίνηση, των μετρήσεων). Η κατασκευή custom tool αν και γίνεται από τον ερευνητή, έχει στόχο την εύρεση ισοδυναμιών από τους μαθητές μεταξύ των εμβαδών με τον μετασχηματισμό και την ανασύνθεση νέων σχημάτων. Στην συνέχεια η ολοκλήρωση της διαδικασίας σαν «ζωντανή ενότητα» βιβλίου, με την κατασκευή των τύπων των αποδείξεων και των patterns. Η χρήση της επαναληπτικής διαδικασίας iteration με τις *πινακοποιημένες δυναμικές μετρήσεις, μπορεί να αποτελέσει για τους μαθητές το μέσο με το οποίο μπορούμε να εισάγουμε έννοιες του λογισμού με ευχάριστο τρόπο και μέσα από το παιχνίδι.* Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εμπειρικά ακόμα και σε παιδιά μικρότερης τάξης από την προβλεπόμενη στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών. Για την κατασκευή της δραστηριότητας επιλέχθηκε το Geometer's Sketchpad 4.06 ως καταλληλότερο για την επαναληπτική διαδικασία iteration, και πινακοποίηση των δυναμικών μετρήσεων.

Περιγραφή των δραστηριοτήτων

Κατασκευάζουμε νέο αρχείο με το σχήμα ενός ορθογώνιου τρίγωνου($B=90^{O}$)του οποίου η μια κάθετη πλευρά ΒΟ είναι διπλάσια της άλλης κάθετης ΑΒ. Συνδέουμε τα μέσα της υποτείνουσας και της ΒΟ αντίστοιχα.





Σχήμα 1. Κατασκευή custom tool. **Σχήμα 2.** Εφαρμογή custom tool.

Με χρήση του rotation και του edit –action button -movement μετακινούμε την κορυφή Ο ώστε να συμπέσει με την κορυφή Α και το τρίγωνο E_1 να ενωθεί με το τραπέζιο E_2(σχήμα 1). Εύκολα οι μαθητές μπορούν να διαπιστώσουν ότι ο λόγος των εμβαδών E_2 (του τραπεζίου), και E_1(του τριγώνου) είναι 3/1 και μετασχηματιζόμενο είναι τετράγωνο. Στην συνέχεια η κατασκευή custom tool το οποίο επαναλαμβάνει την διαδικασία που περιγράψαμε δηλαδή την μετακίνηση του ορθογώνιου τρίγωνου με περιστροφή και την συνένωση για σχηματισμό τετράγωνου οδηγεί τους μαθητές σε διατύπωση εικασιών. Οι μαθητές αναμένεται να πειραματιστούν, να εξετάσουν την σχέση των εμβαδών των διαδοχικών ορθογωνίων τριγώνων μεταξύ τους, ακόμα τη σχέση των υποτεινουσών των τριγώνων,των περιμέτρων. Η επαναληπτική διαδικασία με χρήση του custom tool στο λογισμικό οδηγεί στην επινόηση και εξερεύνηση σχημάτων και σχέσεων που είναι δύσκολο οι μαθητές να ανακαλύψουν με στατικά μέσα(σχήμα 2). Η χρήση της διαδικασίας iteration με την κατασκευή fractal, αλλά και των πινακοποιημένων δυναμικών μετρήσεων, μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη patterns που στόχο έχουν την ανάπτυξη θεωρημάτων (εν δράσει) της γεωμετρίας. Από την άποψη του θεωρητικού πλαισίου μπορούμε να πούμε ότι οι βασισμένες στο Sketchpad δραστηριότητες φαίνονται να ευνοούν την παραγωγή κατάλληλων εννοιών για μαθηματικά αντικείμενα τις σχέσεις τους,αλλά και τις επεκτάσεις τους. Διαπιστώνουμε ότι μια σημαντική δραστηριότητα στην ερμηνεία ενός σχήματος με στόχο την ανακάλυψη εικασιών και συναγωγή της απόδειξης είναι αυτή της ανασυγκρότησης των στοιχείων του σχήματος αυτό που ο Duval (1995) καλεί **reconfiguration** (ανασχηματισμό).Το Sketchpad έχει αυτή την δυνατότητα και αυτός είναι ένας τρόπος που μπορούν οι μαθητές να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των εννοιών. Με την ανάπτυξη της ιδιότητας της λειτουργικής γλώσσας αλλά και του ανασχηματισμού, το περιβάλλον βοηθά στην ανάπτυξη σημαντικής γνώσης αλλά και την μετάβαση προς τον παραγωγικό συλλογισμό και κατανόηση των μαθηματικών αποδείξεων. Οι γεωμετρικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν μέσω του λογισμικού την οπτική επεξεργασία και την χρήση της συμβολικής γλώσσας επιτρέποντας έτσι την άμεση πρόσβαση στους *συγκεκριμένους τύπους αφηρημένων οντοτήτων(*Laborde,C.; Laborde, J. M (1995) και την ανάπτυξη της φαινομενολογικής γνώσης των μαθηματικών αντικειμένων **με πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα** από των στατικών μέσων. Το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας με την χρήση γεωμετρικών μοντέλων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν δυναμικά νοητικά μοντέλα σκεπτόμενοι πάνω στα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητες τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

http://www.keypress.com/sketchpad/general_ recourses

www.math.ca/Reunions/FCEM2003/proceedings/grp 5e.pdf

Balacheff, N.. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A.J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-50 1).Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Balacheff, N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176

Boero, Paolo *et al.*: 1995, *'Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School'*, Proc. of PME-XIX, Recife

Dreyfus T.: 1991, *'On the Status of Visual Reasoning in Mathematics..'*,Proc. of PME-XV

Nicholas Jackiw(2003) Visualizing Complex Functions with The Geometer's Sketchpad *Proceedings ofthe 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* 291-299 (Volos, Greece: University of Thessaly.)

Jackiw, N. (1988-97). *The Geometer's Sketchpad* (Software; various versions).Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Jackiw, Nick.(2001) The Geometer's Sketchpad (Version 4.0) [Computer software]. Emeryville, CA:KCP Technologies, Inc

N. Jackiw, N. Sinclair (2004*) Iteration and Dynamic Geometry: Beyond Common Fractals with The Geometer's Sketchpad* Session 142 NCTM Philadelphia

Kadunz, G.(2002) Macros and modules in geometry. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik* (ZDM), 34(3), 73-77.

Laborde, J-M., Baulac,Y., & Bellemain, F. (1988-97). *Cabri Géomètre*(Software, various versions). Grenoble, France: IMAG-CNRS, UniversiteJoseph Fourier.

Laborde, C.; Laborde, J. M. (1995) What about a learning environment where Euclidian concepts are manipulated with a mouse? In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. D. Edwards,*Computers and Exploratory Learning*, Springer-Verlag, Germany

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A. & Mark, 1. (1998). A role for geometry in general education. InR. Lehrer & D. Chazan (Eds-), *Designing learning environments for developing of geometry and space* (p p. 3-44). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissagesintellectuels*. Peter Lang, France

Schoenfeld. A. H. (1989). Problem solving in context(s). In R. 1. Charles & E. A. Silver (Eds.),*The teaching and assessing of mathematical problem solving*, volume 3 (pp. 83-91).Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Simon M.:1996, 'Beyond inductive and deductive reasoning', Ed. Studies in Math

Sfard A.:1991, *'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin'*, Ed. Studies in Math.

Sträßer, R**.** Macros and Proofs(2003) : Dynamical Geometry Software as an Instrument to Learn Mathematics*(*vol8)*Proceedings of 11th International Conference on Artificial Intelligence in Education, Sydney Australia*

Hanna, G. (1998) Proof as understanding in geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20(2&3), p.4–13.

de Villiers, M. (2002) An alternative approach to proof in dynamic geometry, in R. Lehrer and D.Chazan (eds) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometryand Space, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J., pp. 369–393.

Vergnaud, G. A. (1998). Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematics Behavior,* vol. 17, no. 2, pp. 167-181.

Vygotsky L. S.:1978, *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press

Πατσιομίτου Στ.(2005) Τα fractals ως πλαίσιο κατανόησης ακολουθίας και ορίων σε περιβάλλον δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων *(Πρακτικά Συνεδρίου ΕΜΕ, Λαμία)*