

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2003)

2ο Συνέδριο Σύρου στις ΤΠΕ



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΚΙΩΝ

Χαράλαμπος Τσακνάκης

Βιβλιογραφική αναφορά:

Τσακνάκης Χ. (2025). ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΚΙΩΝ . *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση, 1*, 305–314. ανακτήθηκε από <https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/6955>

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΚΙΩΝ

Τσακνάκης Χαράλαμπος
ΕΑΙΤΥ – Δρ., Επιμορφωτής
tsaknak@cti.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της παρούσας εισήγησης εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο ανάπτυξης διδακτικών προσεγγίσεων για την κατανόηση και εμπέδωση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών μέσα από τον πειραματισμό, την διερεύνηση, την αναπαράσταση και την κατασκευή μοντέλων με την χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Η δραστηριότητα που παρουσιάζεται και αναλύεται ως παράδειγμα εστιάζεται στην διερεύνηση των ιδιοτήτων και των σχέσεων που συνδέουν την σκιά ενός επιπέδου σχήματος με το σχήμα καθεαυτό και της αποκάλυψης, μέσα από την διερεύνηση αυτή, της έννοιας της γραμμικής απεικόνισης που είναι μια από τις πλέον θεμελιώδεις στα Μαθηματικά, την Φυσική, αλλά και σε άλλους κλάδους, όπως π.χ. Οικονομικά, κλπ.

Η προσέγγιση που ακολουθείται έχει ως γνώμονα την σύνδεση της φυσικής εμπειρίας των μαθητών με την δημιουργία αφηρημένων εννοιών, την εξάσκηση επιδεξιότητων κατασκευής μοντέλων από πειραματικά δεδομένα, την διερεύνηση τρόπων και μεθόδων για το πως ένας μεγάλος αριθμός πειραματικών παρατηρήσεων μπορεί να περιγραφεί με μικρό αριθμό κανόνων και ιδιοτήτων που τις διέπουν.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας, Δημιουργία Εννοιών, Διερεύνηση, Απεικονίσεις, Κατασκευή, Μοντέλο, Προσομοίωση, Σχήματα, Σκιές

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προσέγγιση που υιοθετείται εδώ είναι κατά ένα μεγάλο μέρος αντίστροφη από αυτήν που συνηθίζεται στην παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών. Αντί να διατυπωθούν εξ' αρχής με σειριακό τρόπο οι ορισμοί ή τα αξιώματα, καθώς και οι σχέσεις, οι ιδιότητες και οι συμβολικές αναπαραστάσεις της έννοιας που θέλουμε να παρουσιάσουμε, ξεκινάμε αντίθετα με ένα φυσικό σενάριο που εύκολα συνδέεται με την φυσική εμπειρία και τα βιώματα των μαθητών και του οποίου η πειραματική διερεύνηση, ανάλυση και κατανόηση περνάει αναγκαστικά μέσα από την έννοια που θέλουμε να παρουσιάσουμε. Κατ' αυτό τον τρόπο ενθαρρύνεται η ανάπτυξη αφαιρετικών και κριτικών ικανοτήτων, εμβαθύνεται η διαδικασία της μάθησης, και γίνεται πιο ολοκληρωμένη η κατανόηση των εννοιών και των όποιων συνακόλουθων υπολογιστικών διαδικασιών.

Οι έννοιες αποτελούν πρωταρχικές και θεμελιώδεις οντότητες που είναι αποτέλεσμα νοητικών αφαιρέσεων με κάποια ιστορική σημασία και διαδρομή η καθεμία. Η κάθε έννοια, τουλάχιστον η κάθε σημαντική έννοια στα Μαθηματικά και την Φυσική, έχει μορφοποιηθεί μέσα από πολλές, πολυετείς και κοπιώδεις παρατηρήσεις, πειράματα, αναγωγές, απλουστεύσεις, υποθέσεις, θεωρήσεις και απόψεις. Η κατανόηση των εννοιών αυτών καθ' εαυτών καθώς και η κατανόηση του γιατί και πως επινοήθηκαν, τι ανάγκες έρχονται να καλύψουν, πως συνδέονται με την

φυσική εμπειρία, τι εμπεριέχουν, κλπ. αποτελεί ένα πρώτης τάξης κίνητρο για μάθηση και περαιτέρω ενασχόληση. Δεν εννοούμε βέβαια ότι η εξιστόρηση της διαδρομής και του σχηματισμού μιας έννοιας αποτελεί και ικανή προϋπόθεση για την κατανόησή της. Θεωρούμε όμως ότι η χρήση κατάλληλα επιλεγμένων παραδειγμάτων και σεναρίων της φυσικής εμπειρίας και γεωμετρικών αναπαραστάσεων που προσομοιώνουν την φυσική πραγματικότητα και αξιοποιούν την δύναμη της εικόνας μπορούν να αποτελέσουν σημαντικούς παράγοντες προς την κατεύθυνση αυτή. Μια τέτοια προσέγγιση εμπεριέχει την προσομοίωση κάποιων συνθηκών που αποτελούν μέρος του προβληματισμού που οδηγεί στην διαμόρφωση της συγκεκριμένης έννοιας.

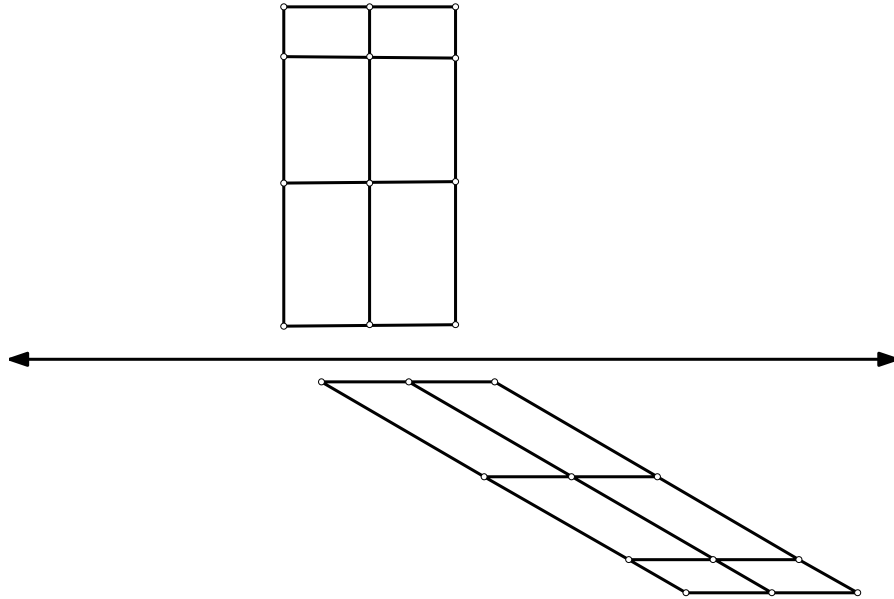
Από την άλλη πλευρά, οι υπολογιστικές διαδικασίες, σε διάκριση από τις έννοιες, αποτελούν το λογιστικό μέρος των προβλημάτων, το μέρος εκείνο στο οποίο ανάγεται το κάθε πρόβλημα μέσα από διεργασίες ανώτερου επιπέδου αφαίρεσης. Βέβαια και οι πράξεις (π.χ. πρόσθεση, πολλαπλασιασμός αριθμών) από τις οποίες συντίθενται οι υπολογισμοί είναι και αυτές έννοιες που έχουν την δική τους οντότητα, ιστορική σημασία και διαδρομή και η βαθύτερη κατανόηση σύνθετων εννοιών περνάει και μέσα από την εξάσκηση με τέτοιες πράξεις. Είναι ωστόσο πιο στοιχειώδεις και θεωρούμε δεδομένη την κατανόησή τους από μαθητές γυμνασίου. Το ουσιώδες είναι να καταδειχτεί το ποιοι στοιχειώδεις υπολογισμοί πρέπει να γίνουν, πράγμα που προκύπτει μόνο από μια βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που εμπεριέχονται στην διατύπωση του προβλήματος. Έτσι, π.χ. το πώς ακριβώς κινείται η σκιά ενός σώματος πάνω σ' ένα επίπεδο όταν κινείται το ίδιο το σώμα ή τι ακριβώς σχήμα έχει η σκιά αυτή σε σχέση με το σχήμα του σώματος αποτελούν αντικείμενα κάποιων αριθμητικών υπολογισμών που για να βρεθεί το τι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν χρειάζεται μια βαθύτερη κατανόηση των εννοιών της απεικόνισης από το σώμα στη σκιά του.

Η έννοια της απεικόνισης είναι αυτή που προσπαθούμε να καταδείξουμε τόσο σε σύνδεση με την φυσική εμπειρία όσο και με τη βοήθεια γεωμετρικών κατασκευών στο επίπεδο. Η δραστηριότητα που παρουσιάζεται αφορά την διερεύνηση των ιδιοτήτων της απεικόνισης από ένα επίπεδο σχήμα σε ένα άλλο επίπεδο σχήμα που είναι η σκιά του μέσα από την παρατήρηση, το πείραμα, τον σχεδιασμό και την κατασκευή με την χρήση δυναμικών γεωμετρικών εργαλείων για την προσομοίωση των παρατηρούμενων φαινομένων. Ο στόχος είναι οι μαθητές να πειραματιστούν με την σχέση που συνδέει ένα σχήμα με την σκιά του σε ένα πραγματικό περιβάλλον, να ανακαλύψουν σιγά-σιγά τις ιδιότητες της απεικόνισης, να μπορέσουν να δημιουργήσουν ένα μοντέλο, να περάσουν στην κατασκευή της απεικόνισης με την χρήση γεωμετρικών εργαλείων, να επιβεβαιώσουν την ορθότητα της κατασκευής τους συγκρίνοντας με τα πραγματικά πειραματικά δεδομένα μέσα από πλήθος παραδειγμάτων της επιλογής τους. Κατ' αυτό τον τρόπο, οι μαθητές, μέσα από πειράματα, παρατηρήσεις, σχεδιασμούς και κατασκευές θα οδηγηθούν στην αποκάλυψη της αφηρημένης μαθηματικής έννοιας της γραμμικής απεικόνισης. Παράλληλα, επιτυγχάνεται η εξάσκηση των αφαιρετικών ικανοτήτων και η μάθηση των διαδικασιών και της μεθοδολογίας επεξεργασίας πειραματικών δεδομένων και συναγωγής συμπερασμάτων από αυτά.

2. ΣΕΝΑΡΙΟ

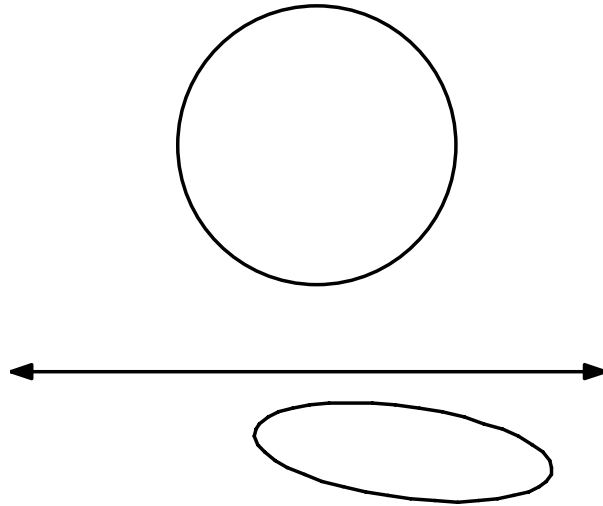
Αν ένα ηλιόλουστο πρωινό παρατηρήσουμε το αποτύπωμα στο πάτωμα ενός παραθύρου που βρίσκεται σε τοίχο νοτιοανατολικού προσανατολισμού θα

διαπιστώσουμε ότι αυτό ούτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι, σχήμα που συνήθως έχουν τα παράθυρα, ούτε οι διαστάσεις του είναι ίδιες με αυτές του παραθύρου (Σχήμα 1). Επίσης, είναι κοινότοπη η διαπίστωση ότι το σχήμα του αποτυπώματος του παραθύρου αλλάζει ανάλογα με την ώρα της ημέρας.



Σχήμα 1: Αποτύπωμα ορθογωνίου παραθύρου στο πάτωμα

Αν τώρα βάλουμε ένα βιβλίο πάνω στην επιφάνεια του παραθύρου θα δούμε τη σκιά του να έχει ένα σχήμα που δεν είναι καθόλου ίδιο με το σχήμα του βιβλίου. Το ίδιο θα συμβεί αν βάλουμε και ένα κυκλικό δίσκο, το σχήμα της σκιάς του θα είναι κάτι που μοιάζει με έλλειψη παρά με κύκλο (όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 2: Αποτόπωμα κυκλικού δίσκου στο πάτωμα

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη σκιά ενός οποιουδήποτε επιπέδου σχήματος πάνω στην επιφάνεια του παραθύρου, πως θα μπορούσαμε να το κάνουμε αυτό; Πως αλλάζουν τα ευθύγραμμα μήκη, οι γωνίες, τα οποιαδήποτε σχήματα όταν πάμε από τα αντικείμενα στις σκιές τους;

Για μια συγκεκριμένη διάταξη τοίχου, πατώματος, παραθύρου, γωνίας προσπτώσεως ηλιακών ακτινών και σχήματος του οποίου τη σκιά θέλουμε να υπολογίσουμε, θα μπορούσε κανείς να εμπλακεί σε πολλούς υπολογισμούς που να εμπλέκουν στερεομετρία, τριγωνομετρία, άλγεβρα και συστήματα συντεταγμένων στον τρισδιάστατο χώρο. Το αποτέλεσμα εν τούτοις θα ήταν για μια ειδική περίπτωση μόνο. Εξ' άλλου, υπολογισμοί τέτοιου είδους δεν είναι γενικά πολύ απλοί για μαθητές γυμνασίου και λυκείου.

Αν θέλουμε να δούμε το πρόβλημα συνολικά και να διατυπώσουμε γενικούς κανόνες που θα μας επιτρέπουν να κάνουμε οποιουδήποτε τέτοιους υπολογισμούς για οποιαδήποτε διάταξη, θα πρέπει να σκεφτούμε από τη σκοπιά του τι ιδιότητες έχει αυτή η απεικόνιση που χαρακτηρίζει την μετάβαση από το αντικείμενο στη σκιά του.

Πριν λοιπόν εμπλακούμε σε επιμέρους υπολογισμούς που μπορεί να μας κάνουν να χάσουμε την συνολική εικόνα, μπορούμε να δούμε πιο προσεκτικά το ζήτημα με γνώμονα την αποκάλυψη θεμελιωδών ιδιοτήτων της απεικόνισης από το αντικείμενο στη σκιά του.

Για παράδειγμα, μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι τα όρια του περιγράμματος της σκιάς του παραθύρου πάνω στο πάτωμα είναι ευθύγραμμα όπως και του ίδιου του παραθύρου. Αυτό συμβαίνει και με τα οριζόντια και με τα κατακόρυφα όρια και με τα χωρίσματα του παραθύρου. Το ίδιο θα συμβεί και αν βάλουμε τυχαία στο παράθυρο ένα χάρακα, ένα μολύβι, ένα βιβλίο ή οτιδήποτε άλλο έχει ευθύγραμμα τμήματα. Άρα,

δεν θα ήταν παράλογο να ισχυριστούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα απεικονίζεται πάλι σε ευθύγραμμο τμήμα και να πούμε ότι αυτή είναι μια πρώτη ιδιότητα της απεικόνισης που μελετάμε. Ένα δεύτερο πράγμα που θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε είναι ότι αν τα χωρίσματα του παραθύρου το κόβουν π.χ. στο μισό ή στο ένα τρίτο τότε και οι αντίστοιχες σκιές των χωρισμάτων κόβουν το περίγραμμα της σκιάς του παραθύρου πάνω στο πάτωμα στην ίδια αναλογία, δηλ. στο μισό ή στο ένα τρίτο αντιστοίχως. Θα μπορούσε κανείς να πειραματιστεί εύκολα βάζοντας π.χ. ένα μολύβι σε μία τυχαία θέση στο παράθυρο που κόβει ένα χωρίσμα οριζοντίως ή καθέτως με μια αναλογία για να διαπιστώσει ότι και η σκιά του μολυβιού κόβει την αντίστοιχη σκιά του χωρίσματος στην ίδια ακριβώς αναλογία. (Βέβαια, θα πρέπει κανείς να λάβει υπ' όψιν και να αναφερθεί λίγο στην φυσική και στερεομετρική άποψη του θέματος του σχηματισμού σκιών και να περιγράψει και τα όρια ισχύος των παρατηρήσεων αυτών πριν καταλήξει σε οριστικά συμπεράσματα. Για παράδειγμα, τα παραπάνω δεν θα ήταν ακριβή αν η πηγή φωτός ήταν κοντά στο κάθετο επίπεδο).

Ένας τρόπος που θα επέτρεπε την πραγματοποίηση πειραμάτων με σχήματα και σκιές για την μελέτη του φαινομένου είναι αυτή που μόλις περιγράψαμε με τον τοίχο, το πάτωμα και το παράθυρο, αν είναι δυνατό να γίνει. Για μεγαλύτερη ευελιξία θα μπορούσε κανείς να υλοποιήσει μια πειραματική διάταξη που να περιλαμβάνει δυο επίπεδες διαφανείς επιφάνειες τοποθετημένες κάθετα ή υπό οποιαδήποτε γωνία μεταξύ τους και μια πηγή φωτός που να είναι μακριά από την επιφάνεια πρόσπτωσης του φωτός. Στη επιφάνεια πρόσπτωσης θα μπορούσαν να τοποθετούνται οποιαδήποτε επίπεδα αντικείμενα και να παρατηρούνται τα αποτυπώματά τους πάνω στην άλλη επιφάνεια για διαφορετικές θέσεις της πηγής φωτός και γωνίες των επιπέδων μεταξύ τους. Εναλλακτικά των παραπάνω και για ακόμη μεγαλύτερη ευελιξία θα μπορούσε κανείς με την χρήση εργαλείων λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσει ένα μοντέλο στο επίπεδο που να προσομοιώνει την παραπάνω διαδικασία, φροντίζοντας όμως να αποκρύψει όλα τα στοιχεία του μοντέλου και των κανόνων που το συνθέτουν δεδομένου ότι αυτό ακριβώς είναι το ζητούμενο προς ανακάλυψη από τους μαθητές.

3. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Τα βασικά ζητούμενα στην προσέγγιση που προτείνεται είναι:

(α) Να διατυπωθούν οι ελάχιστοι κανόνες που διέπουν την σχέση αντικειμένου-σκιάς από ένα επίπεδο σε ένα άλλο επίπεδο για όλες τις πιθανές διατάξεις.

(β) Με την χρήση των κανόνων που βρέθηκαν να κατασκευαστεί ένα μοντέλο στο επίπεδο που να προσομοιώνει πλήρως το φαινόμενο.

Οι κανόνες που θα διατυπωθούν θα πρέπει να πληρούν τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

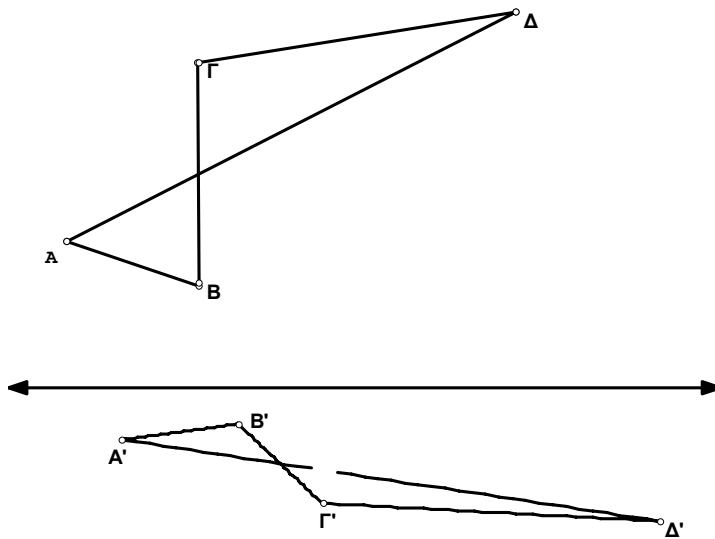
- Να επιτρέπουν μια μονοσήμαντη απεικόνιση από σημεία ενός επιπέδου σε σημεία ενός άλλου επιπέδου
- Να είναι πλήρεις, με την έννοια ότι ταιριάζουν με τις παρατηρήσεις και τα πειραματικά δεδομένα
- Να είναι συνεπείς μεταξύ τους, με την έννοια ότι κανένας δεν αντιφάσκει με τους υπόλοιπους

- Να είναι οι ελάχιστοι δυνατοί, με την έννοια ότι κανένας δεν θα μπορεί να προκύψει από τους άλλους

Η πραγματοποίηση των παραπάνω θα γίνει σε 4 στάδια όπως περιγράφεται παρακάτω: Το πρώτο στάδιο θα περιλάβει την συλλογή πειραματικών δεδομένων, το δεύτερο την μελέτη και κατηγοριοποίηση των δεδομένων, το τρίτο την εξαγωγή κανόνων και κατασκευή του μοντέλου και το τέταρτο τον πειραματισμό με το μοντέλο και τον έλεγχο της ορθότητάς του.

3.1 ΣΥΛΛΟΓΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Χρησιμοποιώντας ως πειραματική διάταξη μια από αυτές που περιγράφηκαν παραπάνω, καλούμε τους μαθητές, χωρισμένους σε ομάδες, να πειραματιστούν ως προς το πως απεικονίζονται διάφορα σχήματα ή αντικείμενα και πως μεταβάλλονται αυτές οι απεικονίσεις όταν μεταβάλλεται το αντίστοιχο αντικείμενο. Ο πειραματισμός περιλαμβάνει σχήματα που περιέχουν ευθύγραμμα τμήματα, ένα ή περισσότερα, παράλληλα ή κάθετα μεταξύ τους, όπως π.χ. ένα παράθυρο, βιβλία, μολύβια, κλπ., καθώς και την δυνατότητα μετρήσεων μήκους και γωνίας. Επίσης, περιλαμβάνει και άλλα σχήματα, όπως, π.χ. κυκλικά, ή και τυχαία κατά την επιλογή των μαθητών. Σε όλη την διάρκεια του πειραματισμού δίνουμε έμφαση στην κατά το δυνατόν κάλυψη πολλών πιθανών περιπτώσεων με διάφορες διατάξεις ευθυγράμμων τμημάτων, κλπ., και τους καλούμε να καταγράφουν όλα τα πειραματικά δεδομένα με σχόλια και παρατηρήσεις. Κάποια παραδείγματα πειραματισμού φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3: Οι απεικονίσεις των σημείων A , B , Γ , Δ είναι αντιστοίχως τα σημεία A' , B' , Γ' , Δ' αντιστοίχως. Μετακινώντας τα αρχικά σημεία αυθαίρετα παρατηρούμε τις απεικονίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων και των τομών τους που σχηματίζονται

3.2 ΜΕΛΕΤΗ-ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στη φάση αυτή, οι μαθητές παρουσιάζουν τα ευρήματά τους και καλούνται να σκεφτούν πως θα μπορούσαν να κατηγοριοποιήσουν τα δεδομένα που συνέλεξαν με γνώμονα την σχέση μεταξύ αντικειμένων και απεικονίσεών τους. Καλούνται να απαντήσουν σε ερωτήματα του τύπου: Πως θα μπορούσαν να περιγράψουν με λίγα λόγια την σχέση αυτή όπως προκύπτει από τις πολλές παρατηρήσεις τους; Τα αποτελέσματα κάποιων πειραμάτων μπορούν να συναχθούν από τα αποτελέσματα κάποιων άλλων; Μπορούμε να διατυπώσουμε κάποια γενικά συμπεράσματα για κάθε κατηγορία παρατηρήσεων που έχουμε και που να ταιριάζουν με τα δεδομένα;

Συγκεκριμένα ερωτήματα που μπορούν να διερευνηθούν: Ένα ευθύγραμμο τμήμα απεικονίζεται σε ευθύγραμμο ή όχι; Δύο κάθετα μεταξύ τους ευθύγραμμο τμήματα απεικονίζονται σε δυο κάθετα επίσης ή όχι; Δύο παράλληλα μεταξύ τους ευθύγραμμο τμήματα απεικονίζονται σε δυο παράλληλα επίσης ή όχι; Ένα ορθογώνιο πλέγμα με ένα κάθετο διαχωριστικό σε τι απεικονίζεται και τι σχέση έχει ο λόγος διαχωρισμού στο αρχικό με αυτόν της απεικόνισης; Ένα κυκλικό σχήμα σε τι σχήμα απεικονίζεται;

Ο στόχος στη φάση αυτή είναι να ξεχωρίσουν ομοειδείς παρατηρήσεις σε κατηγορίες και να αρχίσει να διαμορφώνεται μια αντίληψη για τις ιδιότητες που έχει η απεικόνιση που μελετάμε. Μπορούν να διατυπώνονται και γενικές υποθέσεις για τις ιδιότητες αυτές και να ελέγχεται άμεσα το αν ισχύουν ή όχι με πρόσθετα πειράματα μέχρις ότου διαμορφωθούν βασικές κατηγορίες παρατηρήσεων και αποτελεσμάτων.

3.3 ΕΞΑΓΩΓΗ ΚΑΝΟΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Το στάδιο αυτό είναι το σημαντικότερο. Έχοντας διαμορφώσει κάποιες βασικές εικόνες για τον τρόπο με τον οποίο απεικονίζονται σημεία του ενός επιπέδου σε σημεία του άλλου επιπέδου, μπορούμε να αρχίσουμε να κάνουμε κάποιες διαπιστώσεις. Έτσι, π.χ. φαίνεται πως κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ως απεικόνιση κάποιο άλλο ευθύγραμμο τμήμα σε κάθε περίπτωση το οποίο εμφανίζεται γενικά κεκλιμένο ως προς το αρχικό. Τα σημεία τομής των δυο επιπέδων απεικονίζονται στον εαυτό τους, όπως άλλωστε είναι προφανές και χωρίς να καταφύγει κανείς σε πειράματα. Δυο παράλληλες ευθείες φαίνεται ότι απεικονίζονται επίσης σε παράλληλες ευθείες. Δεν συμβαίνει το ίδιο με δυο κάθετες ευθείες που δεν απεικονίζονται σε ευθείες που είναι κάθετες μεταξύ τους. Το ίδιο συμβαίνει και με δυο ευθείες υπό γωνία, η γωνία των απεικονίσεών τους δεν είναι γενικά η ίδια με την αρχική. Ένας κύκλος απεικονίζεται σε μια έλλειψη και ένα κανονικό πολύγωνο σε ένα άλλο πολύγωνο που δεν είναι όμως κανονικό. Βέβαια, η παρατήρηση για τα πολύγωνα μπορεί να συναχθεί από τις προηγούμενες παρατηρήσεις που έχουν να κάνουν με ευθύγραμμο τμήματα και γωνίες και δεν χρειάζεται συνεπώς να συμπεριληφθούν ρητά στην αναζήτηση των γενικών κανόνων. Επίσης, μια τυχαία καμπύλη απεικονίζεται σε μια άλλη καμπύλη που δεν μας βοηθάει όμως ιδιαίτερα να βγάλουμε συμπεράσματα, θα μπορούσαμε να πάρουμε μια τεθλασμένη ως προσέγγιση της καμπύλης και να μελετήσουμε την απεικόνισή της έχοντας ήδη διαμορφώσει κάποιο συμπέρασμα για τις απεικονίσεις ευθυγράμμων τμημάτων.

Αν, όπως διαπιστώθηκε παραπάνω, μια ευθεία απεικονίζεται πάντα σε άλλη ευθεία, τότε κάθε σημείο της απεικονίζεται σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της άλλης. Αν κρατήσουμε την ευθεία (και κατά συνέπεια την απεικόνισή της) σταθερή και μεταβάλλουμε μόνο το σημείο πάνω στην ευθεία, εξετάζουμε το πώς αλλάζει η απεικόνισή του πάνω στην άλλη ευθεία. Στο σημείο αυτό, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν μετρήσεις του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος πάνω στην ευθεία και να βρεθεί το αντίστοιχο μήκος της εικόνας του πάνω στην άλλη ευθεία. Μια βασική παρατήρηση που προκύπτει είναι ότι αν, π.χ., διπλασιαστεί το μήκος πάνω στην αρχική ευθεία, τότε διπλασιάζεται και το μήκος της εικόνας του πάνω στην άλλη ευθεία. Το αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και για οποιοδήποτε άλλη αναλογία.

Συνοψίζοντας όλες τις παρατηρήσεις, μπορούμε να πούμε ότι φαίνεται να ισχύουν γενικά τα εξής:

- (α) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα απεικονίζεται σε άλλο ευθύγραμμο τμήμα
- (β) Κάθε παράλληλες ευθείες απεικονίζονται σε επίσης παράλληλες ευθείες

(γ) Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα AB ορισμένου μήκους απεικονίζεται σε άλλο ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$, τότε, το διπλάσιό του AB κατά μήκος της ευθείας του απεικονίζεται στο διπλάσιο του $A'B'$ κατά μήκος της δικής του ευθείας

Η διαπίστωση (γ) παραπάνω μπορεί όμως να συναχθεί από την (β) και αντιστρόφως (χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ομοιότητας και αναλογιών), συνεπώς μια από τις δυο δεν χρειάζεται στην διατύπωση των ελάχιστων κανόνων. Μπορούμε λοιπόν να καταλήξουμε στους ακόλουθους δυο κανόνες που κανέναν δεν συνάγεται από τον άλλο:

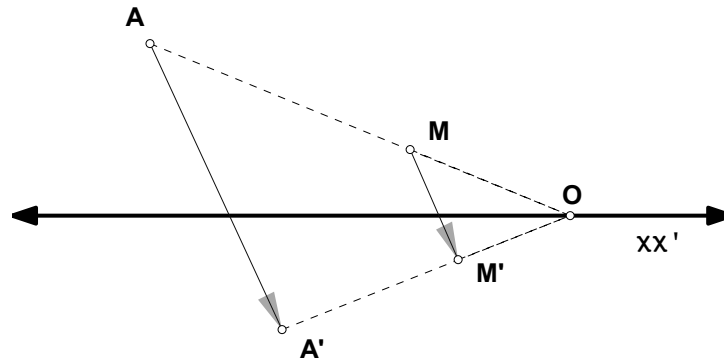
1. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB έχει ως απεικόνιση επίσης ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$

2. Κάθε σημείο M πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα AB ή στην προέκτασή του έχει ως απεικόνιση ένα σημείο M' που κόβει την απεικόνιση $A'B'$ του AB (ή την προέκτασή της) στην ίδια αναλογία όπως και το σημείο M κόβει το AB , δηλ. ισχύει ότι $M'A' / M'B' = MA / MB$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τους δυο κανόνες που έχουν εξαχθεί, μπορούμε να περάσουμε στην κατασκευή ενός μοντέλου για την αναπαράσταση όλων όσων προαναφέραμε πάνω σε ένα επίπεδο. Κατ' αρχήν, ανοίγοντας φέρουμε μια οριζόντια ευθεία $\chi\chi'$ στο επίπεδο θεωρώντας την ως την τομή των δυο επιπέδων πρόσπτωσης και σκιών. Θεωρούμε ότι γίνεται μια νοητή κατάκλιση του επιπέδου πρόσπτωσης στην άλλη πλευρά του επιπέδου σκιών γύρω από την ευθεία $\chi\chi'$. Στο πάνω ημιεπίπεδο θα θεωρούμε ότι χαράσσονται τα αρχικά αντικείμενα και στο κάτω ημιεπίπεδο οι σκιές τους. Κάθε σημείο της ευθείας $\chi\chi'$ απεικονίζεται στον εαυτό του, όπως είναι φανερό από τα προαναφερθέντα.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι αν έχει προσδιοριστεί (για μια δεδομένη διάταξη φωτός και επιπέδων) η απεικόνιση A' ενός σημείου A μόνο (που δεν κείται πάνω στην οριζόντια ευθεία $\chi\chi'$), τότε, η εφαρμογή των κανόνων 1 και 2 που έχουν εξαχθεί οδηγεί αναγκαστικά και μονοσήμαντα στον προσδιορισμό της απεικόνισης M' ενός

οποιοδήποτε άλλου σημείου M του πάνω ημιεπιπέδου. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την ακόλουθη απλή κατασκευή που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα: Βρίσκουμε το σημείο τομής O της AM με την ευθεία xx' και παίρνουμε ως M' το σημείο τομής της OA' με την παράλληλη από το M στην AA' .



Σχήμα 4: Προσδιορισμός της εικόνας τυχόντος σημείου M γνωρίζοντας την εικόνα ενός σημείου A .

Δεδομένου ότι μπορούμε να βρούμε μονοσήμαντα την εικόνα οποιουδήποτε σημείου, είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε την εικόνα οποιουδήποτε σχήματος στο επίπεδο.

3.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ – ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ

Έχοντας λοιπόν διαμορφώσει ένα πλήρες μοντέλο που μας επιτρέπει για μια οποιαδήποτε διάταξη επιπέδων και φωτός να προσδιορίζουμε τις σκιές οποιουδήποτε αντικειμένων, μπορούμε στη συνέχεια να πειραματιστούμε με το μοντέλο και να ελέγξουμε την ορθότητά του, δηλ. αν τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο ταιριάζουν με τις πειραματικές παρατηρήσεις που έχουμε συλλέξει.

Στην πραγματικότητα, η διεργασία της κατανόησης της υποκείμενης έννοιας της γραμμικής απεικόνισης και της συνακόλουθης κατασκευής του μοντέλου που την αναπαριστά, με βάση τις πειραματικές παρατηρήσεις, μπορεί να χρειαστεί την κατασκευή πολλών δοκιμαστικών μοντέλων του προβλήματος με έλεγχο κάθε φορά με την βοήθεια του λογισμικού της συνέπειας, της πληρότητας και της ορθότητάς τους, μέχρι να καταλήξουμε στο σωστό.

Η ύπαρξη κάποιου λάθους, είτε στην διατύπωση των κανόνων είτε στο μοντέλο, θα φανεί μέσα από συγκρίσεις των αποτελεσμάτων του μοντέλου και των πειραματικών παρατηρήσεων. Οι όποιες αποκλίσεις μεταξύ αυτών πρέπει να οδηγήσουν σε ανάλογες διορθώσεις της διατύπωσης και του μοντέλου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Οι ιδέες και το υλικό για την εισήγηση αυτή έχουν προέλθει από την ενασχόληση του συγγραφέα με θέματα εκπαιδευτικού λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας που έχει παραχθεί και αξιοποιηθεί στα πλαίσια του Προγράμματος «Οδύσσεια».

Εκφράζω πολλές ευχαριστίες στους επιμορφωτές της Οδύσσειας, ειδικότερα στους Μαθηματικούς, για τις πολλές ενδιαφέρουσες συζητήσεις και συνεργασίες που είχα μαζί τους σε αντίστοιχα θέματα και για την πολύτιμη συμβολή τους στην κατανόηση των εκπαιδευτικών δυνατοτήτων του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Για τις ανάγκες της εργασίας αυτής χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό “Geometer’s Sketchpad”

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Edwards, L. (1998), “Embodying mathematics and science: Microworlds as representations”, *Journal of Mathematical Behavior* 17 (1), pp. 53-78
2. Friedman, J. S. and diSessa, A. A. “What Students Should Know About Technology: The Case of Scientific Visualization”, *Journal of Science Education and Technology*, Vol. 8, No. 3, 1999.
3. Goldenberg, E. P. and Cuoco, A. (1998). ”What is dynamic geometry? In R. Lehrer and D. Chazan (Eds), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, pp. 351-367. Mahwah, NJ: Erlbaum.
4. Koschmann, T. (1996), Paradigm shifts and instructional technology: An introduction, In T. Koschmann (Ed.), *CSCL: Theory and practice of an emerging paradigm*, 1-23, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
5. Kynigos, C., Koutlis, M. and Hadzilakos, Th. “Mathematics with Component-Oriented Exploratory Software”, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Kluwer Academic Publishers, 1997, 2, pp. 229-250.
6. Reinhard Holzl, “Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study”, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Kluwer Academic Publishers, 2001, 6, pp. 63-86.