Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2003)

2ο Συνέδριο Σύρου στις ΤΠΕ

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ SketcpadGR ΚΑΙ Function Probe - ΔΥΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Κωνσταντίνος Ντάρας

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ SketcpadGR ΚΑΙ Function Probe - ΔΥΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ντάρας Κωνσταντίνος

Μαθηματικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

kvndaras@in.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα σχολεία ήδη είναι εφοδιασμένα με διάφορα λογισμικά που έχουν στόχο την αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στη μαθησιακή διαδικασία. Για τα μαθηματικά Λυκείου με τη χρήση των λογισμικών SketchpadGR , Function Probe, και Cabri II πραγματοποιήθηκαν διδασκαλίες σε πολλές ενότητες . Στην παρούσα εργασία γίνεται δειγματικά αναλυτική παρουσίαση δύο ενοτήτων από τα μαθηματικά Λυκείου.

Για κάθε μια απ' αυτές έχει συνταχθεί μια φόρμα σχεδίου μαθήματος , που περιγράφει τη διαδικασία της διδασκαλίας και τους στόχους της ενότητας αναλυτικά, και ένα φύλλο εργασίας πάνω στο οποίο εργάζονται οι μαθητές

Για να μπορέσει να εργαστεί κανείς με τον Η/Υ πρέπει να έχει αποθηκευμένο σ' αυτόν το φάκελο «ενότητα7» και τον φάκελο «παραβολή» όπου είναι αποθηκευμένα αρχεία που δημιουργήθηκαν με τα ανωτέρω λογισμικά.

Α. ΕΝΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Φόρμα σχεδίου μαθήματος

Μάθημα: Άλγεβρα

Τάξη: Α΄ Ενιαίου Λυκείου

Ενότητα : Μελέτη συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(χ)=αχ^2 +βχ+γ$. (Διάρκεια 4 διδακτικές ώρες)

Εισηγητής : Κων/νος Ντάρας . Μαθηματικός στο Ε. Λύκειο Ζωσιμαίας Σχολής Ιωαννίνων. (Αποσπασμένος για το διδακτικό έτος 2002-03 στο 7ο Εν. Λύκειο Πατρων)

1. Διδακτικός στόχος – σκοπός

- Οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $f(χ)=φ(χ) \pm c$ και της μορφής $f(χ)=φ(χ \pm c)$ όταν είναι γνωστή η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(χ)
- Να κατασκευάζουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $αχ^2+βχ+γ$ με $α\neq0$ και να μελετούν αυτές ως προς τη μονοτονία, και τα ακρότατα
- Να επιλύουν προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων
- Να επιλύουν γραφικά την εξίσωση $αχ^2+βχ+γ$ με $α\neq0$.

2. Μέσα διδασκαλίας – υλικά – προϋποθέσεις

Το μάθημα είναι οργανωμένο να γίνει στο εργαστήριο Η/Υ το οποίο πρέπει να είναι εφοδιασμένο με προβολέα και εκτυπωτές . Στους υπολογιστές πρέπει να είναι εγκατεστημένα τα λογισμικά Function Probe, SketchpadGR και το πλήρες office 97.

3. Διδακτική προσέγγιση- αφόρμηση

Φορτώνεται το αρχείο «προσέγγιση» από το φάκελο και προσπαθούμε να λύσουμε το πρόβλημα που εμφανίζεται στην οθόνη. Βρίσκουμε τη συνάρτηση του εμβαδού Ε(χ) και την επαληθεύουμε με διπλό κλικ στο κουμπί «εμφάνιση» συνάρτησης εμβαδού. Επιλέγουμε το σημείο Γ και το μετακινούμε πάνω στον άξονα χ΄χ. Κατά τη μετακίνηση παρατηρούμε τη μεταβολή του εμβαδού του παραθύρου αλλά και την κίνηση του σημείου Ν που διαγράφει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού. Παρατηρούμε ακόμη ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν το Ν βρίσκεται στην κορυφή της γραφικής παράστασης. Με διπλό κλικ στο κουμπί «εμφάνιση» γραφικής παράστασης εμφανίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης Ε(χ). Με μετακίνηση του Γ όπως προηγούμενα τοποθετούμε το Ν στην κορυφή της γραφικής παράστασης και παίρνουμε από τις συντεταγμένες του Ν που εμφανίζονται την τιμή του χ και το μέγιστο εμβαδόν του παραθύρου. Τονίζεται εδώ η σημασία και χρησιμότητα της μελέτης συναρτήσεων της μορφής αχ2+βχ+γ και των γραφικών τους παραστάσεων.

4.**Αναλυτική περιγραφή.**

Α. Παρουσίαση της ενότητας: Μετά τη γραφική επίλυση του προβλήματος της προσέγγισης φορτώνουμε το αρχείο «μελέτη της συνάρτησης f(x)= φ(χ+c)+c1" από το φάκελο "ενότητα7". Έχουμε στην οθόνη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(χ)=α(χ+κ)^2+μ$ με α=2 κ=0 και λ=0 δηλ την $f(χ)=2χ^2$. Επιλέγουμε το σημείο μ κάνοντας κλικ απάνω του και με πατημένο το πλήκτρο του ποντικιού μεταφέρουμε το σημείο δεξιά μέχρι την τετμημένη 2 και παρακολουθούμε τη μετακίνηση της γραφικής παράστασης της f καθώς και τις τιμές των α,κ,μ (πάνω αριστερά). Διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της $2χ^2$ μετακινήθηκε δύο μονάδες πάνω. Μετακινούμε το σημείο μ δεξιά αριστερά και διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της $2χ^2$ μετακινείται πάω – κάτω αντίστοιχα κατά μ μονάδες όσο το μήκος μ. Πειραματίζονται οι μαθητές με διάφορες μετακινήσεις του μ και τελικά εξάγουμε του συμπέρασμα της μετακίνησης της $2χ^2$ όταν το μ αυξάνει ή ελαττώνεται. Μηδενίζουμε το μ μεταφέροντας το σημείο μ πάνω στον άξονα χ΄χ και πειραματιζόμαστε κατά τον ίδιο τρόπο με την τιμή του κ σύροντάς το δεξιά – αριστερά. και παρατηρώντας τις μετακινήσεις της γραφικής παράστασης της $2χ^2$ εξάγουμε το συμπέρασμα της μετακίνησης της γραφική παράστασης αριστερά - δεξιά καθώς το κ αυξάνεται ή ελαττώνεται αντίστοιχα διατυπώνεται εδώ το γενικό συμπέρασμα μετακίνησης γραφικής παράστασης δεξιά – αριστερά. Όμοιους πειραματισμούς μπορούμε να κάνουμε μετακινώντας το σημείο α και μάλιστα να έλθει στο 3^o τεταρτημόριο (α<0). Με το σχέδιο που είναι φορτωμένο μπορούμε να έχουμε τη γραφική παράσταση οποιουδήποτε τριωνύμου αρκεί να μετακινήσουμε τα α,κ,μ ώστα να πάρουν οι παράμετροι α,κ,μ τις επιθυμητές τιμές.

Β. Με γνωστό ότι η συνάρτηση $f(χ)=αχ^2 + βχ +γ$ γράφεται και $f(χ)=α(χ+β/2α)^2-Δ/4α$ (με κ=-β/2α και μ=-Δ/4α), μελετάμε την f(χ) ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και τη συμμετρία παίρνοντας με το γνωστό τρόπο διάφορες τιμές για τις παραμέτρους α,κ,μ. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(χ)=χ^2-3χ+2$, $f(χ)=χ^2+6χ-5$, $f(χ)=χ^2+4χ+4$, $f(χ)=χ^2-3χ+4$ και $f(x)=–2χ^2+4χ-3$ και από τα διαγράμματά τους βρίσκουμε τη μονοτονία , τα ακρότατα, την κορυφή τον άξονα συμμετρίας των και τις ρίζες (όπου υπάρχουν)

Γ. Φορτώνουμε το αρχείο «τριώνυμο» από το φάκελο «ενότητα7» και πειραματιζόμαστε για τις διάφορες τιμές των α,β,γ σχηματίζοντας τις γραφικές παραστάσεις οιουδήποτε τριωνύμου και μελετούμε την αντίστοιχη συνάρτηση από τη γραφικά παράσταση. Η μεταβολή των παραμέτρων α,β,γ γίνεται μι κλικ πάνω στα σημεία α,β,γ και με πατημένο το πλήκτρο του ποντικιού μετακινούμε το αντίστοιχο σημείο πάνω ή κάτω.

Επανάληψη – εμπέδωση. Από το φάκελο φορτώνουμε το αρχείο «σχέδιο μαθήματος» και

Α. Απαντάμε στις εφαρμογές 1- 4 επί του σχεδίου. Οι εφαρμογές 1 και 2 στοχεύουν στη σύνοψη των συμπερασμάτων της θεωρίας και είναι απαραίτητο εργαλείο για τις διάφορες εφαρμογές . Οι εφαρμογές 3 και 4 είναι κλειστού τύπου και στοχεύουν στην κατανόηση όλων των συμπερασμάτων της θεωρίας

Β. Για την άσκηση 5, λύνεται υπολογιστικά και έχει στόχο την εύρεση παραβολής από δοσμένα στοιχεία της γραφικής της παράστασης.

Γ. Για την άσκηση 6, γίνεται θεωρητικά η μελέτη των συναρτήσεων, γίνονται με το «χέρι» οι γραφικές παραστάσεις και επαληθεύονται με το λογισμικό Function Probe (F.P.) η μονοτονία ,τα ακρότατα και οι γραφικές παραστάσεις. Σκοπός η απόκτηση ευχέρειας μελέτης του τριωνύμου.

Δ. Για την άσκηση 7, επιλύεται υπολογιστικά μόνο και έχει σκοπό τον προσδιορισμό της παραβολής $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ από διάφορες συνθήκες.

Ε. Η άσκηση 8 επιλύεται κατασκευάζοντας τις γραφικές παραστάσεις με το «χέρι» και επαληθεύοντάς τες με το F.P. Στόχος η εύρεση των ριζών τριωνύμου και γενικά συνάρτησης γραφικά.

ΣΤ. Η άσκηση 9 επιλύεται γραφικά με το F.P. και γίνεται η μελέτη από τη γραφική παράσταση . Στόχος η μελέτη συναρτήσεων από γραφικές παραστάσεις όταν αυτές αποτελούνται από κλάδους

Ζ. Τα προβλήματα 10 , 11,12 , 13 και 14 παρμένα από διάφορους τομείς της παραγωγής στοχεύουν στο να εφαρμοστούν διάφορες τεχνικές κατασκευής συναρτήσεων και μελέτης αυτών σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε . Επιπλέον δε στοχεύουν και στο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι το τριώνυμο έχει πολλές εφαρμογές στην παραγωγή και δεν είναι μόνο μαθηματικά για τα μαθηματικά. Η επεξεργασία τους γίνεται υπολογιστικά και γραφικά με το F.P.

Η. Η άσκηση 15 είναι αρκετά σύνθετη για μαθητές Α΄ Λυκείου και γι’ αυτό δίνεται αρκετή βοήθεια από το διδάσκοντα τόσο στο σχηματισμό των συναρτήσεων όσο και στην κατασκευή των γραφικών παραστάσεων. Έχει ως σκοπό την επανάληψη συναρτήσεων, τον σχηματισμό συναρτήσεων με πολλαπλό τύπο, και την κατασκευή γραφικών παραστάσεων αυτών στο ίδιο σύστημα όπου ένας άξονας παίζει διπλό ρόλο τον της ταχύτητας και του διαστήματος. Αφού σχηματίσουμε τις συναρτήσεις από τους τύπους που δίνονται φορτώνουμε το αρχείο «πατίνι» από το φάκελο «ενότητα7» του φακέλου «συναρτήσεις Α» και επαληθεύουμε τους τύπους των συναρτήσεων. Στη συνέχεια πατώντας διαδοχικά τα κουμπιά «πρόσθεση κίνησης» παρατηρούμε την κίνηση του παιδιού και το σχηματισμό της γραφικής παράστασης των δύο συναρτήσεων. Τέλος πατώντας τα κουμπιά «εμφάνιση» ολοκληρώνουμε τις γραφικές παραστάσεις απ’ όπου βρίσκουμε και το ολικό διάστημα που έχει διανύσει.

5. Περί το τέλος της διδακτικής ώρας οι μαθητές τυπώνουν στους εκτυπωτές το σχέδιο μαθήματος ή το αντιγράφουν σε δισκέτα το φάκελο7 για περαιτέρω επεξεργασία στο σπίτι τους και για επίλυση τυχόν ασκήσεων που δεν πρόλαβαν να λύσουν στην τάξη.
6. Η εξέταση και ο έλεγχος των γνώσεων των μαθητών γίνεται με την εργασία που κάνουν στους Η/Υ και από τις ερωτήσεις που υποβάλουν ή τις απαντήσεις που δίνουν στα διάφορα ερωτήματα.

Φύλλο εργασίας

Η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, με $\alpha \neq 0$

1. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

   α. μετατοπίσεις γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

   - Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\varphi(\chi)+c$, με $c>0$ προκύπτει από ……………………
   - Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\varphi(\chi)-c$, με $c>0$ προκύπτει από …
   - Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\varphi(\chi-c)$, με $c>0$ προκύπτει από …
   - Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\varphi(\chi+c)$, με $c>0$ προκύπτει από …

   β. Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ (1)

   - Η γραφική παράσταση της (1) τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο …
   - Αν τέμνει τον άξονα χ΄χ τότε οι συντεταγμένες των σημείων τομής είναι …
   - Αν α>ο τότε:
     1. η συνάρτηση (1) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα …
     2. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα …
     3. έχει ελάχιστο για χ=… και είναι το …
   - Αν α<ο τότε:
     4. η συνάρτηση (1) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα …
     5. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα …
     6. έχει μέγιστο για χ=… και είναι το …

   γ. πίνακες μελέτης της (1)

   Με βάση τα 1,2,3, και 4,5,6, να συμπληρωθούν οι πίνακες:

-β/2α

Τιμές του χ	$-\infty$	$+\infty$
Μονοτονία – ακρότατα της $f(x)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, **α>0**		

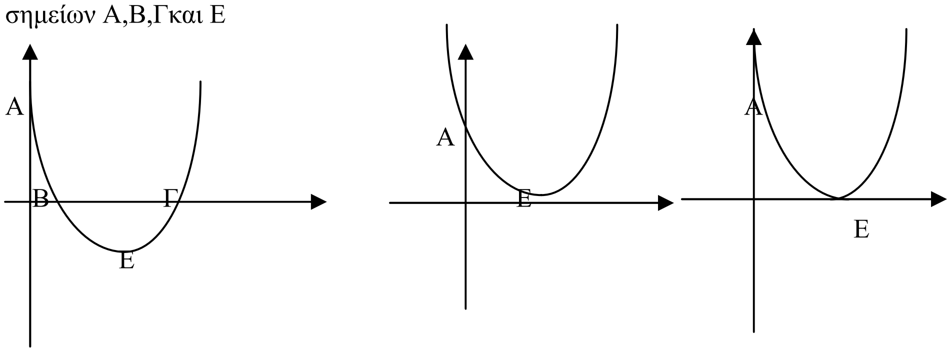
-Δ/4α

-β/2α

Τιμές του χ	$-\infty$	$+\infty$
Μονοτονία – ακρότατα της $f(x)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, **α<0**		

-Δ/4α

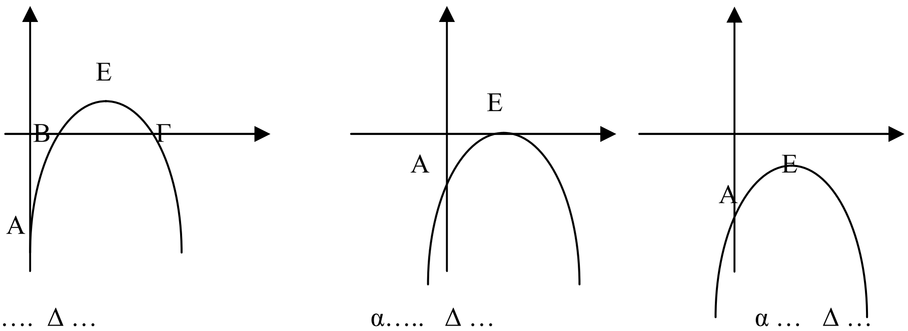
2. Για τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=αχ^2+βχ+γ$ να συμπληρωθούν οι σχέσεις των α και Δ ως προς το μηδέν καθώς και οι συντεταγμένες των σημείων Α,Β,Γκαι Ε



α…. Δ … α….. Δ … α … Δ …

Α(…..) Β(….) Α(….) Ε(….) Α(….) Ε(….)

Ε(…..) Γ(….)



α…. Δ … α….. Δ … α … Δ …

Α(…..) Β(….) Α(….) Ε(….) Α(….) Ε(….)

Ε(…..) Γ(….)

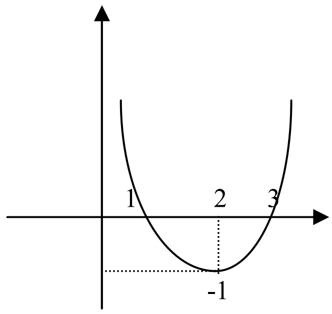
3. Να σημειώσετε το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λάθος σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις για τη συνάρτηση $f(χ)=αχ^2+βχ+γ$
   - Αν α>0 είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ Σ Λ
   - Αν α>0 έχει ελάχιστο το $–Δ/(4.α^2)$ Σ Λ
   - Είναι γνήσια μονότονη στο R Σ Λ
   - Αν α>ο έχει ελάχιστο στο –β/2.α Σ Λ
   - Αν α<0 είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty$, -β/2.α) Σ Λ
   - Αν α<0 και β>0 είναι γνησίως μονότονη στο (β/2.α ,-β/2.α) Σ Λ
   - Έχει κορυφή το σημείο (-Δ/4.α , -β/2.α) Σ Λ
   - Ο άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία χ=-β/2.α Σ Λ
4. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

- Η συνάρτηση $f(x) = \chi^2-4\chi+3$
  Α. έχει ελάχιστο στο 2 Β. έχει ελάχιστο το 1
  Γ. είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2 , 2]$ Δ. κανένα από τα προηγούμενα
- Η συνάρτηση $f(\chi)= -\chi^2+4\chi-3$
  Α. έχει κορυφή το (2,-1) Β. είναι γν. αύξουσα στο $[-2 , 2]$
  Γ. δεν τέμνει τον άξονα χ΄χ Δ. δεν έχει μέγιστο
- Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με $\alpha>0$ και $\gamma<o$
  Α. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα χ΄χ σε δύο σημεία
  Β. παρουσιάζει μέγιστο
  Γ. Η κορυφή βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ
  Δ. κανένα από τα προηγούμενα.
- Η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$, $\alpha>0$
  Α. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0 , \alpha+1)$
  Β. έχει ελάχιστο στο σημείο $(\alpha,0)$
  Γ. Η γραφική της παράσταση έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα χ΄χ
  Δ. κανένα από τα προηγούμενα.
- Η συνάρτηση $f(\chi)= -\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2$, $\alpha>0$
  Α. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty , \alpha/2)$
  Β. Η γραφική της παράσταση έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα χ΄χ
  Γ. Η κορυφή της βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ
  Δ. κανένα από τα προηγούμενα.
- Ο πίνακας

Τιμές του χ	$-\infty$	1	$+\infty$
Μονοτονία – ακρότατα της f(χ)	↗	7	↘

αντιστοιχεί στη συνάρτηση
  Α. $f(\chi)=-\chi^2+2\chi-6$ Β. $f(\chi)=2\chi^2-4\chi+9$
  Γ. $-\chi^2+2\chi+6$ Δ. σε καμία από τις προηγούμενες

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική Παράσταση της $f(\chi)= \chi^2+\beta\chi+\gamma$
   α. Να βρεθούν τα β και γ
   β. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της f(χ);
   γ. ποια είναι η εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφική παράστασης της f;
   δ. για ποιες τιμές του χ έχουμε f(χ)=7;



6. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:
   $f(\chi)=\chi^2+1$, $f(\chi)=\chi^2-4$, $f(\chi)=(\chi-2)^2$, $f(\chi)=(\chi+3)^2$,

$f(\chi)=\chi^2-4\chi+3$, $f(\chi)=-\chi^2+6\chi-5$, $f(\chi)=\chi^2+2\chi+4$

7. Να προσδιοριστεί η παραβολή $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ στις παρακάτω περιπτώσεις.
   α. όταν διέρχεται από τα σημεία Α(0,2), Β(1,0) , Γ(3 , 2)
   β. όταν τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Α(0,2) και έχει κορυφή Κ(1 , -2)
8. Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις
   $\chi^2-4\chi=0$, $\chi^2-6\chi+7=0$, $2\chi^2+\chi-15=0$
9. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις
   $f(\chi)=\chi^2-4|\chi|+3$, $f(\chi)=\chi^2-4|\chi-1|+1$, $f(\chi)=(\chi-1)^2+2|\chi-1|+1$

10 Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa\chi^2+\lambda\chi+3$
   α. Να βρείτε τα κ και λ ώστε να έχει στη θέση χ=1 τοπικό ακρότατο ίσο με –2
   β. Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση χ=1;

11. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ ($O=90^0$) παίρνουμε στην ΟΑ σημείο Μ και φέρουμε την ΜΝ παράλληλη στην ΟΒ. (το Ν επί της ΑΒ). Αν είναι (ΟΑ)=4 , (ΟΒ) =3 και (ΟΜ) =χ, και Ε(χ) το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ,
   α.Να αποδείξετε ότι: (ΜΝ)= $\dfrac{3(4-x)}{4}$, και Ε(χ)= $-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{2}x$
   β. Να βρείτε τη θέση του Μ για την οποία το εμβαδόν Ε(χ) μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;
12. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 2α ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν;

13. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής χ μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι Κ(χ)=$\dfrac{1}{2}x^2-50x+\mu$ χιλιάδες Ευρώ. Το εργοστάσιο έχει τη δυνατότητα να παράγει 60 μονάδες ημερησίως. Υπολογίστηκε ότι αν μια μέρα μείνει κλειστό το εργοστάσιο παθαίνει ζημιά 3 χιλ Ευρώ. Η είσπραξη από την πώληση χ μονάδων είναι Ε(χ)=10-2χ χιλ. Ευρώ. Να βρεθούν:
   α. η τιμή του μ
   β. η συνάρτηση κέρδους Ρ(χ)
   γ. Η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου για την οποία έχει μέγιστο κέρδος. Πόσες χιλιάδες Ευρώ είναι το μέγιστο κέρδος;
14. Ένας παραγωγός μήλων διαπίστωσε ότι τα μήλα στο κτήμα του ωρίμασαν και πρέπει να τα μαζέψει το αργότερο σε 6 εβδομάδες. Αντιμετωπίζει όμως το εξής πρόβλημα: Αν τα μαζέψει σήμερα κάθε δέντρο θα του αποδώσει 42 κιλά κατά μέσο όρο. Για κάθε εβδομάδα που περνάει εκτιμά ότι η απόδοση κάθε δέντρου θα μειώνεται κατά 1 κιλό (από το πέσιμο των μήλων στο έδαφος) ενώ η τιμή πώλησης θα αυξάνεται κατά 2 δρχ. το κιλό. Η σημερινή τιμή πώλησης είναι 80 δρχ το κιλό. Αν Ε(χ) είναι η είσπραξη από την πώληση σε χ εβδομάδες από την ωρίμανση των μήλων
   α. Να βρεθεί η Ε(χ)
   β. Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει τη μεγαλύτερη είσπραξη από κάθε μηλιά . Ποια θα είναι η μεγαλύτερη αυτή είσπραξη;

15. Πιτσιρίκος παίζει με το πατίνι του σε μια πλατεία. Δίνει μια ώθηση με το πόδι του και αποκτά ταχύτητα 3m/sec αλλά σ' όλη του την πορεία λόγω τριβών προχωρεί με επιβράδυνση 1m/sec^2 οπότε κάποια στιγμή σταματά. Κάθεται ένα sec και ξαναδίνει ώθηση που του αποδίδει ταχύτητα 4m/sec και δέχεται την ίδια επιβράδυνση οπότε κάποια στιγμή σταματά.
    Να βρεθούν
    α) η συνάρτηση της ταχύτητας και η συνάρτηση του διαστήματος με ανεξάρτητη μεταβλητή τον χρόνο t
    β) Να παρασταθούν γραφικά οι παραπάνω συναρτήσεις.
    γ) Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος του παιχνιδιού και το ολικό διάστημα που θα διανύσει.
    (Δίνονται: $υ=υ_0$-αt , s=$\upsilon_0 t - \frac{1}{2}at^2$. Όπου υ η τελική ταχύτητα, $υ_0$ η αρχική ταχύτητα, α η επιβράδυνση , s το διάστημα και t ο χρόνος κίνησης).

Β. ενότητα για τη Β΄ Λυκείου

Φόρμα σχεδίου μαθήματος

Μάθημα: Μαθηματικά (Θετικής – τεχνολογικής κατεύθυνσης)

Τάξη Β (θετικής κατεύθυνσης)

Ενότητα : Παραβολή

Εισηγητής : Κων/νος Ντάρας . Μαθηματικός στο Ε. Λύκειο Ζωσιμαίας Σχολής Ιωαννίνων

4. Διδακτικός στόχος – σκοπός

Να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της παραβολής, την εξίσωσή της , τις ιδιότητές της και προ παντός τις εφαρμογές των ιδιοτήτων της παραβολής σε πολλούς τομείς της παραγωγής.

5. Διδακτική προσέγγιση- αφόρμηση

Γίνεται αναφορά στην έννοια της παραβολής. (Ποια η τροχιά του ακοντίου στη ρίψη από αθλητή, πώς ο Αρχιμήδης έκαψε από μακριά τα πλοία του εχθρού, γιατί με τη μεγάλη σκάλα στα φανάρια του αυτοκινήτου βλέπουμε μακριά, γιατί οι κεραίες των ραντάρ έχουν σχήμα με τομή παραβολική.)

1. Μέσα διδασκαλίας – υλικά – προϋποθέσεις

Το μάθημα είναι οργανωμένο για να γίνεται στο εργαστήριο Η/Υ . Οι υπολογιστές πρέπει να περιέχουν το πρόγραμμα "sketchpadGR" και το εργαστήριο να είναι εξοπλισμένο με προβολέα εκτυπωτές και πλήρες office 97

2. Σύντομη περιγραφή

Μετά την διδακτική προσέγγιση δίνονται οι εξισώσεις της παραβολής και της εφαπτομένης της. Ελέγχουμε τα αποτελέσματα από το σχ. «παραβθ1» και «παραβ2» τα οποίο φορτώνουμε στον υπολογιστή. Απαντούμε στην εφαρμογή 1 του σχεδίου μαθήματος με τη χρήση του Word και τέλος για κάθε μια από τις εφαρμογές 2-12 του σχεδίου γίνεται η επεξεργασία με βάση τη θεωρία της εφαρμογής 1 και των σχημάτων που έχουν δημιουργηθεί για κάθε εφαρμογή με τη βοήθεια του " sketchpadGR".

3. Αναλυτική περιγραφή επιμέρους βημάτων διδασκαλίας

Α. Φορτώνουμε το αρχείο «παραβθ1» από το φάκελο «παραβολή». Παρατηρούμε ότι ΣΕ=ΣΔ. Μετακινούμε το σημείο Σ και παρατηρούμε πάλι ότι ΣΔ=ΣΕ και ότι πάντα η ΣΔ είναι κάθετη στην ευθεία δ. Επαναλαμβάνεται η κίνηση για πολλές θέσεις του σημείου Σ. Έτσι οδηγούμαστε στοΓ.Τ. της παραβολής . Με διπλό κλικ στο κουμπί « πρόσθεση κίνησης» παρατηρούμε το σχηματισμό της παραβολής με εστία το Ε και διευθετούσα την ευθεία δ. Με διπλό κλικ στο κουμπί «εμφάνιση» αξόνων και Γ.Τ. παίρνουμε την παραβολή την εξίσωσή της , τις συντεταγμένες της εστίας και την εξίσωση της διευθετούσας. Επιλέγουμε το σημείο Ε και το μετακινούμε πάνω στο άξονα χ΄χ. Παρακολουθούμε τις μορφές της παραβολής για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου p = 2.(τετμημένη του Ε). Ιδιαίτερα όταν το Ε περνά στον αρνητικό ημιάξονα χ΄χ. (p<0). Δίνεται εδώ ο ορισμός της κορυφής και η ιδιότητα της συμμετρίας ως προς τον άξονα χ΄χ. Για να δώσουμε την έννοια της εφαπτομένης στην παραβολή σ' ένα σημείο της , παίρνουμε δύο σημεία πάνω στην παραβολή και φέρουμε την ευθεία αυτών των σημείων. Επιλέγουμε το ένα και το μετακινούμε μέχρι να συμπέσει με το άλλο παρακολουθώντας τη μεταβολή της ευθείας και δίνουμε την έννοια της εφαπτομένης. Σβήνουμε τα σημεία που πήραμε στην παραβολή . Διπλοπατώντας στο κουμπί «εμφάνιση» εφαπτομένης παίρνουμε την εφαπτομένη στο σημείο Ρ της παραβολής και την εξίσωσή της . Μετακινώντας το σημείο Ρ πάνω στην παραβολή παρατηρούμε τη θέση της εφαπτομένης και ιδιαίτερα όταν το Ρ ταυτιστεί με την αρχή των αξόνων. Διπλοπατάμε το κουμπί «εμφάνιση» ανακλαστική ιδιότητα , μετακινούμε το Ρ πάνω στην παραβολή και παρατηρούμε τα μέτρα των γωνιών ΕΡΛ και ΛΡΜ για τις διάφορες θέσεις του Ρ. Έτσι διαπιστώνεται η ανακλαστική ιδιότητα και εξηγείται το κάψιμο των πλοίων από τον Αρχιμήδη και η μεγάλη σκάλα των φαναριών των αυτοκινήτων

Β. Φορτώνεται το αρχείο «παραβ3» και με διπλό κλικ στα κουμπιά «πρόσθεση κίνησης πειραματιζόμαστε για τις παραβολές $χ^2$=2pψ, p>0 και $χ^2$=2pψ , p<0

Γ. συμπληρώνονται οι εφαρμογές 1 , 2 , 3 , 4

Φορτώνουμε το αρχείο «φύλλο εργασίας παραβολή» από το φάκελο « παραβολή» και απαντούμε στις εφαρμογές 1 ,2 , 3 και 4. Η μεν πρώτη αποτελεί την ανακεφαλαίωση της θεωρίας ,οι δε άλλες στοχεύουν στην εμπέδωση της θεωρίας και στην απομνημόνευση των τύπων.

Δ. λύνονται οι ασκήσεις 5 και 6 μόνο αναλυτικά ,με σκοπό τη σύγκριση των αποστάσεων ΕΜ και ΕΟ (από την 5) και την εύρεση της εφαπτομένης της παραβολής από διάφορες δοσμένες συνθήκες .

Ε. Εφαρμογή 7

- Βρίσκουμε αναλυτικά την εξίσωση του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.
- Φορτώνουμε το σχέδιο « παραβ7» και με διπλό κλικ στην πρόσθεση κίνησης , παρατηρούμε πώς δημιουργείται ο γεωμετρικός τόπος αλλά και σε ποιο σημείο της ευθείας του Γ.Τ τελειώνει αυτός . Σκοπός η εξοικείωση των μαθητών με τους Γ.Τ. χρησιμοποιώντας την παραβολή αλλά και επανάληψη στοιχείων της ευθείας

ΣΤ. Εφαρμογή 8

- Φορτώνουμε το σχ. «παραβ8» και με τη βοήθειά του υπολογίζουμε τα γινόμενα των τετμημένων και των τεταγμένων

- Με διπλό κλικ στην πρόσθεση κίνησης παρατηρούμε ότι ενώ μεταβάλλονται οι συντεταγμένες των Α και Β , τα παραπάνω γινόμενα παραμένουν σταθερά . Σκοπός της εφαρμογής, να συνδυάσουν οι μαθητές εφαρμογές εξισώσεων ευθείας και παραβολής καθώς και το γινόμενο των ριζών τριωνύμου.

Ζ. εφαρμογή 9

- Βρίσκουμε τον Γ.Τ. αναλυτικά
- Φορτώνουμε το σχέδιο «παραβ9» και με διπλό κλικ στην πρόσθεση κίνησης παρατηρούμε τη δημιουργία του Γ.Τ.

Επιλέγουμε διαδοχικά το σημείο Μ , το σημείο Ε και την ευθεία ΓΔ. Έπειτα από το μενού κατασκευή επιλέγουμε γεωμετρικό τόπο. Έτσι κατασκευάζεται ο Γ.Τ.

Σκοπός η εύρεση Γ.Τ. με τη χρήση των παραμετρικών εξισώσεων για τις συντεταγμένες σημείων.

Η. Εφαρμογή 10.

Φορτώνουμε το σχέδιο «παραβ10». Με τη βοήθειά του βρίσκουμε αναλυτικά την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου . τέλος με διπλό κλικ στην πρόσθεση κίνησης παρατηρούμε την κατασκευή του Γ.Τ. Σκοπός , όμοιος με την εφαρμογή 7

Θ. Εφαρμογή 11.

Φορτώνουμε το σχ. «παραβ11». Με τη βοήθειά του και με τη βοήθεια της ανακλαστικής ιδιότητας συγκρίνουμε τα μπλε ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ , ΝΕ και ΡΕ . Σκοπός η εφαρμογή της ανακλαστικής ιδιότητας και η σύνδεση αναλυτικής και Ευκλείδειας γεωμετρίας .

Ι. Εφαρμογή 12

Φορτώνουμε το σχέδιο « παραβ12» . Με τη βοήθειά του βρίσκουμε ή αποδεικνύουμε τα i. , ii. , iii. της εφαρμογής .Επιλέγοντας το Β ή το Γ και μετακινώντας το πάνω στην παραβολή μέχρι η ε να περνά από την εστία ή το Α να βρεθεί στην διευθετούσα επαληθεύουμε τα ii. και iii. Σκοπός η εύρεση της πολικής ευθείας ενός σημείου Α και η εφαρμογή αυτής για εύρεση ιδιοτήτων της παραβολής

ΙΑ. Εφαρμογή 13.

Φορτώνουμε το σχέδιο «παραβ13» και αιτιολογούμε ότι το σημείο Ρ βρίσκεται πάνω στη C. πειραματιζόμαστε με τις διάφορες θέσεις του Δ πάνω στη δ και παρατηρούμε τη σχετική θέση της ΡΜ ως προς τη C. Αποδεικνύουμε τέλος ότι η ΡΜ είναι εφαπτομένη της C στο σημείο της Ρ. Στόχος η εμπέδωση του ορισμού της παραβολής και η προσφορά μιας απλής μεθόδου κατασκευής εφαπτομένης παραβολής σε σημείο της

ΙΒ. Οι εφαρμογές 14-16 δίνονται για εξάσκηση και ανάληψη πρωτοβουλιών των μαθητών .

Φύλλο εργασίας

Παραβολή

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις

Α. Ορισμοί

- Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Ονομάζουμε παραβολή ..
- Το σημείο Ε ονομάζεται …
  και η ευθεία δ ονομάζεται …
- Αν Α είναι η προβολή του Ε στη δ τότε το μέσο Κ του ΕΑ είναι σημείο της παραβολής και λέγεται …

Β. εξίσωση της παραβολής

- Η εξίσωση της παραβολής με εστία Ε(p/2,0) και διευθετούσα δ: χ= -p/2 δίνεται από τον τύπο:…
- Η εξίσωση της παραβολής με εστία Ε(0, p/2)) και διευθετούσα δ: ψ= -p/2 δίνεται από τον τύπο:…

Γ. Εξίσωση εφαπτομένης

Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής ψ^2=2pχ στο σημείο της $M(\chi_1 , \psi_1)$ δίνεται από τον τύπο: ….

Ενώ της χ^2=2pψ από τον τύπο: …

Δ. Ιδιότητες

Έστω η παραβολή ψ^2=2pχ

- Αν p>0 βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από …
  Ενώ αν p<0 βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από …
- Είναι συμμετρική ως προς …
- (Ανακλαστική ιδιότητα) . Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ….
- Για να φέρουμε την εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο της $M(\chi_1 , \psi_1)$ αρκεί να ενώσουμε τα σημεία …

2. Να σημειώσετε το Σ αν είναι σωστή ή το Λ αν είναι λάθος σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις

i. Η παραβολή χ^2=2pψ έχει διευθετούσα δ: ψ=-p/2 και εστία Ε(p/2 , 0) Σ Λ

ii. Η απόσταση της εστίας Ε από τη διευθετούσα δ της παραβολής ψ^2=2pχ είναι |p| Σ Λ

iii. Η συνάρτηση ψ=αχ^2 έχει εστία Ε($\frac{1}{4\alpha}$, 0) Σ Λ

iv. Η εφαπτομένη της παραβολής ψ^2=2pχ που περνά από το σημείο (-p/2,1) έχει εξίσωση ψ=pχ- p^2/2 Σ Λ

v. Η ευθεία χ=0 είναι εφαπτομένη της παραβολής ψ^2=2pχ Σ Λ

vi. Αν μια ευθεία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με μια παραβολή , τότε η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής Σ Λ

3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Παραβολή	Συν/νες εστίας	Εξίσωση διευθετούσας	Απόσταση διευθετούσας από την εστία
ψ^2=8χ			

$\psi^2= - 8\chi$			
$\psi=4\chi^2$			
$\psi= - 4\chi^2$			
$\psi^2=4\alpha\chi$			
$\psi=-\frac{1}{4\alpha}x^2$			

4. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. Η ευθεία $\psi=\chi-1$ και η παραβολή $\psi^2=4\chi$ έχουν κοινά σημεία

Α. δύο Β. ένα Γ. κανένα

ii. οι παραβολές $\psi^2=2p\chi$ και $\chi^2=2p\psi$ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι:

Α. $\psi=2p\chi$ Β. $\chi=2p\psi$ Γ. $\psi=\chi$ Δ. $\psi=-\chi$

iii. Η εξίσωση της παραβολής με εστία την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την ευθεία $\psi=2$ είναι:

Α. $\chi^2=4(\psi+1)$ Β. $\chi^2=-4(\psi-1)$ Γ. $\psi^2=-4(\chi-1)$ Δ. άλλη

5. Δίνεται η παραβολή C: $\psi^2=2p\chi$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η απόσταση του σημείου $M(\chi,\psi)$ της C από την εστία Ε είναι ίση με $|\chi+p/2|$

ii. Η κορυφή της είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της C.

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C: $\psi^2=4\chi$, η οποία :

i. Είναι παράλληλη στη ευθεία ε: $\psi=\chi-1$

ii. είναι κάθετη στην ευθεία ε: $\psi=-2\chi+1$

iii. διέρχεται από το σημείο Α(-2,1)

7. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών της παραβολής C: $\psi^2=4\chi$ που έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$, βρίσκονται σε ευθεία γραμμή. Ποια είναι η εξίσωση της γραμμής αυτής;

8. Μια χορδή ΑΒ της παραβολής $\psi^2=\alpha\chi$ περνά από την εστία της . Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των τετμημένων των άκρων Α,Β καθώς και το γινόμενο των τεταγμένων είναι σταθερό.

9. Μια ευθεία $\psi=\lambda\chi$ με $\lambda\neq 0$ τέμνει την παραβολή $\psi^2=4\chi$ σε δύο σημεία Α και Β

i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι: $\left(\frac{2}{\lambda^2},\frac{2}{\lambda}\right)$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το Μ όταν το λ μεταβάλλεται

10. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στον κύκλο C: $\chi^2+(\psi-2)^2=4$ και του άξονα χ΄χ είναι μια παραβολή και μια ευθεία. Να βρεθούν οι συν/νες της εστίας και η εξίσωση της διευθετούσας αυτής της παραβολής.
11. Έστω η παραβολή $\psi^2=2p\chi$ με εστία Ε. Σε τυχαίο σημείο της Μ φέρουμε την εφαπτομένη στην παραβολή και την κάθετη σ' αυτή οι οποίες τέμνουν τον άξονα χ΄χ στα σημεία Ν και Ρ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΝΕ=ΕΡ.
12. Έστω η παραβολή C: $\psi^2=2p\chi$ και ε_1 , ε_2 οι εφαπτόμενες της C από ένα σημείο $A(\chi_0, \psi_0)$ εκτός αυτής . Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής των ε_1 και ε_2, να αποδείξετε ότι

i. η ευθεία ε έχει εξίσωση $\psi\psi_0=p(\chi+\chi_0)$

ii. Η ευθεία ε διέρχεται από την εστία αν και μόνο αν το σημείο Α βρίσκεται στη διευθετούσα της παραβολής

iii. Αν το σημείο Α ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής , τότε οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

13. Έστω η παραβολή C: $\psi^2=2p\chi$ με διευθετούσα δ: χ=-p/2 και εστία Ε(p/2,0)

i. Η κάθετη στη δ σε τυχαίο σημείο της Δ και η μεσοκάθετη στη ΔΕ τέμνονται στο σημείο $P(\chi_1,\psi_1)$. Πού βρίσκεται το Ρ;

ii. Τι σχέση έχουν η μεσοκάθετη της ΔΕ και η C ;

14. Από το σημείο Μ(1,4) της παραβολής $\psi^2=4\chi$ φέρουμε την εφαπτομένη η οποία συναντά τον άξονα ψ΄ψ στο Ρ . Αν Ε είναι η εστία της , να αποδείξετε ότι η γωνία ΕΡΜ είναι ορθή.
15. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων , άξονα συμμετρίας τον Οχ και να εφάπτεται στην ευθεία ψ=4χ+1 .
16. Θεωρούμε την παραβολή $\chi^2=\psi$ και την ευθεία που τέμνει την παραβολή στα σημεία M_1 ,M_2 και τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Κ(0,1). Αν Ρ , Q είναι οι προβολές των M_1, M_2 στον άξονα Οχ, να αποδείξετε ότι η γωνία PKQ είναι ορθή .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

4. Cabri- geometry II εγχειρίδιο χρήσης λογισμικού. ΙΤΥ εκδόσεις Καστανιώτη 2001
5. Function Probe Βιβλίο χρήστη ΙΤΥ _ΠΙ EXODUS 2001
6. The geometer's Sketchpad ΙΤΥ –ΠΙ εκδόσεις Καστανιώτη 2000
7. Αδαμόπουλος κλπ. Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Ε. Λυκείου ΟΕΔΒ 2001
8. Ανδρεαδάκη Σ., κλπ Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ΟΕΔΒ 2001
9. Ανδρεαδάκη Σ., κλπ Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου ΟΕΔΒ έκδοση Ζ 1998
10. Αξιολόγηση των μαθητών της Α΄ Λυκείου. Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας. Αθήνα 1998
11. Εκπαιδευτικό Λογισμικό. Πρώτη γνωριμία με το διαθέσιμο εκπαιδευτικό λογισμικό. ΙΤΥ Πάτρα 2002.
12. Ξένου Θανάση, Άλγεβρα και αναλυτική γεωμετρία τεύχος 2. Εκδόσεις Ζήτη . Θεσσαλονίκη 1998
13. Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003 . τεύχος Β΄ ΟΕΔΒ