

## Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2006)

5ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»



**Στοιχεία Θεμελιώσεων Υπολογιστικών Μηχανών  
για το Γυμνάσιο και το Λύκειο**

*Παύλος Γ. Σπυράκης*

### Βιβλιογραφική αναφορά:

Σπυράκης Π. Γ. (2026). Στοιχεία Θεμελιώσεων Υπολογιστικών Μηχανών για το Γυμνάσιο και το Λύκειο. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση, 1*, 258–262. ανακτήθηκε από <https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/9110>

## ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

### Ένταξη των Τ.Π.Ε. στην διδασκαλία και τη μάθηση

)

#### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΚΑΙ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

##### Πάυλος Γ. Σπυράκης

(google: Paul Spirakis)

Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών  
(EAITY)

Spirakis@cti.gr

##### Περίληψη

Η εργασία αυτή προτείνει την εισαγωγή Μαθηματικών Θεμελιώσεων των Υπολογιστικών Μηχανών στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Θεωρούμε απαραίτητη κυρίως την εισαγωγή εννοιών Τυπικών Γλωσσών και πεπερασμένων Αυτομάτων.

Η Θεμελίωση αυτή απουσιάζει (και από τους Εκπαιδευτικούς) αλλά είναι απαραίτητη για την διαχρονική και ισόρροπη ανάπτυξη εννοιών της Νέας Επιστήμης των Υπολογιστών.

##### Λέξεις Κλειδιά

Αυτόματα, τυπικές γλώσσες, συμβολοεπεξεργασία.

##### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σημερινή εικόνα της διδακτέας ύλης Πληροφορικής στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση δεν είναι πλήρης. Η διδακτέα ύλη έχει ένα μεγάλο μέρος καθαρά περιγραφικό (της «τρέχουσας» τεχνολογίας και άρα διαρκώς παρωχημένο) ενώ στην Γ' Λυκείου επιχειρείται μια συμπυκνωμένη και ταχεία εισαγωγή σε Αλγοριθμικές Έννοιες, κυρίως με σκοπό την δυνατότητα γραπτών ασκήσεων «σκέψης» για τις Εισαγωγικές εξετάσεις. Οι αλγοριθμικές έννοιες και πρακτικές είναι βεβαίως (μαζί με στοιχεία Δομών Δεδομένων) η πεμπτουσία της Επιστήμης των Υπολογιστών. Όμως, διδάσκονται κυριολεκτικά την τελευταία στιγμή και μόνον για όσους επιλέγουν Τεχνολογική Κατεύθυνση. Σε αντίθεση, έννοιες κλασικών Μαθηματικών και Γεωμετρίας διδάσκονται σε όλο το Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Παραδόξως, ενώ υπάρχει σήμερα μια γενικώς παραδεκτή μαθηματική θεμελίωση των Υπολογιστών, τέτοιες έννοιες δεν διδάσκονται. Αυτό οφείλεται σε Ιστορικούς λόγους μέρος των οποίων είναι η έλλειψη της σχετικής Παιδείας στους εκπαιδευτικούς και δή στους Μαθηματικούς. Λόγω της έλλειψης αυτής, ενώ ο μαθητής μπορεί να αισθανθεί άμεσα την χαρά π.χ. της επίλυσης

μιας Γεωμετρικής Άσκησης, αυτό δεν γίνεται όσον αφορά την Πληροφορική. Η άμεση επίτευξη μιας λύσης (όπως λέγει και ο Polya) όχι μόνον ακονίζει τον νου αλλά δίνει στον λύτη την ικανοποίηση της εύρεσης της λύσης.

Η παροχή της δυνατότητας «λύσης ασκήσεων» στον μαθητή είναι συνεπώς βασική διδακτική πρακτική. Υπάρχει στα Μαθηματικά, αλλά και την Φυσική, ακόμα και στην Χημεία (όσον αφορά τις λεγόμενες Θετικές Επιστήμες) ενώ απουσιάζει από την Πληροφορική.

Αυτή η άγνοια οδηγεί τον μαθητή στην λανθασμένη αντίληψη ότι η Πληροφορική είναι μία παράθεση τεχνικών εννοιών χωρίς επιστημονική θεμελίωση. Η θέση του άρθρου μας είναι ότι το κενό αυτό μπορεί να καλυφθεί με Στοιχεία Θεμελιώσεων Υπολογιστικών Μηχανών.

## ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ

Παλαιότερα, η διδακτέα ύλη του Γυμνασίου και Λυκείου είχε στοιχεία Διάκριτων Μαθηματικών χωρίς να τα κατονομάζει. Αυτά ήταν (π.χ. η μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής, κάποια στοιχεία Συνόλων και η ύλη των ακολουθιών (όχι των ορίων τους όμως). Βεβαίως κάποιες βασικές έννοιες Διάκριτων Μαθηματικών λείπουν τελείως (π.χ. η έννοια του Γράφου) ενώ και σήμερα εμφανίζονται «ατάκτως τοποθετημένα» ψήγματα συνδυαστικής, Πιθανοτήτων, και Θεωρίας αριθμών. Όμως εδώ θα αναφερθώ στην έλλειψη και ανάγκη εισαγωγής εννοιών που δεν είναι τίποτα από τα προαναφερθέντα: απλά, θα αναφερθώ σε έννοιες τυπικών αυτομάτων και τυπικών γλωσσών που είναι ο **κύριος άξονας** της Θεμελίωσης της Πληροφορικής.

Από τα προαναφερθέντα, απαραίτητες προϋποθέσεις είναι κάποια στοιχεία συνόλων και η μαθηματική Επαγωγή. Επί της ουσίας προτείνω να διδάσκονται οι μαθητές έννοιες απλών Αφηρημένων υπολογιστικών μηχανών. Έτσι, όχι μόνο επιτυγχάνεται μια ορθή και διαχρονική Θεμελίωση αλλά εμμέσως (πλην σαφώς) τίθενται και οι πρώτες έννοιες του Προγραμματισμού.

## ΑΛΦΑΒΗΤΑ ΚΑΙ ΓΛΩΣΣΕΣ

Ένα **αλφάβητο**,  $\Sigma$ , είναι ένα περασμένο σύνολο **συμβόλων**. Π.χ. το δυαδικό αλφάβητο  $\{0,1\}$ , το Ελληνικό  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega\}$  κλπ.

Μία **λέξη** παραγόμενη από ένα αλφάβητο είναι μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του αλφαβήτου.

Π.χ. τα 0000, 0111, 111 είναι λέξεις του Δυαδικού αλφαβήτου. Είναι σημαντικό να ορίσουμε την «άδεια λέξη» ως την λέξη που δεν έχει κανένα σύμβολο. Ας την συμβολίσουμε με το γράμμα  $e$ . Το μήκος μιας λέξης είναι ο αριθμός των γραμμάτων του αλφαβήτου σε αυτήν.

Έτσι, π.χ.

το μήκος ( $e$ ) = 0

ενώ το μήκος (1011) = 4.

Βλέπουμε εδώ ότι ένα οποιοδήποτε σύμβολο ενός αλφαβήτου, μπορεί να εμφανισθεί πολλές φορές σε μια λέξη. Εν γένει, αν συμβολίσουμε με  $\Sigma^*$  το σύνολο όλων των λέξεων που μπορούν να παραχθούν από ένα αλφάβητο, τότε μια **Γλώσσα**  $L$  είναι ένα (μη κενό) υποσύνολο του  $\Sigma^*$ .

Έτσι, π.χ. το σύνολο  
 $L = \{e, 1, 11, 111, 1111\}$  είναι μια γλώσσα επί του αλφαβήτου  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

Η **συγκόλληση** δυο λέξεων  $x, y$  επί του  $\Sigma$  είναι απλά η λέξη  $xy$ .  
 Η συγκόλληση είναι μια πράξη που κολλά τις δυο λέξεις στη σειρά.  
 Ας την συμβολίσουμε με το σύμβολο «ο» (ανάλογα με το +).

Έτσι, για το αλφάβητο  $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega\}$   
 έχουμε

μαρια ο καλή = μαριακαλη .

Γενικά  $χογ$  μας δίνει την λέξη  $xy$ .

Έστω τώρα ότι με το γράμμα  $S$  συμβολίζουμε «κάποια λέξη μιας γλώσσας»  
 και με το γράμμα  $M$  την έννοια «μεσαίο μέρος λέξης».

Ας θεωρήσουμε τον συμβολισμό  $S \rightarrow aMw$

Αυτός είναι ένα **γραμματικός κανόνας** όπου η τυχούσα λέξη  $S$  είναι ένα  
 «α», ακολουθούμενο από ένα μεσαίο μέρος  $M$  και τελειώνει σε ένα  $w$ . Το βέλος  
 « $\rightarrow$ » διαβάζεται ως «παράγει» ή «μπορεί να είναι».

Έστω τώρα και οι κανόνες

$$M \rightarrow e$$

$$M \rightarrow \pi M$$

μαζί με τον κανόνα  $S \rightarrow aMw$  .

Είναι προφανές ότι οι παραγόμενες λέξεις από τους 3 κανόνες είναι

- (1) η λέξη  $aw$
- (2) η λέξη  $a\pi w$
- (3) η λέξη  $a\pi\pi w$

και γενικά η λέξη  $a\pi\pi\dots\pi w$  (με όσα  $\pi$  θέλουμε).

Έτσι βλέπουμε ότι ένα σύνολο κανόνων «παράγει» μια γλώσσα!

Γενικά, ένα σύνολο κανόνων είναι μια **Γραμματική**.

(Το παράδειγμα μας είναι μία Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα).

Στο παράδειγμα μας τα  $S, M$  είναι «γενικά σύμβολα» που δεν ανήκουν στο  
 Ελληνικό Αλφάβητο.

Αντιθέτως, όλες οι παραγόμενες λέξεις της παραπάνω γραμματικής ανή-  
 κουν στο Ελληνικό Αλφάβητο.

Σε πόσα «στοιχειώδη βήματα» μπορούμε να φτιάξουμε την λέξη  $a\pi\pi w$ ;

**Βήμα 1:**  $S \rightarrow aMw$

**Βήμα 2:** λόγω του  $M \rightarrow \pi M$

άρα  $S \Rightarrow a\pi Mw$  ( $\Rightarrow$  = παράγει σε πολλά βήματα)

**Βήμα 3:** Λόγω του  $M \rightarrow \pi M$

Έχω  $S \Rightarrow a\pi\pi Mw$

**Βήμα 4:** Λόγω του  $M \rightarrow e$

Έχω  $S \Rightarrow a\pi\pi w$ .

Είναι φανερό ότι η γραμματική μιας

$$\Gamma = \{S \rightarrow aMw, M \rightarrow e, M \rightarrow \pi M\}$$

είναι μια «μηχανή» παραγωγής λέξεων σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Είναι επίσης φανερό ότι η λέξη  $arw$  δεν παράγεται από την «μηχανή»  $\Gamma$ .

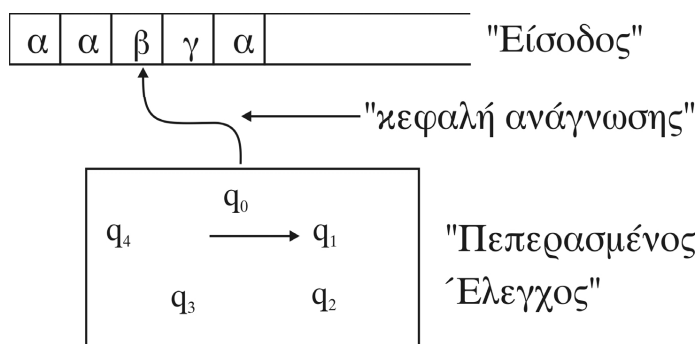
Οι έννοιες της «παραγωγής σε 1 βήμα» και σε πολλά βήματα εισάγουν τον μαθητή στην έννοια του «χρόνου υπολογισμού».

Είναι σήμερα γνωστό ότι τέτοιες Μηχανές «Συμβολομετάφρασης» είναι ισοδύναμες με οτιδήποτε μπορούμε να προγραμματίσουμε σε ένα υπολογιστή! (Αυτό ισχύει εφόσον επιτραπούν γραμματικές με συμφραζόμενα).

Επίσης, η επιλογή ενός από τους κανόνες  $M \rightarrow e, M \rightarrow \pi M$  εισάγει την έννοια του «μη ντετερμινισμού». Ο κανόνας  $M \rightarrow e$  σταματά την μηχανή, ενώ ο κανόνας  $M \rightarrow \pi M$  συνεχίζει την παραγωγή διότι αφήνει το άγνωστο σύμβολο  $M$  μέσα.

## ΑΠΛΑ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Ας θεωρήσουμε μια αφηρημένη Μηχανή που αποτελείται από 3 μέρη:



Τα μέρη αυτά είναι 1) ένα κουτί με «καταστάσεις»  $q_0, q_1, q_2$  (και ένα δείκτη της τρέχουσας κατάστασης) 2) Μια κεφαλή ανάγνωσης και 3) Μια ταινία εισόδου με κουτάκια στο καθένα από τα οποία μπορούμε να έχουμε ένα γράμμα ενός αλφαβήτου  $\Sigma$ .

**Αρχικά**, η κεφαλή ανάγνωσης δείχνει το πρώτο αριστερά γράμμα και η **αρχική κατάσταση** είναι πάντα η ίδια π.χ.  $q_0$ .

Το αυτόματο, σε «ένα βήμα»

- (α) διαβάζει το γράμμα που δείχνει η κεφαλή
- (β) πηγαίνει σε μια **νέα κατάσταση** που προσδιορίζεται από την τρέχουσα κατάσταση και το αναγνωσθέν γράμμα, και
- (γ) Η κεφαλή κινείται μια θέση δεξιά.

Έστω  $\delta(q, \sigma)$  η νέα κατάσταση της Μηχανής όταν η μηχανή, όντας στην κατάσταση  $q$  διαβάζει το γράμμα  $\sigma$ .

Είναι φανερό ότι η «λογική» της μηχανής είναι ένας πίνακας που για κάθε  $q, \sigma$  μας δίνει την νέα κατάσταση  $\delta(q, \sigma)$ .

Κάποτε, η κεφαλή του αυτόματου θα φθάσει στο τέλος της λέξης που είναι στην «ταινία» εισόδου. Τότε, το αυτόματο θα βρεθεί σε μίαν «τελική» κατάσταση  $q'$ .

Ορίζουμε ότι το αυτόματο «αποδέχεται» την λέξη εισόδου (την αναγνωρίζει) εάν η τελική του κατάσταση ανήκει σε ένα σύνολο «επιθυμητών» καταστάσεων  $F$ . Αλλιώς το αυτόματο «απορρίπτει» την λέξη.

Το σύνολο των λέξεων που ένα αυτόματο  $A$  αποδέχεται, είναι μια γλώσσα! Ορίζουμε την γλώσσα αυτή ως την γλώσσα που το αυτόματο  $A$  αναγνωρίζει.

Για να ορίσουμε ένα τέτοιο αυτόματο αρκούν 5 πράγματα:

- (1) το σύνολο καταστάσεων  $K = \{q_0, q_1, \dots\}$
- (2) Η αρχική κατάσταση  $s$  π.χ.  $s = q_0$
- (3) Το σύνολο των επιθυμητών καταστάσεων  $F \subseteq K$
- (4) Το αλφάβητο  $\Sigma$  για τις λέξεις της εισόδου
- (5) Τέλος, ο πίνακας «μετάβασης» που για κάθε κατάσταση  $q$  και σύμβολο  $\sigma$  του  $\Sigma$  μας δίνει την «επόμενη» κατάσταση  $\delta(q, \sigma)$

Π.χ. το αυτόματο  $A$

Με  $K = \{q_0, q_1\}$   
 $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$   
 $s = q_0$   
 $F = \{q_0\}$

Και τον πίνακα

$q$	$\sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$q_0$	$\alpha$	$q_0$
$q_0$	$\beta$	$q_1$
$q_1$	$\alpha$	$q_1$
$q_1$	$\beta$	$q_0$

Αυτό το αυτόματο ξαναγυρνά στην «επιθυμητή» κατάσταση  $q_0$  μόνο αν η λέξη εισόδου περιέχει άρτιο αριθμό από  $\beta$ . (γιατί;)

## Η ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΡΘΡΟΥ

Προτείνουμε την εισαγωγή εννοιών τυπικών γλωσσών, γραμματικών και αυτομάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Ο μαθητής θα μπορεί να «κατασκευάσει» τις δικές του γραμματικές και τα δικά του αυτόματα, και να συλλογισθεί σε απλές έννοιες υπολογισμού βήμα προς βήμα.

Η απαραίτητη προς τούτο διδακτέα ύλη απαιτεί μιας προσεκτικής επιλογή «προς τα κάτω» εννοιών Θεμελιώσεων των Υπολογιστών όπως π.χ. από το κλασσικό [H.R. Lewis, C.H. Papadimitriou].

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

«Elements of the Theory of Computation» H.R. Lewis, C.H. Papadimitriou, Prentice – Hall.

«Πώς να το λύσω» G. Polya (μετάφραση Χαρ. Σιαδήμα, Υπουργείο Παιδείας, Αθήνα 1964, Υψηροσία Μελετών και Συντονισμού).