ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2009)

1ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία»

Πυθαγόρειο Θεώρημα Μία πρόταση διδασκαλίας για την Β! Γυμνασίου με την χρήση των Τ. Π. Ε.

Μιχαήλ Μπουζάλης

Βιβλιογραφική αναφορά:

Μπουζάλης Μ. (2024). Πυθαγόρειο Θεώρημα Μία πρόταση διδασκαλίας για την Β! Γυμνασίου με την χρήση των Τ. Π. Ε . *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 567–572. ανακτήθηκε από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/6568

Πυθαγόρειο Θεώρημα
Μία πρόταση διδασκαλίας για την Β! Γυμνασίου με την χρήση των Τ. Π. Ε.

Μιχαήλ Αθανασίου Μπουζάλης
Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Ν. Θεσσαλονίκης
mbouzalis@sch.gr

Περίληψη
Για την πραγματοποίηση της παραπάνω διδασκαλίας χρησιμοποιείται σενάριο που απευθύνεται στον εκπαιδευτικό , φύλλο εργασίας για τους μαθητές και τις μαθήτριες και δυναμικά φύλλα εργασίας από τα λογισμικά Geogebra , G.S.P. 4.07_GR , Microsoft Excel. Το σενάριο διαπραγματεύεται τις Πυθαγόρειες τριάδες , τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου , τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα τρίγωνο ορθογώνιο. Η πραγματοποίηση του σεναρίου κρίθηκε αναγκαία από την μεγάλη σπουδαιότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των εφαρμογών του στα Μαθηματικά . Η διδασκαλία θα πρέπει να γίνει στην αίθουσα των υπολογιστών , στους υπολογιστές της οποίας θα πρέπει να βρίσκονται εγκατεστημένα τα προηγούμενα λογισμικά
Λέξεις κλειδιά : Πυθαγόρειες τριάδες , Πυθαγόρειο Θεώρημα

1. Εισαγωγή

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αποτελεί ένα από τα ποιο κομψά , αλλά ταυτόχρονα και ποιο σημαντικά θεωρήματα με πολλές εφαρμογές. Η ανακάλυψη του θεωρήματος , αν και παραδοσιακά αποδίδεται στον Πυθαγόρα τον Σάμιο
(585 – 500 π. Χ.) δεν είναι βέβαιο ότι έγινε από αυτόν ή από κάποιον από τους μαθητές του στην Πυθαγόρεια Σχολή που ο ίδιος ίδρυσε. Όμως είναι βέβαιο πως είτε ο ίδιος είτε οι μαθητές του διατύπωσαν την πρώτη απόδειξη. Σύμφωνα με την παράδοση οι Θεοί ανακοίνωσαν στον Πυθαγόρα το ομώνυμο Θεώρημα και όταν το απέδειξε , για να τους ευχαριστήσει , έκανε θυσία εκατό βόδια. Για τον λόγο αυτό , το Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρεται συχνά και ως « Θεώρημα της εκατόμβης ». Επιπλέον , οι Πυθαγόρειοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστροφο του θεωρήματος. Πολλοί Μαθηματικοί , διάσημοι και μη , προσπάθησαν να αποδείξουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα με δική τους ανεξάρτητη μέθοδο. Ανάμεσα σε αυτούς υπάρχουν και προσωπικότητες όπως ο Leonardo da Vinci και ο πρόεδρος των Η. Π. Α. Garfield. Το 1940 ο Elisha Scott Loomis περιέλαβε 365 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος σ' ένα βιβλίο. Το θεώρημα προέκυψε από την μελέτη του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του και έχει ακόμα εφαρμογή στις τετραγωνικές ρίζες , στους άρρητους αριθμούς για την Β! Γυμνασίου (σελίδες 42 , εφαρμογές 3 , 4 , 44 ασκήσεις 5,7,8,9 , 46 Άρρητοι αριθμοί , 47 τοποθέτηση Άρρητων αριθμών πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών , εφαρμογή 4 , 49 έως 52 , προβλήματα που λύνονται με την βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος) , του σχολικού βιβλίου , ενώ χρησιμοποιείται στις μετρικές σχέσεις στην Γεωμετρία της Β! Λυκείου για ορθογώνιο , τυχαίο τρίγωνο (σελίδες 183 έως 199) , για τον υπολογισμό των εμβαδών των επιπέδων σχημάτων (εφαρμογή 1 σελίδα 215) , Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (σελίδες 234 και 235) , εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο (σελίδες 238 έως 242) .

2η Ενότητα - Προηγούμενες γνώσεις

Οι μαθητές και οι μαθήτριες αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά την έννοια των Πυθαγόρειων τριάδων. Δεν γνωρίζουν τίποτα για την σύνδεση μεγεθών μέσα από μη γραμμικές σχέσεις. Είναι γενικά γνωστό ότι οι σχέσεις που συνδέουν τετράγωνα ακόμα και σαν μετρικές είναι δύσκολο να κατανοηθούν από τους διδασκόμενους . Έτσι θεωρείται επιβεβλημένο πριν από το Πυθαγόρειο Θεώρημα να εξηγηθεί η έννοια των Πυθαγόρειων τριάδων και να συνδεθεί με το Πυθαγόρειο Θεώρημα

3η Ενότητα – Απαιτούμενα υλικά

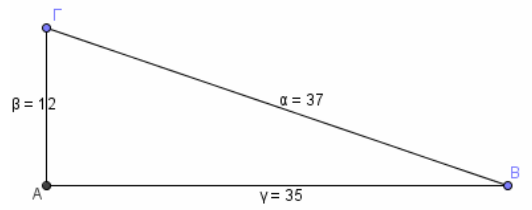
Για την διεξαγωγή του σεναρίου απαιτούνται φύλλα εργασίας για την τάξη , σύντομες οδηγίες για την χρήση του λογισμικού , ονόματα ιστοσελίδων εφόσον θα χρησιμοποιηθούν. Πρόχειρο για την εγγραφή των σπουδαιότερων συμπερασμάτων της ομάδας , τα οποία θα ανακοινωθούν στη τελική συζήτηση της τάξης.

4η Ενότητα - Στόχοι του σεναρίου. Διαπραγμάτευση

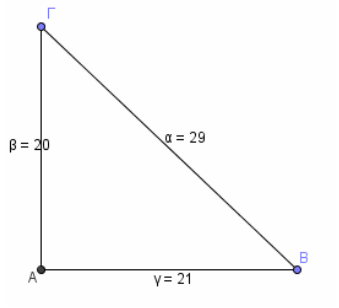
Οι στόχοι του σεναρίου είναι να μάθουν οι μαθητές και οι μαθήτριες τις Πυθαγόρειες Τριάδες. Να ανακαλύψουν την σχέση που συνδέει τα τετράγωνα των δύο πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με το τετράγωνο της υποτείνουσας και να το διατυπώνουν με αλγεβρική γλώσσα. Τέλος να αποδεικνύουν το θεώρημα γεωμετρικά

Η διαπραγμάτευση του σεναρίου περιλαμβάνει ενημέρωση των μαθητών και των μαθητριών για το σενάριο που θα τους απασχολήσει και τον τρόπο που θα δουλέψουν. Μοιράζονται σε όλους και όλες τα φύλλα εργασίας και η παρακάτω σε σημείωση περιγραφή των δραστηριοτήτων:

Δραστηριότητα 1η : Από το αρχείο Geogebra , Pith.ggb φαίνεται η σύνδεση των αριθμών που αποτελούν Πυθαγόρειες τριάδες με τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Σε κάθε μετατόπιση των δύο συρτών σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα στις πλευρές των οποίων φαίνονται οι αριθμοί που σχηματίζουν Πυθαγόρειες τριάδες . Χρησιμοποιήθηκε εδώ το λογισμικό Geogebra για την ευκολία που μας προσφέρει για την δημιουργία της δραστηριότητας , την καλή απεικόνιση των μεταβολών και το εύχρηστο της όλης προσπάθειας



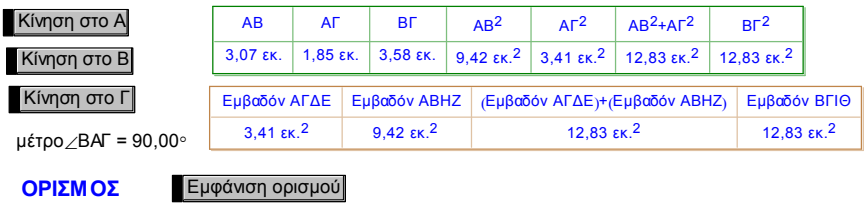
Πυθαγόρειες Τριάδες – Ορθογώνιο τρίγωνο



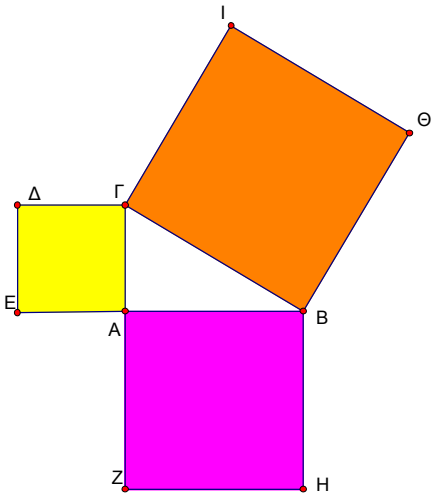
Δραστηριότητα 2η : Συμπληρώνεται ένα υπολογιστικό φύλλο με δέκα γραμμές πάνω στην κατασκευή και στις σχέσεις που συνδέουν τις Πυθαγόρειες τριάδες και με εποπτεία φαίνεται η πρώτη σύνδεση των αριθμών που αποτελούν Πυθαγόρειες τριάδες. Το Excel προτιμήθηκε στην δραστηριότητα αυτή περισσότερο για τις υπολογιστικές δυνατότητές του και για οικονομία χρόνου καθόσον με τις συναρτήσεις του πολύ εύκολα συμπληρώνονται οι στήλες του φύλου και γίνεται αντιληπτή η αλγεβρική σχέση των Πυθαγόρειων Τριάδων

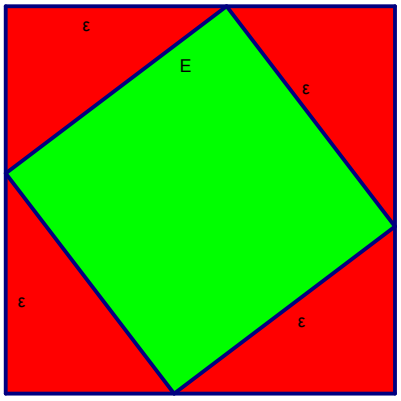
Οι Πυθαγόρειες τριάδες								
λ	μ	x =λ^2-μ^2	y=2*λ*μ	z=λ^2+μ^2	x^2	y^2	x^2+y^2	z^2
2	1	3	4	5	9	16	25	25
3	2							
4	3							
5	4							
6	5							
7	6							
8	7							
9	8							
10	9							

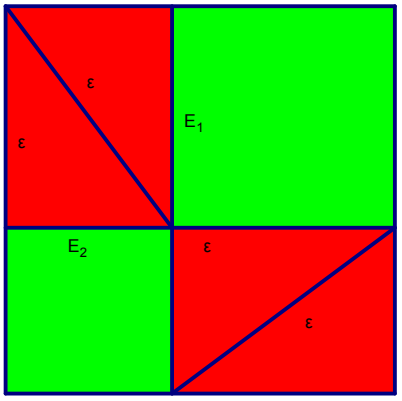
Δραστηριότητα 3η : Στο περιβάλλον του G S P 4.07_Gr στην σελίδα 1 κατασκευάζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μεταβαλλόμενες τις κορυφές του. Δυναμικά διαπιστώνεται ότι το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας του μέσα από πίνακες και από γεωμετρική παράσταση. Στην σελίδα 2 αποδεικνύεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα γεωμετρικά . Το λογισμικό του G S P 4.07_Gr προτιμήθηκε στην δραστηριότητα αυτή γιατί είναι ένα κατεξοχήν λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας και μας προσφέρει όλες τις μεταβολές που χρειάζονται για να κατανοήσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες Γεωμετρικά το Πυθαγόρειο Θεώρημα



ΟΡΙΣΜΟΣ Εμφάνιση ορισμού







Η εκκίνηση της τάξης μπορεί , ανάλογα με το πώς θα το κρίνει ο διδάσκων ή η διδάσκουσα , να βασιστεί μεταξύ άλλων ενδεικτικά και στα εξής :

- Ψάξτε στην μηχανή αναζήτησης το «θεώρημα της εκατόμβης»
  www.livepedia.gr/index.php/Πυθαγόρειο_Θεώρημα
  www.livepedia.gr/index.php/Εκατόμβη el.wikipedia.org/wiki/Πυθαγόρειο_θεώρημα
  http://users.pie.sch.gr/koukaridis/globalsch-utosch/iware/?D=5451721c7b4b589245deed0e6ef83df1
- Αναζητήστε σε γραμματόσημα το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Γραμματόσημα με θέμα τον Πυθαγόρα.

Μέχρι τη μακρινή Νικαράγουα. . .

Ελληνικά γραμματόσημα με θέμα τον Πυθαγόρα .

- Βρείτε ιστορικά στοιχεία για τον Πυθαγόρα τον Σάμιο και την σχολή του
- Βρείτε πόσες διαφορετικές αποδείξεις υπάρχουν για το Πυθαγόρειο Θεώρημα
- Βρείτε με κατάλληλη αναζήτηση ποιός πρόεδρος των Η.Π.Α. έδωσε λύση για το Πυθαγόρειο Θεώρημα.
- Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα και τρία τετράγωνα που έχουν πλευρές τις τρεις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και τους ζητείται με κατάλληλες μετατοπίσεις των σχημάτων να δείξουν ότι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των καθέτων πλευρών είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας (από το σχολικό βιβλίο)
- Να δοθούν Πυθαγόρειες τριάδες στις οποίες να βρουν ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο μικρότερων αριθμών ισούται με το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς.
- Δίνονται σε γεωμετρικό σχήμα τρία τετράγωνα με πλευρές οποιεσδήποτε πυθαγόρειες τριάδες και ζητείται να βρεθεί η σχέση που υπάρχει μεταξύ του εμβαδού του αθροίσματος των δύο μικρότερων τετραγώνων με το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου.
- Επίσκεψη των σελίδων του You Tube και εύρεση εκεί videos σχετικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τραγούδια , πειράματα , δυναμικές παραστάσεις, ταινίες κ.τ.λ. Ενδεικτικά αναφέρεται www.youtube.com/watch?v=0HYHG3fuzvk , και άλλα τουλάχιστον δέκα

Ανάλογα με τον τρόπο εκκίνησης της τάξης πρέπει ο διδάσκων – η διδάσκουσα να διαμορφώσει το φύλλο εργασίας που θα μοιράσει στην τάξη και να χρησιμοποιήσει τα αρχεία του επιλεγμένου λογισμικού που θα έχει κατασκευάσει από πριν. Ένα ενδεικτικό φύλλο εργασίας είναι και το παρακάτω :

- Πότε ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο , αμβλυγώνιο , οξυγώνιο.
- Βρείτε τρεις αριθμούς , τέτοιους ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των δύο αριθμών να ισούται με το τετράγωνο του τρίτου αριθμού.
- Αν δεν μπορείτε να βρείτε , ανοίξτε το αρχείο Pith.ggb Παρατηρείστε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Ποια σχέση τις συνδέει

- Μετακινήστε από πάνω αριστερά τους δρομείς λ και μ. Τι παρατηρείται Πόσοι αριθμοί σαν τους παραπάνω ζητούμενους υπάρχουν;
- Μήπως ξέρετε πως ονομάζονται οι παραπάνω τριάδες;
- Αν θέλετε να μάθετε πως μπορούμε να βρούμε τις τριάδες αυτές ανοίξτε το αρχείο Microsoft Excel P_T και συμπληρώστε τις στήλες του.
- Ανοίξτε το αρχείο sxedio1 του Sketchpad .
- Παρατηρήστε τους δύο πίνακες και το σχήμα , βρείτε τι είδους τρίγωνο έχετε και ποια στοιχεία των πινάκων είναι ίσα.
- Μετακινήστε πάνω στην επιφάνεια εργασίας όποια από τις κορυφές του τριγώνου θέλετε , όπως θέλετε . Τι συμβαίνει στο τρίγωνο και στους πίνακες;
- Πατήστε τα κουμπιά εμφάνιση κίνησης και κινήστε από εκεί καθένα από τα κουμπιά ή και όλα μαζί. Τι παρατηρείται;
- Μπορείτε να εκφράσετε με μαθηματική γλώσσα τι ακριβώς συμβαίνει με τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου;
- Αποδείξτε με την βοήθεια της σελίδας 2 του αρχείου sxedio1 , την παραπάνω πρόταση. Γνωρίζουμε ότι όλα τα τρίγωνα που υπάρχουν είναι ίσα μεταξύ τους.

Στο τέλος της διαδικασίας προτείνεται να γίνει ανταλλαγή των απόψεων μέσα στην τάξη , να συζητηθεί το όλο εγχείρημα και να βγουν τα κατάλληλα συμπεράσματα. Πιθανή απόδειξη του θεωρήματος στον πίνακα από κάποια ομάδα επειδή κάποια άλλη δεν μπόρεσε να το κάνει.

5η Ενότητα - Χρησιμότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Όλοι γνωρίζουν την μεγάλη χρησιμότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος και πόσο μεγάλη είναι η εφαρμογή του. Ενδεικτικά αναφέρονται :

- Η τοποθέτηση των Άρρητων αριθμών πάνω στον άξονα
- Ο υπολογισμός των τετραγωνικών ριζών με τα σπιράλ
- Στις σχέσεις των εμβαδών των επιπέδων σχημάτων που μπορούμε να σχηματίσουμε με βάσεις τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου
- Στις μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο , τυχαίο τρίγωνο καθώς και στα θεωρήματα των διαμέσων
- Στα κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα
- Υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών

6η Ενότητα - Δυσκολίες των μαθητών – μαθητριών

Δεν προβλέπεται να υπάρξει ιδιαίτερη δυσκολία. Όμως υπάρχει ο κίνδυνος να παρουσιαστεί διδακτικός θόρυβος στην συμπλήρωση του φύλου Excel , από τις πολλές μετακινήσεις των σημείων του σχήματος και τις αντίστοιχες πινακοποιήσεις , από τα κινούμενα γραφικά τα οποία παρασύρουν τους μαθητές – μαθήτριες σε κατάχρηση. Άλλες δυσκολίες προβλέπεται να παρουσιαστούν από την καταστροφή των πρότυπων εικόνων.

7η Ενότητα - Κέρδη και ζημίες από την χρήση των Τ. Π. Ε.

Ο υπολογιστής προσφέρει όλα τα εργαλεία για ακριβείς υπολογισμούς και κατασκευή σχήματος. Δυναμικές μεταβολές των πλευρών και των γωνιών, αυτόματη μέτρηση των μεγεθών του σχήματος , πινακοποίηση των μετρηθέντων μεγεθών. Γραφική παράσταση των μεταβολών. Τα κινούμενα γραφικά δίνουν στον μαθητή - μαθήτρια την δυνατότητα να « παίξουν », να διερευνήσουν το σχήμα βρίσκοντας οριακές θέσεις δίνοντας υπόσταση στην έννοια του « τείνει » και του ορίου. Ανακαλύπτουν έτσι την γνώση. Αν όμως παραμείνουμε μόνο σε αυτό χωρίς να προχωρήσουμε στην απόδειξη τότε η Τ. Π. Ε. προκαλούν ζημία.

8η Ενότητα - Αξιοποίηση του σεναρίου

Αυτή θα γίνει με το φύλλο εργασίας. Οι διδασκόμενοι καλούνται να κατασκευάσουν , να παρατηρήσουν , να εικάσουν και στην συνέχεια να αποδείξουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του . Έτσι μαθαίνουν το να το χρησιμοποιούν στις μετέπειτα ανάγκες τους , όπως στους υπολογισμούς τριγωνομετρικών αριθμών στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας, και της τετραγωνικής ρίζα στην Άλγεβρα.

Βιβλιογραφία

Brousseau. G. (1997). *Theory of didactical situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers.

Dagdilelis. V. & Papadopoulos, I. (2004). *An Open Problem in the Use of Software for Educational Purposes, in E. McKay (Ed.), Proceedings of International Conference on Computers in Education* '2004, 919-924, RMIT University, Australia.

Papadopoulos, I. & Dagdilelis, V. (2006). *The Theory of Transactional Distanceas a framework for the analysis of computer aided teaching of geometry, International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13 (4), 175-182.

Polya, G. (1973). *How to solve it, Princeton*: Princeton University Press.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.

Κυνηγός, Χ. (2007) *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης Τεχνολογίας για τη διδακτική των Μαθηματικών: Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.