

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2002)

3ο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»



Ημίτονο-Συνημίτονο: Μία Διδακτική Πρόταση Βασισμένη στη Χρήση Λογισμικού Πολλαπλών Αναπαράστασεων

Νικολέτα Σιδηρά-Ξένου

Βιβλιογραφική αναφορά:

Σιδηρά-Ξένου Ν. (2026). Ημίτονο-Συνημίτονο: Μία Διδακτική Πρόταση Βασισμένη στη Χρήση Λογισμικού Πολλαπλών Αναπαράστασεων . *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, 1, 265–274. ανακτήθηκε από <https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/8895>

Ημίτονο-Συνημίτονο: Μία Διδακτική Πρόταση Βασισμένη στη Χρήση Λογισμικού Πολλαπλών Αναπαραστάσεων

Νικολέτα Σιδηρά-Ξένου
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Φιλοσοφική Σχολή, Φ.Π.Ψ.
Αθήνα, Ελλάδα
nxenou@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η προτεινόμενη διδακτική δραστηριότητα με τον τίτλο “Γέφυρα” βασίζεται στη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης (το άνοιγμα/κλείσιμο μιας γέφυρας) και χρησιμοποιείται ως πεδίο α) για την εισαγωγή των τριγωνομετρικών αριθμών ημίτονο και συνημίτονο μέσα από τις αλγεβρικές και γεωμετρικές μεταβολές πλευρών και γωνιών ορθογωνίων τριγώνων και β) για την αξιοποίηση των τριγωνομετρικών αριθμών στη λύση προβλημάτων. Στο μαθησιακό επίκεντρο της δραστηριότητας βρίσκεται η εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες χειρισμού συναρτησιακών σχέσεων μέσα από διάφορους τρόπους αναπαράστασής τους και εύρεσης μαθηματικών σχέσεων μεταξύ συναρτησιακά μεταβαλλόμενων μεγεθών. Στο σχεδιασμό της μαθηματικής δραστηριότητας χρησιμοποιήθηκε διερευνητικό λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Ημίτονο, συνημίτονο, διδακτική δραστηριότητα, λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Σύμφωνα με το ‘ολοκληρωμένο πρότυπο’ ένταξης των Νέων Τεχνολογιών στην εκπαίδευση (Κοντογιαννοπούλου – Πολυδωρίδη, 1991,1996 Κυνηγός, 1995) η χρήση του υπολογιστή στοχεύει μεταξύ των άλλων και στη δημιουργία περιβαλλόντων μάθησης για κάθε γνωστικό αντικείμενο, όπου ο μαθητής αναλαμβάνοντας ενεργητικό ρόλο, δημιουργεί νοήματα, ανακαλύπτει έννοιες και αναπτύσσει τεχνικές σε συνεργασία με τους συμμαθητές του και με την υποστήριξη του δασκάλου του (Solloway,1991, diSessa & Adelson, 1986, Hoyles & Noss, 1992). Στο πλαίσιο αυτό ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία ενεργά ως σύμβουλος και συνεργάτης των μαθητών (Moreira & Noss, 1995, Κυνηγός, 1995, Hoyles & Noss, 1992).

Μέσα σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον και με τη σύγχρονη χρήση του κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία, η οποία διαφοροποιείται σημαντικά από αυτή που βιώνουν στην ‘παραδοσιακή τάξη’ των μαθηματικών. Η διαφοροποίηση αυτή εντοπίζεται κυρίως στους εξής τομείς:

- Στο γνωστικό τομέα, όπου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν τις μαθηματικές έννοιες, να πειραματιστούν με αυτές μέσα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις τους, να θέσουν ερωτήματα και να εξάγουν τα δικά τους συμπεράσματα.

Με αυτό τον τρόπο οι περιεχόμενες μαθηματικές έννοιες και οι ιδιότητές τους προσεγγίζονται, ανακαλύπτονται και οικοδομούνται βαθμιαία (Papert, 1980,1993) από τους μαθητές, μέσα από την αλληλεπίδραση τους με το περιβάλλον τους (συμμαθητές - δάσκαλος - Η/Υ) (Hoyles and Sutherland, 1992, Scrimshaw, 1993, diSessa, Hoyles, Noss and Edwards, 1995).

- Στο διδακτικό τομέα, όπου ο καθηγητής με τη βοήθεια καλοσχεδιασμένων δραστηριοτήτων και κατάλληλων ερωτήσεων ενθαρρύνει τους μαθητές να πειραματιστούν με τις διάφορες μαθηματικές έννοιες να συζητήσουν μεταξύ τους για αυτές και να εξάγουν συμπεράσματα, να διατυπώσουν ερωτήματα που στη συνέχεια θα προσπαθήσουν να απαντήσουν. Παρέχει τη βοήθειά του για να προχωρήσουν σε επόμενα βήματα, εξειδικεύοντας τις παρεμβάσεις του ανάλογα με τις ανάγκες της κάθε ομάδας. Με τον τρόπο αυτό ο καθηγητής γίνεται συνερευνητής με αυξημένες ευθύνες σε ό,τι αφορά το στήσιμο, την υποστήριξη και την αναπροσαρμογή της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Mercer and Fisher, 1992, Hoyles and Noss 1992).
- Στον κοινωνιολογικό τομέα, όπου ο σχεδιασμός των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων έχει στηριχθεί σε συνθήκες που απορρέουν από την ομαδική εργασία των μαθητών. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές ενθαρρύνονται να μοιραστούν και να συζητούν τις παρατηρήσεις τους κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους με το λογισμικό (Cobb, Yackel and Wood, 1992). Παροτρύνονται να συνεργαστούν για να καταχωρήσουν τα δεδομένα τους, να τα επεξεργαστούν, να συνθέσουν τα συμπεράσματά τους και να τα χρησιμοποιήσουν για να οδηγηθούν στην απάντηση των ερωτημάτων που τίθενται. Καθ' όλη δε τη διάρκεια της διερευνητικής διαδικασίας και προκειμένου να εκθέσουν τις απόψεις τους στα άλλα μέλη της ομάδας αναγκάζονται να μάθουν να επιχειρηματολογούν, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν σωστότερα την απόδοση των μαθηματικών εννοιών για να γίνονται αντιληπτοί (Cobb and Yackel, 1996).
- Στον τομέα χρήσης του υπολογιστή, ο οποίος δεν αποτελεί αντικείμενο μάθησης αλλά εργαλείο παρατήρησης, έκφρασης και διερεύνησης των περιεχόμενων μαθηματικών εννοιών (diSessa, Hoyles, Noss and Edwards, 1995) μέσα από τη χρήση κατάλληλου για την κάθε περίπτωση διερευνητικού λογισμικού.

Επιπροσθέτως, στην εκπαιδευτική έρευνα στο χώρο των μαθηματικών έχει καταγραφεί η ύπαρξη λανθασμένων αντιλήψεων και δυσκολιών των μαθητών σχετικά με την έννοια της συνάρτησης και των διαφορετικών αναπαραστάσεών της. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus (1991) οι μαθητές δε χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και προτιμούν να χειρίζονται τη συνάρτηση μέσα από τον αλγεβρικό της τύπο ενώ σύμφωνα με την έρευνα του Markowits (1986) οι μαθητές έχουν δυσκολία στη μεταφορά πληροφορίας μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων ακόμη και σε απλές περιπτώσεις. Οι Dreyfus και Eisenberg (1986) διαπίστωσαν επίσης τη δυσκολία των μαθητών να συνδέσουν την αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης με τη γεωμετρική (γραφική παράσταση).

Η Sfard (1994) υποστηρίζει ότι ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης αποτελεί για τους περισσότερους μαθητές μία ακολουθία συμβόλων μέσω του οποίου εφαρμόζεται κάποιος αλγόριθμος και προτείνει την εξής διαδικασία διδασκαλίας: πρώτα να ασκούνται οι μαθητές σε υπολογισμούς, μετά να παρατηρούν το αποτέλεσμα των υπολογισμών και τελικά τη συνάρτηση. Σε αυτό το πλαίσιο η Confrey (1992) επισημαίνει ότι οι επαναλαμβανόμενες ενέργειες σε πραγματικές καταστάσεις αποτελούν τις βάσεις για τη μοντελοποίηση και τη σύνδεση ανάμεσα στην κατάσταση και τη μαθηματική έκφραση και προτείνει την προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης μέσα από σύστημα πολλαπλών αναπαραστάσεών της.

Έχοντας υπόψη μας τα παραπάνω σχεδιάσαμε μία εκπαιδευτική δραστηριότητα¹, βασισμένη στη χρήση λογισμικού πολλαπλών αναπαραστάσεων, με στόχο τη μελέτη του ημιτόνου και του

συνημιτόνου (για οξείες γωνίες) και τη χρήση τους στη λύση προβλημάτων. Η δραστηριότητα σχεδιάστηκε για να εφαρμοστεί σε εργαστήριο υπολογιστών όπου οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες των 2-3 ατόμων.

Η ιδέα για την προτεινόμενη εκπαιδευτική δραστηριότητα προήλθε από μία άσκηση που βρίσκεται στο βιβλίο των Μαθηματικών της Β΄ τάξης Γυμνασίου στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας. Οι μαθητές, για να τη λύσουν, αρκεί να χρησιμοποιήσουν τους διδαγμένους τύπους του ημιτόνου και του συνημιτόνου (χωρίς να προκύπτει από πουθενά η αναγκαιότητα ύπαρξής τους) για τη συγκεκριμένη γωνία, χάνοντας έτσι την ευκαιρία να έχουν συνολική εικόνα για τις διάφορες δυνατές τιμές της γωνίας και κυρίως για το τι μεταβάλλεται και που οφείλεται αυτή η μεταβολή. Έτσι οι μαθητές δίνουν μία ‘ξερή’ απάντηση μετά τη λύση της άσκησης χωρίς να διερευνήσουν και να πειραματιστούν με τα μαθηματικά που είναι ‘κρυμμένα’ πίσω από αυτή την πραγματική κατάσταση. Λέγοντας βέβαια πραγματική κατάσταση δεν εννοούμε ότι άπτεται των άμεσων ενδιαφερόντων των μαθητών και έχει σχέση με την καθημερινή τους ζωή, αλλά μία κατάσταση που συμβαίνει, δεν είναι φανταστική και δεν επινοήθηκε μόνο για να εφαρμόσουν τους τύπους του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες στοχεύουν στο να αναδείξουν τη δυνατότητα αξιοποίησης τέτοιων ασκήσεων για την καλύτερη κατανόηση των περιεχόμενων μαθηματικών εννοιών και να προβάλλουν στους μαθητές την αντίληψη ότι εμπλέκονται σε ενέργειες χρήσιμες και εποικοδομητικές.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε στον σχεδιασμό της δραστηριότητας είναι ένα σύνολο διασυνδεδεμένων ψηφίδων του λογισμικού Αβάκιο (<http://e-slate.cti.gr>). Το Αβάκιο είναι ένα υπολογιστικό περιβάλλον για την ανάπτυξη και τη χρήση διερευνητικού λογισμικού για μία ποικιλία γνωστικών αντικειμένων μέσα από μία μεγάλη γκάμα ψηφίδων. Παρέχει, στην κοινότητα των χρηστών που απευθύνεται, τη δυνατότητα να προσαρμόζει το λογισμικό - μέσα από τη διασυνδεσιμότητα των ψηφίδων και της γλώσσας προγραμματισμού - στις απαιτήσεις και στις εκπαιδευτικές ανάγκες που προκύπτουν από τη σχολική πρακτική. Ο τρόπος σχεδιασμού του παρέχει τη δυνατότητα εμπλοκής του εκπαιδευτικού με τη λειτουργικότητα, τη διασυνδεσιμότητα και τη δομή του λογισμικού. Με τον τρόπο αυτό αποδίδεται στον εκπαιδευτικό ο ρόλος του συνεχώς εξελισσόμενου επαγγελματία ο οποίος προβληματίζεται για τη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία, για τα εκπαιδευτικά μέσα, εργαλεία και αναπαραστάσεις καθώς και για τη σημασία και τη χρησιμότητα των εννοιών που εμπεριέχονται στα αναλυτικά προγράμματα που διδάσκει (Κυνηγός, υπό έκδοση).

Η επιλογή των ψηφίδων που χρησιμοποιήθηκαν στη διδακτική αυτή δραστηριότητα έγινε με κριτήριο τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να υποστηριχθεί μία μαθηματική δραστηριότητα, μέσα δηλαδή από:

- Τη συμβολική έκφραση των περιεχόμενων μαθηματικών εννοιών.
- Τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων των εννοιών αυτών.
- Το δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών σχημάτων.
- Τη διαχείριση των δεδομένων του προβλήματος.

Ειδικότερα οι ψηφίδες αυτές είναι:

-Ψηφίδα ‘Γλώσσα’ στην οποία μπορούμε να ‘κατασκευάσουμε’ γεωμετρικά σχήματα με συμβολική αναπαράσταση σε γλώσσα Logo.

-Ψηφίδα ‘Καμβάς’, στην οποία έχουμε τη γεωμετρική αναπαράσταση των σχημάτων που παραστήσαμε συμβολικά στην ψηφίδα ‘Γλώσσα’.

-Ψηφίδα ‘Μεταβολέας’, με την οποία μπορούμε να διαχειριστούμε άμεσα και δυναμικά το μέγεθος των γεωμετρικών σχημάτων που κατασκευάζουμε στην ψηφίδα ‘Καμβάς’.

-Ψηφίδα ‘Βάση δεδομένων’, στην οποία μπορούμε να εισάγουμε και να διαχειριστούμε δεδομένα σε μορφή πίνακα.

-Ψηφίδα ‘Κουμπί’, με την οποία μπορούμε να επιλέξουμε τα δεδομένα που θα εισάγουμε στην ψηφίδα ‘Βάση δεδομένων’.

Ο αρχικός σχεδιασμός της εκπαιδευτικής αυτής δραστηριότητας έγινε με τη χρήση δύο διαφορετικών λογισμικών (Function Probe² και Geometer's Sketchpad³). Με αυτή την αρχική μορφή εφαρμόστηκε σε πραγματικές σχολικές συνθήκες σε μαθητές της Γ' Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής (Σιδηρά-Ξένου, υπό έκδοση) μας ενθάρρυναν στον επανασχεδιασμό της δραστηριότητας με τις προαναφερθείσες ψηφίδες του Αβάκιου και στην εφαρμογή της σε πραγματικές σχολικές συνθήκες.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

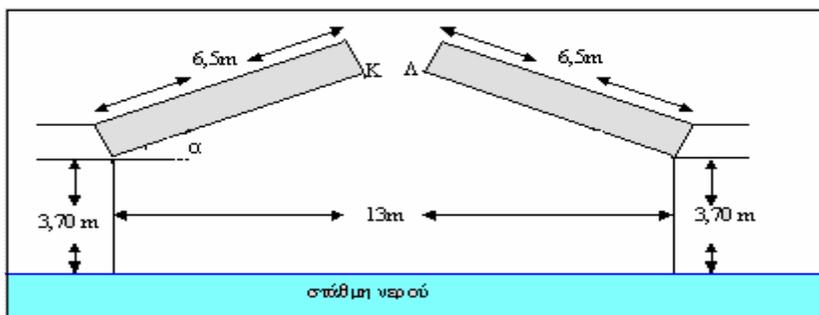
Το πρόβλημα –ερέθισμα για τη διερεύνηση, που δίνεται στους μαθητές είναι το εξής:

«Το σχήμα 1 παριστάνει μία κινητή γέφυρα την ώρα που ανοίγει για να περάσουν καράβια με μεγάλο ύψος. Όταν η γέφυρα είναι κλειστή η γωνία α είναι 0° ενώ όταν ανοίξει τελείως η γωνία α είναι 90° . Στη γέφυρα υπάρχει ένα όργανο που δείχνει κάθε φορά πόσες μοίρες είναι η γωνία α . Ο υπεύθυνος για τη λειτουργία της γέφυρας, προκειμένου να εξοικονομήσει χρόνο και ενέργεια, θέλει να ξέρει πόσο να ανοίξει τη γέφυρα κάθε φορά που είναι να περάσουν καράβια με ορισμένο πλάτος και ύψος. Για το λόγο αυτό σκέφτηκε να κατασκευάσει ένα πίνακα στον οποίο να φαίνεται για κάθε 10° ανοίγματος της γέφυρας:

α) η απόσταση των σημείων Κ και Λ και

β) οι αντίστοιχες αποστάσεις τους από τη στάθμη του νερού.

Μπορείτε να τον βοηθήσετε;»



Σχήμα 1

Το πρόβλημα με τη γέφυρα προσφέρεται για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης (άνοιγμα μιας γέφυρας για να περάσουν καράβια με μεγάλο ύψος) και απαιτεί για τη λύση του διαδικασίες που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές:

- Να μελετήσουν τις μεταβολές των καθέτων πλευρών σε σχέση με τις μεταβολές των οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου και αντίστροφα.
- Να μελετήσουν τις έννοιες ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας καθώς και τις μεταβολές τους.
- Να συνδέσουν τις μεταβολές των καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με τις αντίστοιχες μεταβολές του ημιτόνου και του συνημιτόνου των οξείων γωνιών του.
- Να βρουν μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν το ημίτονο- συνημίτονο με τα μεγέθη που μεταβάλλονται κατά την κίνηση της γέφυρας.
- Να χειριστούν τις προηγούμενες μαθηματικές σχέσεις μέσα από τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής τους (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).

- Να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει από τη θεωρητική διδασκαλία των τριγωνομετρικών αριθμών και να εκτιμήσουν έτσι την πρακτική τους αξία..

Η διδακτική δραστηριότητα αναλύεται στις εξής φάσεις:

Η πρώτη φάση αφορά στο γεωμετρικό μέρος της διερεύνησης κατά το οποίο οι μαθητές εμπλέκονται σε παρατηρήσεις και μελέτες των μεταβολών των πλευρών και των γωνιών ορθογωνίων τριγώνων, μέσα από τη γεωμετρική τους αναπαράσταση. Η φάση αυτή έχει σαν στόχο την ομαλή μετάβαση από την παρατήρηση των μεταβολών των πλευρών και των γωνιών στην πιο ‘αφηρημένη’ φάση της μελέτης των μεταβολών του ημιτόνου και του συνημιτόνου.

Η δεύτερη φάση αφορά στο τριγωνομετρικό-αλγεβρικό μέρος της διερεύνησης κατά το οποίο οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες μελέτης των μεταβολών του ημιτόνου και του συνημιτόνου, μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις.

Η τρίτη φάση θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει διπλή σημασία. Μία είναι αυτή της επέκτασης-γενίκευσης των δραστηριοτήτων και η άλλη αυτή της εφαρμογής των συμπερασμάτων της όλης διερεύνησης. Ως επέκταση-γενίκευση θεωρείται από τη σκοπιά, ότι ζητείται από τους μαθητές να προχωρήσουν τις διαδικασίες που αναφέρονταν σε μία δεδομένη γέφυρα με τρόπο ώστε να μπορούν αποφανθούν για το τι συμβαίνει με γέφυρες οποιουδήποτε μήκους και ύψους. Ως εφαρμογή των συμπερασμάτων θεωρείται από τη σκοπιά, ότι για να κατασκευάσουν γέφυρα με μεταβλητό μήκος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν (όταν προγραμματίζουν στην ψηφίδα ‘Γλώσσα’) όλες εκείνες τις έννοιες που συνάντησαν κατά την πρώτη και δεύτερη φάση της διερεύνησης (ημίτονο, συνημίτονο, απόσταση κτλ.).

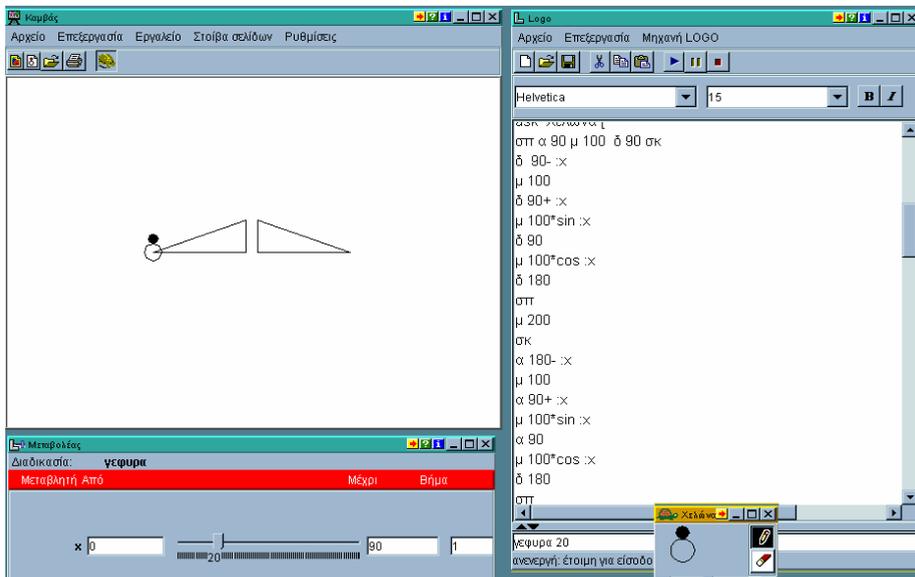
Κατά την **πρώτη φάση** δίνεται στους μαθητές το πρόβλημα με τη γέφυρα και αφού το διαβάσουν και το συζητήσουν μεταξύ τους καλούνται, πριν προχωρήσουν στη λύση του, να διερευνήσουν τις μεταβολές των στοιχείων των ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται. Μία ερώτηση που μπορεί να οδηγήσει στη διερεύνηση αυτή είναι π.χ. «γιατί όταν ανοίγει η γέφυρα απομακρύνονται μεταξύ τους τα σημεία K και Λ» ή «πώς σκέφτηκε ο μελετητής της γέφυρας και την σχεδίασε με αυτό τον τρόπο». Για τη διερεύνηση των ερωτημάτων αυτών δίνεται στους μαθητές μία έτοιμη διαδικασία στην ψηφίδα ‘Γλώσσα’ που δημιουργεί στην ψηφίδα ‘Καμβά’ μία γέφυρα που ανοίγει και κλείνει με το χειρισμό του ‘Μεταβολέα’. Στην ουσία πρόκειται για δύο ορθογώνια τρίγωνα των οποίων αυξομειώνονται οι κάθετες πλευρές με τη μεταβολή των οξείων γωνιών τους. (Βλ. Εικ1)

Εδώ οι μαθητές έχουν την ευκαιρία μέσω των πειραματισμών τους:

- Να διαπιστώσουν ποια στοιχεία του ορθογωνίου τριγώνου μεταβάλλονται κατά το άνοιγμα και το κλείσιμο της γέφυρας.
- Να βγάλουν συμπεράσματα για το πώς μεταβάλλονται τα στοιχεία αυτά (πότε μικραίνουν και πότε μεγαλώνουν) καθώς και για τις οριακές θέσεις που μπορούν να πάρουν.
- Να διατυπώσουν υποθέσεις για το πόσο μεταβάλλονται αυτά τα στοιχεία και από τι εξαρτώνται αυτές οι μεταβολές.

Να διαπιστώσουν από τι εξαρτάται το εύρος του ανοίγματος της γέφυρας.

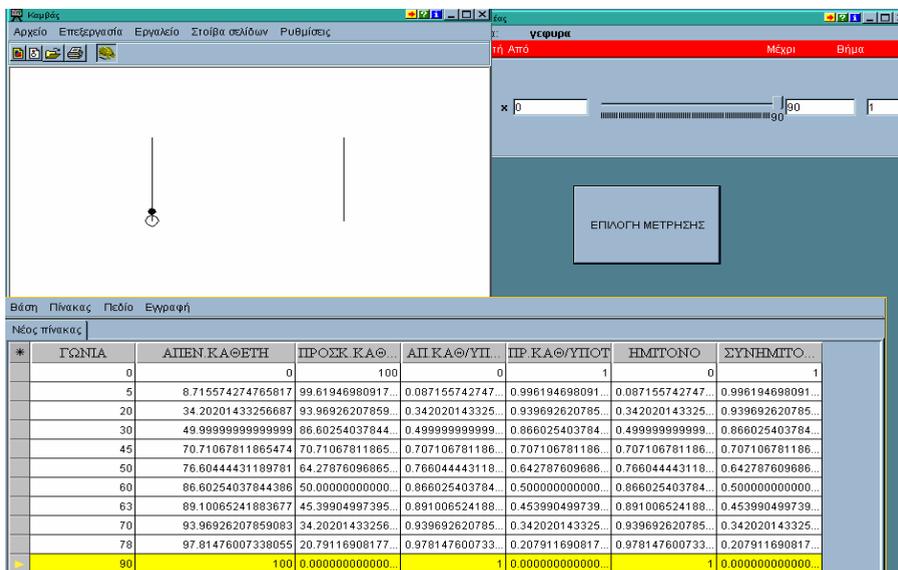
Η **δεύτερη φάση**, που αφορά στη μέτρηση των μεταβαλλόμενων στοιχείων του ορθογωνίου τριγώνου και στη μελέτη των μεταβολών του ημιτόνου και του συνημιτόνου μπορεί να αναλυθεί στα εξής επιμέρους βήματα:



Εικόνα 1

Βήμα 1.

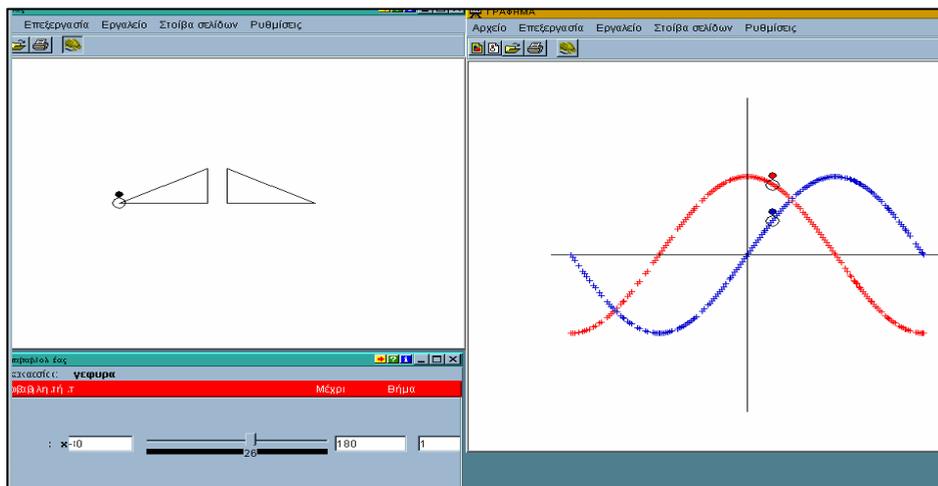
Ζητείται από τους μαθητές να κρατούν στη 'Βάση' τις μετρήσεις της μεταβαλλόμενης γωνίας κατά το άνοιγμα και το κλείσιμο της γέφυρας, των μεταβαλλόμενων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου καθώς και τη μεταβολή των λόγων απέναντι κάθετη πλευρά / υποτείνουσα, προσκείμενη κάθετη πλευρά /υποτείνουσα, ημίτονο, συνημίτονο. Με τη χρήση του 'Κουμπιού' έχουν τη δυνατότητα να κάνουν επιλογή των μετρήσεων που θέλουν να περάσουν στη 'Βάση' (εικόνα 2). Έτσι οι μαθητές μπορούν μέσα από την καταγραφή των μετρήσεών τους στη 'Βάση' να συγκρίνουν τους λόγους και να βγάλουν συμπεράσματα για τη μεταβολή του ημιτόνου και του συνημιτόνου καθώς και τις σχέσεις που συνδέουν τους δύο αυτούς τριγωνομετρικούς αριθμούς. Επίσης έχουν τη δυνατότητα να διαλέγουν κάθε φορά ποιες τιμές της γωνίας, του ημιτόνου, του συνημιτόνου και του πηλίκου των δύο κάθετων πλευρών των ορθογωνίων τριγώνων θέλουν να δουν στη 'Βάση'. Αυτή η λειτουργικότητα αποβλέπει να ενισχύσει την καλλιέργεια στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και συστηματικού πειραματισμού καθώς δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να αποφασίσει ποιες από τις προσπάθειες πειραματισμού του με τη γέφυρα έχει νόημα να καταγραφούν στη βάση για να μελετηθούν συγκριτικά αργότερα.



Εικόνα 2

Βήμα 2

Εδώ οι μαθητές έχουν την ευκαιρία, μετακινώντας το ‘Μεταβολέα’ να βλέπουν τη γέφυρα να ανοιγοκλείνει στον ένα ‘Καμβά’ ενώ στον άλλο ‘Καμβά’ να απεικονίζεται η γραφική παράσταση του ημιτόνου και του συνημιτόνου σε σχέση με την τιμή της γωνίας του τριγώνου που αλλάζει (εικόνα 3).



Εικόνα 3

Με αυτό το συνδυασμό των ψηφίδων οι μαθητές μπορούν να μελετήσουν τις μεταβολές του ημιτόνου και συνημιτόνου μέσα από τη γραφική τους παράσταση και να επαληθεύσουν τα

συμπεράσματα που έβγαλαν από τη μελέτη των μετρήσεων κατά την προηγούμενη φάση. Μπορούν επίσης να επεκτείνουν τα συμπεράσματά τους για το ημίτονο και το συνημίτονο (μέσα από τη γραφική παράσταση) γωνιών μεγαλύτερων των 90° .

Βήμα 3

Εδώ ζητείται από τους μαθητές να κρατούν στη 'Βάση' με τη βοήθεια του 'Κουμπιού' τις μετρήσεις που θα επιλέξουν για τις μεταβολές του ανοίγματος της γέφυρας, καθώς χειρίζονται με το 'Μεταβολέα' το μοντέλο της γέφυρας και να βγάλουν τα συμπεράσματά τους για τη σχέση που συνδέει το εύρος του ανοίγματος της γέφυρας με το ημίτονο και το συνημίτονο των μεταβαλλόμενων γωνιών (βλ. Εικόνα 4).

* ΓΩΝΙΑ	ΑΝ ΓΕΦΥΡΑΣ
0	0
5	0.761060381650...
10	3.038449397558...
15	6.814834742186...
20	12.06147584281...
25	18.73844259267...
30	26.79491924311...
35	36.16959114229...
40	46.79111137620...
45	58.57864376269...
50	71.44247806269...
55	85.28471272979...
60	99.99999999999...
65	115.4763476518...
70	131.5959713348...
75	148.2361909794...
80	165.2703644666...
85	182.5688514504...
90	200

Εικόνα 4

Όπως προαναφέραμε η **τρίτη φάση** στοχεύει αφ' ενός μεν στην επέκταση-γενίκευση των δραστηριοτήτων αφ' ετέρου δε στην εφαρμογή των συμπερασμάτων της όλης διερεύνησης.

Ως ενδεικτικά παραδείγματα επέκτασης και γενίκευσης αναφέρουμε τα εξής:

«Αν ξέρουμε ότι για να ανοίξει τελείως η γέφυρα απαιτούνται 15 λεπτά, να κατασκευάσετε ένα πίνακα που να δείχνει το χρόνο που απαιτείται ώστε το άνοιγμα της γέφυρας (γωνία α) να είναι 12° , 30° , 77° καθώς και τις αντίστοιχες αποστάσεις των σημείων Κ και Λ μεταξύ τους και από τη στάθμη του νερού»

«Η εταιρεία που κατασκεύασε τη γέφυρα θα φτιάξει και άλλες τρεις όμοιες γέφυρες. Τα μήκη των γεφυρών θα είναι 25, 28 και 32 μέτρα. Το ύψος τους από τη στάθμη του νερού θα είναι 4,5, 4,8, και 5 μέτρα αντιστοίχως. Οι χρόνοι ανοίγματος 18, 20 και 25 λεπτά αντιστοίχως. Ποιες είναι οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα για αυτές τις τρεις γέφυρες;»

Για την εφαρμογή των συμπερασμάτων της διερεύνησης προτείνεται, να ζητηθεί από τους μαθητές, να γράψουν σε γλώσσα Logo μία διαδικασία που να κατασκευάζει μία γέφυρα με μεταβαλλόμενο μήκος που ανοίγει. Η φάση αυτή είναι ιδιαίτερης σημασίας γιατί δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία-πρόκληση αναλαμβάνοντας το ρόλο του μηχανικού-κατασκευαστή γεφυρών:

- Να χρησιμοποιήσουν το ημίτονο και το συνημίτονο, έννοιες που επεξεργάστηκαν προηγουμένως, για να φτιάξουν κάτι 'χειροπιαστό'.
- Να κατασκευάσουν ένα μοντέλο γέφυρας, της οποίας το μήκος μπορεί να μεταβάλλεται, όπου προβάλλει η ανάγκη χρήσης μεταβλητών και η σωστή σύνδεση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα.

Τέλος η συζήτηση-παρουσίαση της εργασίας της κάθε ομάδας, μετά την ολοκλήρωση της κατασκευής, μπορεί να λειτουργήσει ανατροφοδοτικά για τον τρόπο χρήσης του ημιτόνου και του συνημιτόνου στις διαφορετικές πρακτικές εφαρμογές τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καταλήγοντας μπορούμε να πούμε ότι με τη συνέργεια όλων των παραπάνω ψηφίδων επιτυγχάνεται η σύγχρονη δημιουργία πολλαπλών αναπαραστάσεων της συναρτησιακής σχέσης «γωνίας – ημιτόνου, συνημιτόνου». Συγκεκριμένα γίνεται εφικτός ο δυναμικός χειρισμός του μοντέλου της γέφυρας με τη χρήση του μεταβολέα, ενώ συγχρόνως ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να βλέπει να δημιουργείται η γραφική παράσταση του ημιτόνου και του συνημιτόνου και μπορεί να αποτυπώνει σε μια βάση δεδομένων τις αλλαγές που παρατηρεί στο μοντέλο της γέφυρας.

Έτσι από πλευράς γνωστικού αντικειμένου επιτυγχάνεται η πολλαπλή αναπαράσταση συναρτήσεων

- Με τύπο
- Με πίνακα τιμών
- Με γράφημα

Από πλευράς μαθησιακής διαδικασίας με τη χρήση του συγκεκριμένου λογισμικού αποβλέπουμε στην ενεργητική συμμετοχή του μαθητή στη μελέτη της έννοιας του ημιτόνου και του συνημιτόνου με:

- Πειραματισμό και παρατήρηση φαινομένου (δυναμικός χειρισμός του μοντέλου της γέφυρας)
- Μετρήσεις – καταγραφή των μεταβαλλόμενων μεγεθών (γωνία, ημίτονο, συνημίτονο)
- Εξαγωγή συμπερασμάτων για τον τρόπο συμμεταβολής των μεγεθών (οξεία γωνία-ημίτονο, συνημίτονο)
- Διερεύνηση των σχέσεων που συνδέουν τα μεγέθη του φαινομένου
- Χειρισμό των σχέσεων του φαινομένου
 - α) γραφικά
 - β) μέσω του τύπου τους

Με την επιλογή και διασύνδεση των συγκεκριμένων ψηφίδων του λογισμικού προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε σε αυτή τη δραστηριότητα:

- Τη δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασης του ημιτόνου και του συνημιτόνου.
- Τη δυνατότητα εύκολης μετάβασης από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη
- Τη δυνατότητα για την κατασκευή ανεξάρτητων νοημάτων για τις διαφορετικές αναπαραστάσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου αλλά και συσχετισμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων.
- Τη δυνατότητα καταχώρησης, οργάνωσης και επεξεργασίας των δεδομένων ως αποτέλεσμα μετρήσεων ή πληροφοριών του προβλήματος.
- Τη δυνατότητα συσχετίσεως αριθμητικών δεδομένων

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Η εκπαιδευτική δραστηριότητα έγινε στο πλαίσιο του έργου 'Θρανό': 'Επαναχρησιμοποιήσιμες Ψηφίδες Λογισμικού (Educational Components) βασισμένες σε τεχνολογίες internet και εικονικής πραγματικότητας για τη σύνθεση εκπαιδευτικού λογισμικού υψηλών προδιαγραφών και δραστηριοτήτων διερευνητικής μάθησης' (4/1999-3/2001), ΕΠΕΤ ΙΙ- ΓΓΕΤ
2. Διερευνητικό λογισμικό για τη μελέτη των συναρτήσεων που ανήκει στην κατηγορία των λογισμικών πολλαπλών αναπαραστάσεων
3. Ένα Ευκλείδειο περιβάλλον κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων και δυναμικού χειρισμού τους

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Cobb P. & Yackel E.,(1996):*Constructivist, Emergent And Sociocultural Perspectives In The Context Of Developmental Research*. Journal Of Educational Psychology, Vol. 31, 175 - 190
- Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T., (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics* 23: 99-122.
- Confrey, J., (1992), Splitting similarity and rate of change: New approaches to multiplication and exponential functions. In G. Harel and J. Confrey (eds), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, NY Suny Press.
- diSessa A. & Abelson H., (1986): *Boxer: A Reconstructible Computational Medium*. Communications At The Acm, Sep. 1986, Vol. 29, No. 9
- diSessa A., Hoyles C., Noss R. & Endwards L., (1995). *Computers and Exploratory Learning*. Berlin Heidelberg.
- Dreyfus, D. & Eisenberg, T., (1986), On the deep structure of functions, *Proceedings of PME 11*, Montreal, 190-96.
- Eisenberg, T. & Dreyfus, D., (1991), On the Reluctance to Visualize in Mathematics, in W. Zimmerman and S. Cunnigham (eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37), USA : Mathematical Association of America, Notes Series Vol.19, 25-37.
- Hoyles C. & Noss R., (1992): *Deconstructing Microwords* In: Ferguson D.L. (Ed) Springer - Verlag "Advanced Technologies In The Teaching Of Mathematics And Science".
- Hoyles C. & Sutherland R., (1992): *Logo Mathematics In The Classroom*. Routledge
- Kontogiannopoulou - Polidorides, G. (1996) Educational paradigms and models of computer use: does technology change educational practice?, In Cross national policies and practices on computers in education, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 49-84.
- Markowits, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M., (1986), Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics* 6(2), 18-24.
- Mercer, N. & Fisher, E., (1992). How do teachers help children to learn? An analysis of teachers' interventions in computer based activities. *Learning and Instruction*. Vol. 2, pp 339-355.
- Moreira C. & Noss R.(1995): *Understanding Teachers' Attitudes Change In A Logomathematics Environment*. Educational Studies In Mathematics Vol. 28, Pp. 155-176
- Papert, S. (1993) *The Children's Machine, Rethinking School in the Age of the Computer*, New York: Basic Books
- Scrimshaw, P, (1993). *Language, Computers and Classrooms*. Routledge.
- Sfard, A. (1994a). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics*, 14 (1)
- Soloway E.,(1991):*Quick, Where Do The Computers Go?* Communications of ACM, Vol.34,N. 2
- Yackel, E., and Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 4, 458-477.
- Κοντογιαννούλου – Πολυδώριδη, (1991). 'Οι Εκπαιδευτικές Και Κοινωνικές Διαστάσεις Της Χρήσης Των Νέων Τεχνολογιών Στο Σχολείο'. Σύγχρονα Θέματα. Τεύχη 46-47. Σελ. 77-93.
- Κυνηγός Χ., (1995). *Η Ευκαιρία Που Δεν Πρέπει Να Χαθεί: Η Υπολογιστική Τεχνολογία Ως Εργαλείο Έκφρασης Και Διερεύνησης Στη Γενική Παιδεία*. στο: Καζαμιάς & Κασσωτάκης (επιμέλεια):*Προοπτικές Για Μια Νέα Πολιτική Στην Ελληνική Εκπαίδευση*.
- Κυνηγός Χ. (υπό έκδοση). 'Η ανάπτυξη μαθηματικών μικρόκοσμων ως διαδικασία κατάρτισης επιμορφωτών', στο: Χ. Κυνηγός & Ε. Β. Δημαράκη (επιμέλεια), "Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα: Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής" εκδόσεις Καστανιώτη.
- Σιδηρά-Ξένου Ν. (υπό έκδοση). 'Αυτοαξιολόγησης αξιοποίησης πολυαναπαραστασιακών λογισμικών στη διδασκαλία των συναρτήσεων' στο: Χ. Κυνηγός & Ε. Β. Δημαράκη (επιμέλεια) "Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα: Παιδαγωγική Αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη Μετεξέλιξη της Εκπαιδευτικής Πρακτικής", εκδόσεις Καστανιώτη.