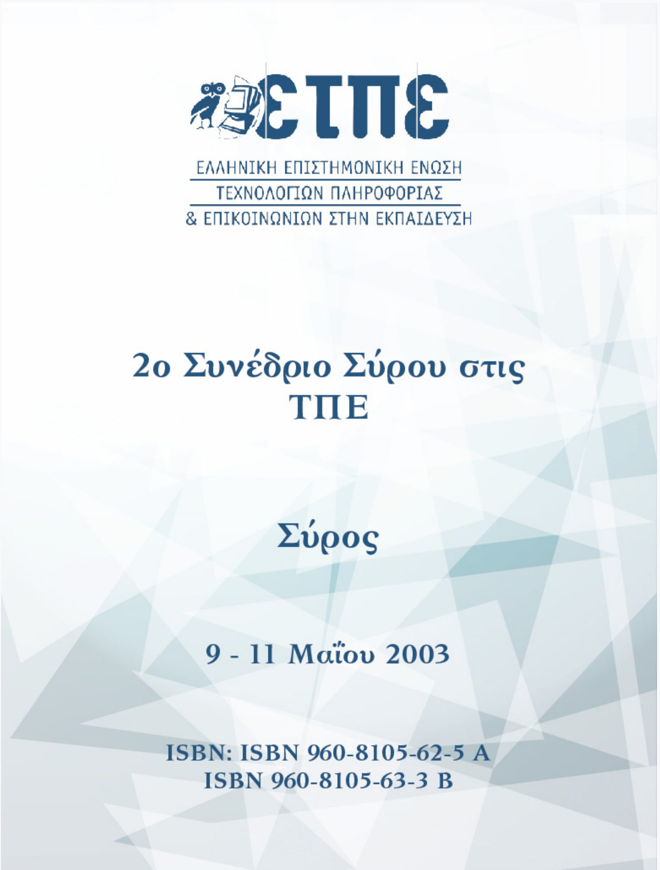
Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Vol 1 (2003)

2ο Συνέδριο Σύρου στις ΤΠΕ



HOBBITS ΚΑΙ ORCS. ΈΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΗΡΩΕΣ ΤΟΥ TOLKIEN. HOBBITS AND ORCS. A PROBLEM ON TOLKIEN’S CHARACTERS.

Παναγιώτα Κοταρίνου, Αλίκη Μπασιάκου , Ηλίας Ανδριανός , Κίμων Κοντώσης , Φώτης Καλαφάτης

HOBBITS ΚΑΙ ORCS. ΈΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΗΡΩΕΣ ΤΟΥ TOLKIEN.
HOBBITS AND ORCS. A PROBLEM ON TOLKIEN'S CHARACTERS.

Κοταρίνου Παναγιώτα
Καθηγήτρια Μαθηματικών
μεταπτυχιακή φοιτήτρια
pkotarinou@sch.gr

Μπασιάκου Αλίκη
Καθηγήτρια Μαθηματικών
μεταπτυχιακή φοιτήτρια
abassiak@sch.gr, abassiak@math.uoa.gr

Ανδριανός Ηλίας
Καθηγητής Μαθηματικών
Μεταπτυχιακός φοιτητής
ml26764@mailsrv.otenet.gr

Κοντώσης Κίμων
Φοιτητής Πληροφορικής
kimonkod@hotmail.com

Καλαφάτης Φώτης
Φοιτητής Πληροφορικής
f_kalafatis@hotmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εισήγηση περιγράφεται μια διδακτική πρόταση, με σκοπό την εισαγωγή της επαγωγικής διαδικασίας σε μαθητές γυμνασίου και της μαθηματικής επαγωγής σε μαθητές Λυκείου. Η διδασκαλία αυτή βασίζεται σε ένα πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκε από τους ERNST KAI NEWEL το 1969 στην προσομοίωση των υπολογιστικών μοντέλων σκέψης με ηλεκτρονικό υπολογιστή (Hayes Nicky,1998) και είναι το εξής:

Εφτά Hobbits έχουν συλλάβει εφτά Orks στα σύνορα του Shire. Πρέπει να περάσουν τους αιχμαλώτους τους από ένα ποτάμι, το Brandywine, για να τους μεταφέρουν στο αστυνομικό τμήμα του Bree. Βρίσκονται στην όχθη Α του ποταμού και έχουν μία βάρκα, η οποία μπορεί να μεταφέρει στην όχθη Β μόνον δύο άτομα κάθε φορά. Η μεταφορά πρέπει να γίνει με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι εξασφαλισμένο ότι ανά πάσα στιγμή ο αριθμός των Hobbits που θα βρίσκονται σε κάθε όχθη να είναι μεγαλύτερος ή το πολύ-πολύ ίσος με τον αριθμό των Orks που θα βρίσκονται στην ίδια όχθη. Αν υπήρχαν περισσότεροι Orks από ότι Hobbits σε οποιαδήποτε στιγμή, οι Orks θα υπερίσχυαν των Hobbits και θα τους σκότωναν (Hayes Nicky,1998).

Το πρόβλημα συνίσταται στον προσδιορισμό του **ελαχίστου** πλήθους των μεταβάσεων που πρέπει να γίνουν συνολικά από την μια όχθη ως την άλλη, ώστε να περάσουν το ποτάμι χωρίς να πάθει κανείς τίποτε. Το πλήθος αυτό εξαρτάται από το πλήθος των Hobbits και Orks που υπάρχουν. Επομένως το πρόβλημα προσφέρεται για την εισαγωγή της έννοιας της **επαγωγής** και εν συνεχεία της **μαθηματικής επαγωγής**.

Ο διδακτικός στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η **επαγωγή** είναι η μέθοδος της ανακάλυψης γενικών νόμων με την παρατήρηση και το συνδυασμό ειδικών περιπτώσεων, ενώ η **μαθηματική επαγωγή** είναι μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά (Polya, 1973, σελ.114).

Η εισήγηση (αλλά και η διδακτική πρόταση) συμπληρώνεται από μια ιστορική αναδρομή στην έννοια της επαγωγής. Θεωρούμε ότι η ιστορική συνιστώσα είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση της κατανόησης μιας έννοιας.

Το πρόβλημα συνοδεύεται από interactive software παιχνίδι και απευθύνεται σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Ανοιχτό πρόβλημα, λογισμικό, μαθηματική επαγωγή, ιστορικές αναφορές.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έχοντας την πεποίθηση ότι η δημιουργία και η επίλυση προβλημάτων βρίσκεται στην καρδιά της όποιας παιδευτικής διαδικασίας, προσπαθούμε και εμείς μέσα στη σχολική τάξη να εμπλέξουμε τα παιδιά στην επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος.

Με αφορμή ένα ανοιχτό πρόβλημα, το οποίο έχει εν γένει το πλεονέκτημα να ενεργοποιεί τα παιδιά, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μια κατάσταση έρευνας μέσα στην τάξη.

Θα καλλιεργήσουμε κατ' αυτόν τον τρόπο τις κατάλληλες συνθήκες, ώστε να αναπτυχθεί η **δημιουργική αμφιβολία** στα παιδιά. Αυτό θα οδηγήσει και στην ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής τους σκέψης, της φαντασίας τους, της διαίσθησης και της ενόρασης, που είναι σημαντικές συνιστώσες της μαθηματικής σκέψης.

Για να διαπιστώσουμε, όμως, την εμβέλεια και την ποιοτική χροιά των ανοιχτών προβλημάτων ας προσπαθήσουμε να δούμε πρώτα τι καλούμε ανοιχτό πρόβλημα.

Σύμφωνα με τον Schoenfeld «πρόβλημα είναι ένα πλέγμα ερωτημάτων, των οποίων οι απαντήσεις δεν απαιτούν μια διανοητική διαδρομή σ' ένα προκαθορισμένο μονοπάτι σκέψης, αλλά τη δημιουργία αυτού τούτου του μονοπατιού προς τις απαντήσεις».

Η άποψη του Schoenfeld εκφράζεται και από μία ομάδα του IREM της Λυών: «Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του «ανοιχτού προβλήματος» είναι ότι δεν προκύπτει από την εκφώνηση ούτε η μέθοδος ούτε η λύση» (Κοντογιάννης, 1999 – 2000).

Αυτή ακριβώς είναι και η «αρχή» αναζήτησης της μεθόδου. (Είναι παιδευτικά προτιμότερο να μην περιορίζεται η διαδικασία λύσεως στην άμεση εφαρμογή αποτελεσμάτων πρόσφατα παρουσιασμένων στην τάξη).

Αφού λοιπόν η μέθοδος πορείας προς τις απαντήσεις δεν προδίδεται από την αρχική διατύπωση, ανοίγεται ένας δρόμος για ένα παιδευτικό ταξίδι αναζήτησης μιας κατάλληλης μεθόδου προσέγγισης. Σημασία δεν έχει μόνον η Ιθάκη – που αντιπροσωπεύει τη λύση ή τις λύσεις του προβλήματος – αλλά κυρίως το ταξίδι των μαθητών προς την Ιθάκη.

Οι μαθησιακές διαδρομές και η γόνιμη μαθηματική έρευνα πριν από το τέλος κάνουν το ανοιχτό πρόβλημα αποδοτικό εργαλείο στη διδακτική πράξη και μάλιστα, ανάλογα και με την ηλικία των μαθητών, αποδοτικότερο εκεί όπου οι αναγκαίες διαδικασίες αποκτούν πιο γνήσια χροιά προσομοίωσης στις διαδικασίες του ερευνητή.

Σύμφωνα με την μαθησιακή αρχή του κονστρουκτιβισμού, η γνώση δεν «απορροφάται» παθητικά από το περιβάλλον, αλλά κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο.

Σ' αυτά τα πλαίσια λοιπόν, δίνουμε στην τάξη το παρακάτω «ανοιχτό πρόβλημα» για να δουλέψουμε σε ομάδες.

ΟΙ HOBBITS ΚΑΙ ΟΙ ORKS

Εφτά Hobbits έχουν συλλάβει εφτά Orks στα σύνορα του Shire. Πρέπει να περάσουν τους αιχμαλώτους τους από ένα ποτάμι, το Brandywine, για να τους μεταφέρουν στο αστυνομικό τμήμα του Bree. Βρίσκονται στην όχθη του ποταμού και έχουν μία βάρκα, η οποία μπορεί να μεταφέρει μόνον δύο άτομα κάθε φορά. Η μεταφορά πρέπει να γίνει με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι εξασφαλισμένο ότι ανά πάσα στιγμή ο αριθμός των Hobbits που θα βρίσκονται σε κάθε όχθη να είναι μεγαλύτερος ή το πολύ-πολύ ίσος με τον αριθμό των Orks που θα βρίσκονται στην ίδια όχθη. Αν υπήρχαν περισσότεροι Orks από ότι Hobbits σε οποιαδήποτε στιγμή, οι Orks θα υπερίσχυαν των Hobbits και θα τους σκότωναν.

Πώς θα έπρεπε να χειριστούν το πρόβλημα ώστε να περάσουν το ποτάμι χωρίς να πάθει κανείς τίποτε;

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Το πρόβλημα έχει μια σαφώς προσδιορισμένη αρχική κατάσταση και μια σαφώς προσδιορισμένη τελική κατάσταση.

Ένας πρώτος στόχος μας θα είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η κατάλληλη ερμηνεία των υποθέσεων ενός προβλήματος μπορεί να αποδειχθεί καθοριστική για τη λύση του. Ένας δεύτερος στόχος είναι να αναπτύξουν μια εικασία για τη λύση του προβλήματος μειώνοντας το δεδομένο αριθμό των Hobbits και Orks.

Αρχικά θα αφήσουμε τα παιδιά να ασχοληθούν με το πρόβλημα όπως είναι. Αφού διαπιστώσουν ότι είναι δύσκολο να βρουν μια στρατηγική για την επίλυσή του, θα τα καθοδηγήσουμε με κατάλληλες ερωτήσεις.

1^{η} ΕΡΩΤΗΣΗ

Θα μπορούσατε να λύσετε το πρόβλημα αν είχαμε μόνον έναν Hobbit και έναν Ork στην όχθη Α; (Όχθη Α ονομάζουμε την πρώτη όχθη και όχθη Β την απέναντι όχθη, στην οποία πρέπει να φθάσουν).

Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ απλό γιατί χρειάζεται μόνον μία κίνηση της βάρκας. Στη βάρκα επιβιβάζεται το ένα και μοναδικό Hobbit και το ένα και μοναδικό Ork και μεταφέρονται από την όχθη Α στην όχθη Β.

2^{η} ΕΡΩΤΗΣΗ

Αν είχαμε δύο Hobbits και δύο Orks στην όχθη Α, πόσες κινήσεις της βάρκας θα χρειάζονταν για να μεταφερθούν στην όχθη Β;

Εξετάζουμε τα βήματα που πρέπει να γίνουν για να μεταφερθούν οι 2 Hobbits και οι 2 Orks:

1^{η} Κίνηση (Μετάβαση)

⇨

Στη βάρκα επιβιβάζεται το ένα Hobbit και το ένα Ork. Το Hobbit αποβιβάζεται στην όχθη Β.

Όχθη Α	Βάρκα	Όχθη Β
1 Hobbit 1 Ork	1 Hobbit 1 Ork	
1 Hobbit 1 Ork	1 Ork	1 Hobbit

Στην όχθη Α έχουν απομείνει 1 Hobbit και 1 Ork.
Στην όχθη Β έχει αποβιβαστεί 1 Hobbit.

2η Κίνηση (Επιστροφή)

⇦

Η βάρκα επιστρέφει στην όχθη Α με το ένα Ork, το οποίο δεν αποβιβάζεται.

Όχθη Α	Βάρκα	Όχθη Β
1 Hobbit 1 Ork	1 Ork	1 Hobbit

3η Κίνηση (Μετάβαση)

⇨

Στη βάρκα επιβιβάζεται το ένα Ork , το οποίο αποβιβάζεται στην όχθη Β.

Όχθη Α	Βάρκα	Όχθη Β
1 Hobbit	2 Ork	1 Hobbit
1 Hobbit	1 Ork	1 Hobbit 1 Ork

Στην όχθη Α έχει απομείνει 1 Hobbit.
Στην όχθη Β έχουν αποβιβαστεί 1 Hobbit και 1 Ork.

4η Κίνηση (Επιστροφή)

⇦

Η βάρκα επιστρέφει στην όχθη Α με το ένα Ork, το οποίο αποβιβάζεται.

Όχθη Α	Βάρκα	Όχθη Β
1 Hobbit	1 Ork	1 Hobbit 1 Ork

1 Hobbit 1 Ork		1 Hobbit 1 Ork

Στην όχθη Α υπάρχουν τώρα 1 Hobbit και 1 Ork.
Στην όχθη Β έχουν αποβιβαστεί 1 Hobbit και 1 Ork.

5η Κίνηση (Μετάβαση)

⇨

Η μεταφορά του εναπομείναντος ζευγαριού από την όχθη Α στην όχθη Β, που αντιστοιχεί στην προηγούμενη περίπτωση.

Όχθη Α		Όχθη Β
	1 Hobbit 1 Ork	1 Hobbit 1 Ork
		2 Hobbit 2 Ork

Μέχρι στιγμής παρατηρούμε ότι, όταν έχουμε παραπάνω από ένα ζευγάρια Hobbits και Orks, ο αριθμός $κ_1$ των κινήσεων της βάρκας για τη μεταφορά του 1ου ζευγαριού Hobbits και Orks από την όχθη Α στην όχθη Β και την επιστροφή της βάρκας στην όχθη Α για να μπορεί να συνεχιστεί η διαδικασία μεταφοράς, είναι σταθερός και ίσος με 4.

Μόνον για το τελευταίο ζευγάρι που απομένει στην όχθη Α και πρέπει να μεταφερθεί στην όχθη Β χρειάζεται 1 κίνηση της βάρκας.

Άρα:

Αν $κ_2$ είναι ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας για τη μεταφορά 2 ζευγαριών, θα είναι:

$κ_2 = κ_1 + 1$

Αν $κ_3$ είναι ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας για τη μεταφορά 3 ζευγαριών, θα είναι:

$κ_3 = κ_1 + κ_2 = κ_1 + κ_1 + 1 = 2κ_1 + 1$.

Εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, αν έχουμε 7 ζευγάρια, ο ζητούμενος αριθμός των κινήσεων της βάρκας θα είναι:

$κ_7 = 6κ_1 + 1$

Δηλαδή $κ_7 = 6κ_1 + 1 = 6·4 + 1 = 25$ κινήσεις.

ΕΡΩΤΗΣΗ – ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΑΜΦΙΒΟΛΙΑ

«Μπορούμε να βρούμε τώρα τον αριθμό των κινήσεων όταν έχουμε οποιονδήποτε αριθμό ζευγαριών Hobbits και Orks;»

Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται η αναγκαιότητα ύπαρξης γενικής αντιμετώπισης του προβλήματος, δηλαδή η μέθοδος της *τελείας επαγωγής*.

Δικαιούμαστε να υποθέσουμε ότι η τάξη θα καταλήξει στην εξής εικασία:

«Αν έχουμε ν ζευγάρια, ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας θα είναι:

$κ_ν = 4(ν-1) + 1$

Στο σημείο αυτό εμφανίζεται η **δημιουργική αμφιβολία** (από την οποία και θα προκύψει η αναγκαιότητα μιας μεθόδου για την επιβεβαίωση, πέραν πάσης αμφιβολίας, της εικασίας):

Πώς είμαστε βέβαιοι ότι η σχέση $κ_ν = 4(ν\text{-}1) + 1$, που ισχύει για μερικές συγκεκριμένες (μικρές) τιμές του ν, θα ισχύει αναγκαστικά για κάθε φυσικό αριθμό ν;

Είναι κοινός τόπος ότι πάμπολλες φορές γενικεύουμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από μερικές δοκιμές. Είναι αυτό σωστό; Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Ο Euler παρατήρησε ότι ο τύπος $ν^2 + ν + 41$ μας δίνει τους πρώτους αριθμούς για ν = 0, 1, 2, 3, ..., 39. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε το ν με οποιονδήποτε από τους αριθμούς αυτούς προκύπτει πρώτος αριθμός. Αλλά για ν = 40 έχουμε

$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40{\cdot}41 + 41 = 41{\cdot}41$ σύνθετος αριθμός.

Έτσι προκύπτει με φυσικό τρόπο η ανάγκη για αναζήτηση μιας έγκυρης μεθόδου για την ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων. Δηλαδή προκύπτει η ερώτηση:

«Πώς πρέπει να ενεργήσουμε για να είμαστε σίγουροι ότι μια τέτοια πρόταση ισχύει για οποιονδήποτε αριθμό ζευγαριών Hobbits και Orks , δηλαδή ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς;»

Την έγκυρη αυτή μέθοδο εξασφαλίζει το επαγωγικό βήμα, το οποίο πρέπει να αποδειχθεί:

Αν ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας όταν έχουμε ν ζευγάρια Hobbits και Orks είναι $κ_ν = 4(ν – 1) + 1$, τότε ο αριθμός των κινήσεων της βάρκας όταν έχουμε ν +1 ζευγάρια Hobbits και Orks θα είναι $κ_{ν+1} = 4ν + 1$.

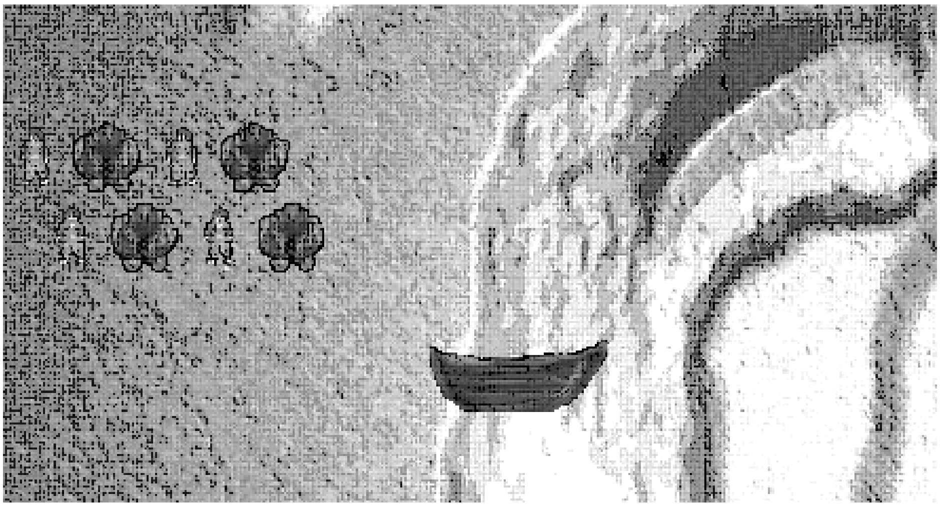
Πράγματι, αν έχουμε ν +1 ζευγάρια Hobbits και Orks, οι κινήσεις για να μεταφερθεί ένα ακόμη ζευγάρι στην απέναντι όχθη είναι και πάλι οι γνωστές 4 κινήσεις.

Άρα $κ_{ν+1} = κ_ν + 4 = [4(ν – 1) + 1] + 4 = 4ν + 1$.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ

Για την παρουσίαση αυτή κατασκευάστηκε και αναπτύχθηκε από εμάς πρωτότυπο λογισμικό με τίτλο HOBBITS και ORCS. Το λογισμικό αυτό είναι ένα παιχνίδι - εφαρμογή του προβλήματος. Στόχος του είναι τα παιδιά να κατανοήσουν το πρόβλημα και τις μαθηματικές προεκτάσεις του με το παίξιμο του παιχνιδιού αυτού.

Το παιχνίδι αυτό έχει ένα φιλικό και απλό για τα παιδιά περιβάλλον, με χιουμοριστικά στοιχεία. Κατά την εκκίνηση του προγράμματος εμφανίζεται ένα "παράθυρο" μέσα στο οποίο απεικονίζεται ένα τοπίο, με ένα ποτάμι να το χωρίζει στα δύο. Στην αριστερή μεριά του τοπίου βρίσκονται παρατεταγμένα τέσσερα Orcs και τέσσερα Hobbits, με ζωγραφισμένες φιγούρες που θυμίζουν τα μυθικά πλάσματα του Tolkien. Στην ίδια όχθη του ποταμού βρίσκεται και μια βάρκα η οποία επιπλέει. Έτσι ξεκινάει ένα παιχνίδι με τέσσερα Hobbits και Orcs...



Ο παίχτης διατάζει τα πλάσματα να επιβιβαστούν στη βάρκα ή να αποβιβαστούν από αυτή με ένα απλό κλικ του ποντικιού επάνω τους, ενώ το ίδιο απλά η βάρκα μετακινείται από τη μία όχθη στην άλλη. Η κίνηση κατά το περπάτημα είναι παραστατική με ζωγραφισμένα καρέ, ενώ υπάρχουν και κάποιες "καρτουνίστικες" σκηνές σε περίπτωση νίκης ή ήττας του παιχνιδιού καθώς και ήχοι με χιουμοριστικό χαρακτήρα.

Το λογισμικό έχει τις εξής δυνατότητες:

- Μπορεί να εφαρμοστεί για Ν ζευγάρια Hobbits και Orcs.
- Καταμετράει τις κινήσεις της βάρκας.
- Εμφανίζει σχετικό μήνυμα όταν τα παιδιά λύσουν το πρόβλημα με μεγαλύτερο αριθμό κινήσεων από το βέλτιστο.
- Ο χρήστης μπορεί να πάρει πίσω έως και τρεις λάθος κινήσεις.
- Ρυθμίζεται η ταχύτητα του παιχνιδιού (π.χ. ταχύτητα περπατήματος)
- Έχει ενσωματωμένη βοήθεια χρήσης.

Η ανάπτυξη του λογισμικού έγινε σε γλώσσα Visual Basic 5.0, με χρήση του DirectX8.0. Διαθέτει έως 24bit color γραφικά σε ανάλυση τουλάχιστον 800x600.

Ο προγραμματισμός έγινε από τον Κίμωνα Κοντώση και τα γραφικά από τον Φώτη Καλαφάτη.

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η επαγωγική μέθοδος χρησιμοποιείται σε πολλές επιστήμες, για τη μετάβαση από το μερικό στο γενικό, από τη μερική περίπτωση στο γενικό κανόνα. Παρ' όλ' αυτά η επαγωγική μέθοδος δεν αποδεικνύει την ισχύ του γενικού κανόνα, αλλά απλώς υποδεικνύει τον κανόνα. Βέβαια, αυτό είναι οπωσδήποτε το πρώτο βήμα προς την ανακάλυψη. Όπως αναφέρει ο Polya:

«Στα μαθηματικά, όπως και στις φυσικές επιστήμες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση και την επαγωγή για την ανακάλυψη γενικών νόμων. Υπάρχει όμως μια διαφορά. Στις φυσικές επιστήμες δεν υπάρχει άλλο μέσον υψηλότερου κύρους από την παρατήρηση και την επαγωγή, ενώ στα μαθηματικά υπάρχει. Είναι η αυστηρή απόδειξη» (Polya, 1973, σελ.117).

Όπως προκύπτει από τα κείμενα των Νεοπυθαγορείων φιλοσόφων (Ιάμβλιχος, Θέων ο Σμυρνεύς), ήδη από την εποχή των Πυθαγορείων, στα πλαίσια της Θεωρίας Αριθμών, όπως την είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι, χρησιμοποιείτο μια μορφή ατελούς επαγωγής. Ο Πρόκλος μάλιστα αναφέρει μία πρόταση, στην οποία, με εφαρμογή της γεωμετρικής άλγεβρας στη Θεωρία Αριθμών, γίνεται η απόδειξη του επαγωγικού βήματος, το οποίο είναι και η ουσία της μαθηματικής επαγωγής (Νεγρεπόντης, 2000 – 2001).

Αργότερα, όμως, ο Αριστοτέλης, αν και χρησιμοποιούσε την επαγωγική μέθοδο για την εξαγωγή συμπερασμάτων για το γενικό ξεκινώντας από το μερικό, υπερτόνισε τη σημασία του παραγωγικού συλλογισμού, σύμφωνα με τον οποίον, από την αλήθεια μιας πρότασης για ένα σύνολο, συμπεραίνουμε την αλήθεια για τα επιμέρους στοιχεία ή υποσύνολά του.

Ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός μαθηματικός Francesco Mauroliko (Μαυρόλυκος), όμως, χρησιμοποιεί το 1557 μια μέθοδο ανάλογη με αυτήν των Πυθαγορείων για να αποδείξει ότι «το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετηρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών». Για την απόδειξη της πρότασης αυτής ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε την πρόταση: «κάθε τετράγωνο, όταν αυξηθεί με τον επόμενό του στην τάξη περιττό, δίνει το επόμενο στην τάξη τετράγωνο».

Ο Φραγκίσκος Βάκων, τον 16^{ο} αιώνα, αντιτίθεται στον παραγωγικό τρόπο σκέψης του Αριστοτέλη. Υποστηρίζει όμως, ότι η ατελής επαγωγή είναι παιδαριώδης, διότι στηρίζει τα συμπεράσματά της σε πολύ μικρό αριθμό περιπτώσεων και μόνον αυτές μπορεί να ελέγξει. Δημιουργεί έτσι τις προϋποθέσεις για την επεξεργασία της μαθηματικής επαγωγής.

Το 17^{ο} αιώνα ο J. Bernoulli ήταν ο πρώτος, ο οποίος, φέρνοντας αντιπαραδείγματα απέδειξε ότι η επαγωγική μέθοδος δεν ήταν αρκετή για την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων.

Γεννήθηκε συνεπώς η αναγκαιότητα μιας μεθόδου για την επιβεβαίωση, πέραν πάσης αμφιβολίας, της εικασίας, στην οποία οδηγούσε η επαγωγική μέθοδος.

Έτσι δημιουργήθηκε η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή όπως είναι σήμερα και εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε τέλεια μορφή από τον Pascal το 1654 στην απόδειξη μιας ιδιότητας του ομώνυμου τριγώνου Pascal, μιας ιδιότητας που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου. Ο Pascal, διατυπώνοντας την ιδιότητα αυτή, γράφει:

«*Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.*

- *Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.*
- *Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.*

Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος Έτσι λόγω του δευτέρου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο.» (Αδαμόπουλος κ.α. 2000)

Αργότερα, το 1889, ο Giuseppe Peano (1852 – 1932), στο έργο του «Arithmetices principia nova methodo exposita» συμπεριέλαβε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής στα πέντε αξιώματά του για τη θεμελίωση της αριθμητικής.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή είναι μία από τις εργασίες που έγιναν στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος *Θέματα Ειδικής Διδακτικής*, του Τομέα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, με καθηγητή τον Χρόνη Στράντζαλο. Ο σκοπός του μαθήματος ήταν η διαδικασία προσομοίωσης στον τρόπο σκέψης του ερευνητή, με κινητήρια δύναμη τη δημιουργική αμφιβολία.

Η ιστορική αναδρομή περιλαμβάνει νέα στοιχεία για την καταγωγή της μαθηματικής επαγωγής και τη σχέση των Πυθαγορείων με την αποδεικτική αυτή μέθοδο, στοιχεία που αναπτύχθηκαν λεπτομερώς στο μάθημα *Ιστορία των Μαθηματικών – Τα Στοιχεία του Ευκλείδη*, του Τομέα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, με καθηγητή τον Στυλιανό Νεγρεπόντη.

Ευχαριστούμε τους καθηγητές μας για τους δρόμους που μας άνοιξαν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Hayes Nicky, (1998) *Εισαγωγή στην Ψυχολογία*, Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
2. Polya, (1973) *How to solve it*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
3. Van der Waerden, B.L. (2000) *Η αφύπνιση της Επιστήμης*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
4. Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ., Σβέρκου Α., (2000) *Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ Ενιαίου Λυκείου*, Αθήνα: Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο - Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.
5. Κολέζα Ε.Γ., Μακρή Κ.Ν., Σούρλα Κ.Β., (1993) *Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.
6. Κοντογιάννη Ι., (1999 – 2000) *Συνοπτικές ενδεικτικές σημειώσεις για τις ανάγκες επιμορφωτικού σεμιναρίου*.
7. Νεγρεπόντη Στ., *Σημειώσεις παραδόσεων από το μάθημα* «*Ιστορία των Μαθηματικών – Τα Στοιχεία του Ευκλείδη*», χειμερινό εξάμηνο 2000 – 2001.
8. Στράντζαλου Χρ., *Σημειώσεις παραδόσεων από το μάθημα* «*Θέματα Ειδικής Διδακτικής*», χειμερινό εξάμηνο 2000 – 2001.
9. Τουμάση Μπ., (1994) *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.