Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2009)

1ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία»

Η Γεωμετρία των 4 πράξεων

Σ. Πιπίνος, Χ. Ηρακλείδης

Η Γεωμετρία των 4 πράξεων

Σ. Πιπίνος[1], Χ. Ηρακλείδης[2]
[1]Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Ν. Δωδεκανήσου
spipinos@yahoo.gr
[2]Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Ν. Δωδεκανήσου
iraklidis@yahoo.com

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία παρουσιάζουμε ένα γεωμετρικό μοντέλο των τεσσάρων πράξεων της πρακτικής αριθμητικής, με τις οποίες είναι εξοικειωμένη η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών. Μαθητές οι οποίοι θα βιώσουν αυτή την εκπαιδευτική δραστηριότητα με τη βοήθεια του πρόθυμου καθηγητή τους θα πρέπει να «θεωρήσουν», «κατασκευάσουν», να κάνουν μαθηματικά πειράματα «δοκιμής και λάθους» και να «εφαρμόσουν» τα αποτελέσματά τους. Δηλαδή, θα πρέπει να «αγκαλιάσουν» μια μεγάλη ποικιλία μεθόδων επίλυσης προβλήματος, εξαιρετικά θεμελιωδών στη σύγχρονη επιστημονική έρευνα, όπως περιγράφονται από τον Polya (1990) για παράδειγμα. Ταυτόχρονα, γίνεται μύηση των μαθητών σε δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας, όπως το *The Geometer's Sketchpad.*
Λέξεις κλειδιά: *πράξεις, κατασκευή, Sketchpad.*

1. Εισαγωγή

Αν και οι μαθητές απ' τις τελευταίες ήδη τάξεις του Δημοτικού είναι εξοικειωμένοι με τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής και με αρκετές από τις ιδιότητές τους, εν τούτοις έχουν ελάχιστη εποπτική – γεωμετρική αντίληψη ώστε να συνδέουν αυτές τις αλγεβρικές πράξεις με την γεωμετρία.

Στα νέα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου δεν υπάρχει κάποια τέτοια προσέγγιση, αφού βέβαια δεν προβλέπεται απ' το Αναλυτικό Πρόγραμμα. Παρόλα αυτά, το παρόν άρθρο μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί απ' τον εκπαιδευτικό υπό τη μορφή δραστηριότητας – mini project, αφού βασίζεται στο Θεώρημα Θαλή ή σε ομοιότητες, οι οποίες διδάσκονται στην Γ΄ Γυμνασίου. Επίσης, η ίδια δραστηριότητα περιλαμβάνει μια εφαρμογή στην υπερβολή και μια στην εξομοίωση της βαρύτητας. Πιστεύουμε ότι η δραστηριότητα είναι αρκετά ψυχαγωγική, αφού οι μαθητές θα πρέπει να παίξουν με τις δικές τους αναλογίες και να δημιουργήσουν τα δικά τους σχήματα αξιοποιώντας τη φαντασία και τη λογική τους. Είναι ελκυστική αφού δεν περιέχει πολύπλοκους τύπους, βαρετούς υπολογισμούς και δύσκολες έννοιες. Τέλος, είναι ενδιαφέρουσα, αφού η αρχική παρουσίασή της στους μαθητές περιέχει κάτι αρκετά απλό και γνώριμο στη συντριπτική πλειοψηφία τους: τις 4 αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση)!

2. Περιγραφή του προβλήματος

Με δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα x, y να κατασκευαστούν τμήματα μήκους $x+y$, $x-y$, $x \div y$ και $x \cdot y$. Οι κατασκευές πρέπει να είναι γεωμετρικές, δηλ. να πραγματοποιηθούν με κανόνα και διαβήτη και η παρουσίασή τους να γίνει τόσο σε χαρτί όσο και σε δυναμικό περιβάλλον. Η επίλυση θα πρέπει να 'ναι ακριβής με την έννοια ότι οι μαθητές θα αιτιολογούν λογικά κάθε απάντησή τους στηριζόμενοι στην ύλη των μαθηματικών που έχουν ήδη διδαχθεί.

3. Επίλυση του προβλήματος με διδακτικά σχόλια

Το πρόβλημα που μελετάμε έχει ενδιαφέρον αφού αφενός, σχεδόν όλοι οι μαθητές είναι «αλγεβρικά» εξοικειωμένοι με τις 4 πράξεις της αριθμητικής, αφετέρου έχει απλή διατύπωση. Μάλιστα για να γίνει η διατύπωση του προβλήματος πιο ελκυστική θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε: «Παιδιά, πως μπορούμε άραγε να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς μόνο με κανόνα και διαβήτη, όπως οι Αρχαίοι Έλληνες;» ή το πιο μοντέρνο: «Παιδιά, πως μπορούμε άραγε να εξομοιώσουμε τις 4 πράξεις γεωμετρικά;». Το πρόβλημα μπορεί να δοθεί ως εργασία σε μαθητές της Γ' Γυμνασίου και προς το τέλος της σχολικής χρονιάς, όπου με το σημερινό αναλυτικό πρόγραμμα τα παιδιά διδάσκονται τις έννοιες της ομοιότητας και του Θεωρήματος του Θαλή. Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουν τα παιδιά είναι ο κανόνας, ο διαβήτης καθώς και απλό χαρτί. Μάλιστα, σε αντίθεση με τις γνωστές τεχνικές του φύλλου εργασίας, προτείνουμε το φύλλο αυτή τη φορά να είναι κατάλευκο, δηλ. να μην περιέχει τίποτα, ώστε να δημιουργηθεί η ανάγκη τα παιδιά να «θεωρήσουν» μόνα τους. Το δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για την επαλήθευση, κατανόηση και επιβεβαίωση όλων των αποτελεσμάτων, καθώς και για τις εφαρμογές αυτών. Ο χρόνος υλοποίησης της εργασίας εκτιμούμε ότι είναι τουλάχιστον 4 διδακτικές ώρες. Στη συνέχεια περιγράφουμε συνοπτικά τις γεωμετρικές κατασκευές.

<u>1η κατασκευή:</u> Δεδομένων δύο τμημάτων x και y να κατασκευαστεί το άθροισμά τους x + y

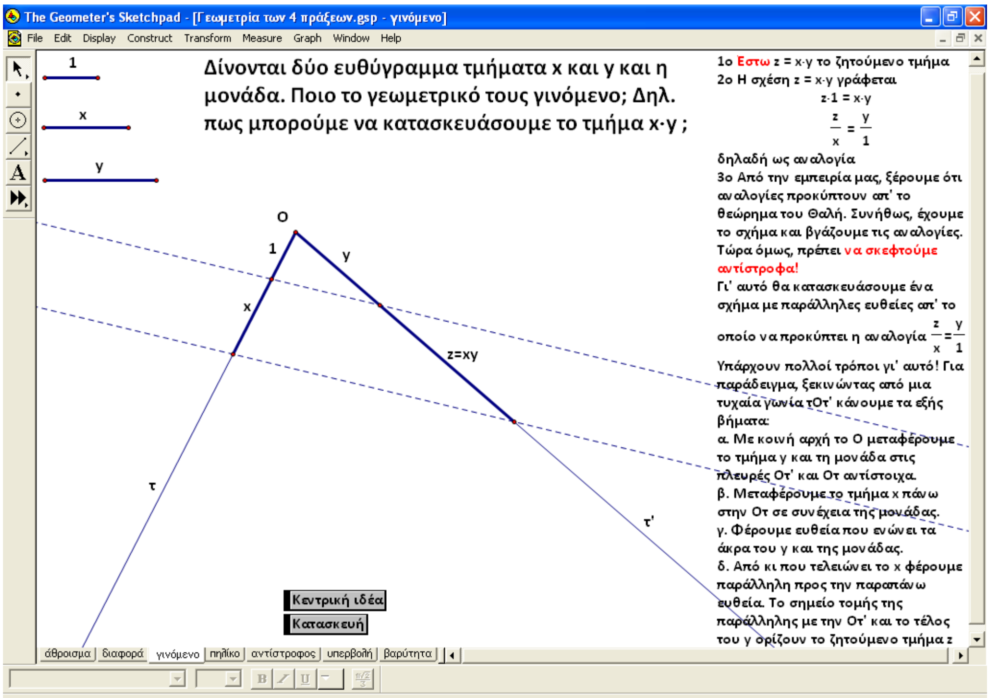
Η κατασκευή αυτή είναι η απλούστερη απ' όλες και γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο ξεκινάμε απ' αυτήν. Πάνω σε μια ευθεία φέρνουμε το ένα ευθύγραμμο τμήμα και έπειτα στην προέκταση του άλλου βρίσκουμε το άθροισμά τους. Στην πρώτη αυτή κατασκευή οι μαθητές μαθαίνουν πώς να μεταφέρουν δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα με τη βοήθεια του διαβήτη.

<u>2η κατασκευή:</u> Δεδομένων δύο τμημάτων x και y να κατασκευαστεί η διαφορά τους x – y

Η κατασκευή αυτή μοιάζει με την προηγούμενη. Πάνω σε μια ευθεία φέρνουμε πρώτα το μεγάλο ευθύγραμμο τμήμα και έπειτα φέρουμε το μικρό πάνω στο μεγάλο. Το τμήμα που υπολείπεται είναι η διαφορά τους.

<u>3η κατασκευή:</u> Δεδομένων δύο τμημάτων x και y να κατασκευαστεί το γινόμενο τους x·y

Στο γινόμενο και στο πηλίκο οι κατασκευές γίνονται πιο σύνθετες. Ενώ στις κατασκευές του αθροίσματος και της διαφοράς δεν φάνηκε η ανάγκη εισαγωγής της μονάδας, δηλ. του μοναδιαίου ευθύγραμμου τμήματος που θα μετράει τα δοσμένα, τώρα γίνεται επιτακτική η ανάγκη εισαγωγής του. Αν x, y και 1 είναι τα δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, τότε αναζητάμε ένα τμήμα z τέτοιο ώστε z = x·y. Η τελευταία σχέση γράφεται z/x = y/1 δηλ. ως αναλογία και η κατασκευή φαίνεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1: *Κατασκευή του γινομένου*

<u>4η κατασκευή:</u> Δεδομένων δύο τμημάτων x και y να κατασκευαστεί το πηλίκο τους x:y

Όπως και στο γινόμενο θα γράψουμε την κατάλληλη αναλογία και απ' το σχήμα που θα προκύψει θα βρούμε το ευθύγραμμο τμήμα.

Βλέπουμε ότι η χρήση των ευθυγράμμων τμημάτων βοηθά τη φαντασία και ζωντανεύει την απόδειξη. Γι' αυτό και ο Ευκλείδης στην Αριθμητική του τους αριθμούς τους παρουσιάζει με ευθύγραμμα τμήματα! Κάθε μια πράξη παρουσιάζεται στο λογισμικό μ' αυτόν τον τρόπο.

4. Διδακτικοί Στόχοι

Αναλύοντας διδακτικά το πρόβλημα διαπιστώσαμε ότι αυτό αξίζει να διδαχθεί και να επιλυθεί απ' τους μαθητές σε συνεργασία με τον διδάσκοντα, διότι αναδύονται με απλό και φυσικό τρόπο ποικίλες μαθηματικές έννοιες, άλλες απλές, άλλες αφηρημένες, άλλες θεμελιώδεις. Μερικές απ' τις έννοιες – στόχους είναι:

- Ο ρόλος της μονάδας
- Η σημασία του όρου ΄΄Έστω΄΄
- Εξοικείωση με γεωμετρικές κατασκευές
- Γνωριμία με τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά
- Εφαρμογές των αποτελεσμάτων
- Ξεκαθάρισμα ορισμένων σημείων στις πράξεις
- Πρώτη επαφή με την έννοια του ορίου στα Μαθηματικά

Στη συνέχεια εστιάζουμε αναλυτικά σε δύο μόνο απ' τους παραπάνω στόχους, οι οποίοι ταιριάζουν περισσότερο στη θεματική του συγκεκριμένου συνεδρίου.

4.1 Εξοικείωση με γεωμετρικές κατασκευές

Για την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων χρησιμοποιούμε κάποια γεωμετρικά όργανα. Τα πιο απλά απ' αυτά είναι ο κανόνας και ο διαβήτης. Με τον όρο κανόνα εννοούμε ένα χάρακα χωρίς ενδείξεις μήκους. Ο κανόνας και ο διαβήτης δημιουργούν τα φυσικά αντίστοιχα της ευθείας γραμμής και του κύκλου, των πιο απλών γεωμετρικών σχημάτων, αφού όλα τ' άλλα προκύπτουν άμεσα απ' αυτά. Μάλιστα ο Πλάτωνας εισηγήθηκε την αποκλειστική χρήση του κανόνα και του διαβήτη γιατί πίστευε ότι με τη χρήση πολύπλοκων οργάνων: «*Η αρετή της Γεωμετρίας παραμερίζεται και καταστρέφεται γιατί μ' αυτά την υποβιβάζουμε και πάλι στον κόσμο των αισθήσεων αντί να την εξαίρουμε και να την οδηγούμε στη μέθεξη με τις αιώνιες και ασώματες εικόνες της σκέψης*». Όσο και αν θεωρεί κανείς υπερβολική αυτή την άποψη, δεν μπορεί παρά να μείνει έκπληκτος στο γεγονός ότι με τη χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη αναπτύχθηκε τελικά όλη η γεωμετρία όπως παρουσιάζεται στα στοιχεία του Ευκλείδη, η περίφημη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Βέβαια, αυτό δεν εμπόδισε τους υπόλοιπους Έλληνες μαθηματικούς να υιοθετήσουν και άλλα όργανα προκειμένου να προχωρήσουν ακόμη περισσότερο και να επιτύχουν ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές (πχ. την τριχοτόμηση της γωνίας) οι οποίες (όπως αποδείχθηκε πολλούς αιώνες αργότερα), δεν μπορούν να κατασκευαστούν μόνο με τον κανόνα και το διαβήτη. Οι γεωμετρικές κατασκευές καλλιεργούν την φαντασία και την εφευρετικότητα του λύτη και πολλές φορές η χάραξη μιας γραμμής ή η εύρεση ενός σημείου προκαλούν ένα ευχάριστο ξάφνιασμα όπως η ανακάλυψη ενός άγνωστου τοπίου (Μπαλής, 2006). Φυσικά στη δραστηριότητα που προτείνουμε, οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με τις γεωμετρικές κατασκευές.

4.2 Εφαρμογές των αποτελεσμάτων - «Να εφαρμόσω αυτά που βρήκα!»

Όταν πλέον οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί αρκετά με τις αναλογίες και τις κατασκευές που εφηύραν, μπορούμε να τους προκαλέσουμε να σκεφτούν πού θα μπορούσαν να εφαρμόσουν τις μεθόδους τους. Στην παρούσα εργασία προτείνουμε δύο εφαρμογές, οι οποίες αναλύονται στις παραγράφους 5.3 και 5.4.

5. Εφαρμογές

5.1 Θεωρητικό πλαίσιο των εφαρμογών – μαθηματικά μοντέλα

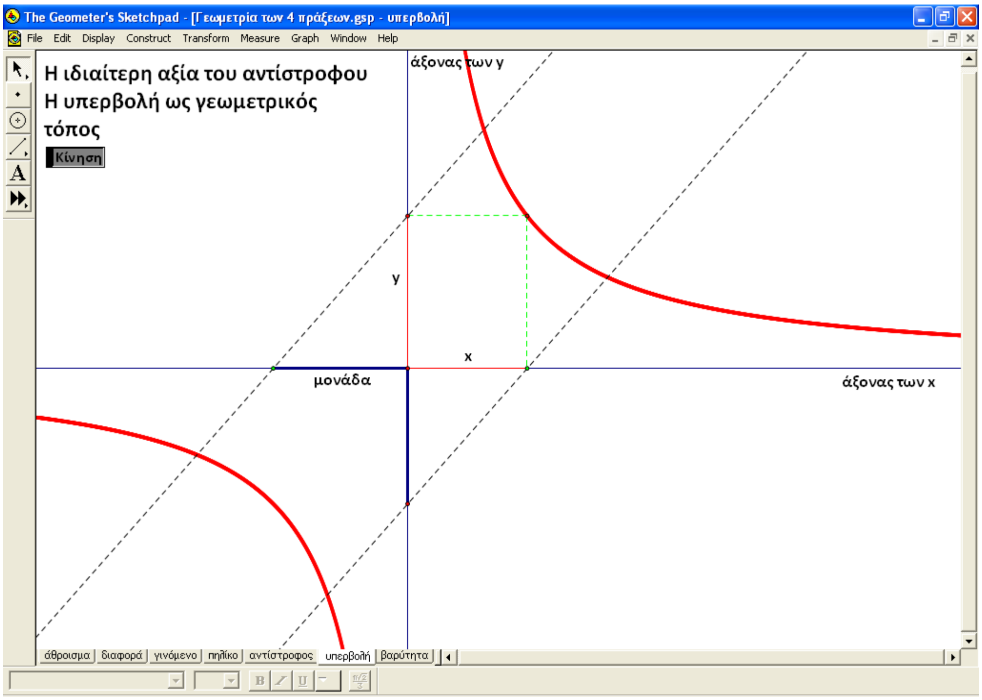
Η εξαγωγή μαθηματικών μοντέλων αποτελεί κύριο σημείο στη σύνδεση των Μαθηματικών με την πραγματικότητα, αλλά και βασικό κομμάτι της μαθηματικής έρευνας. Ως μοντέλο ορίζεται μια μαθηματική δομή, η οποία με την προσθήκη κάποιων προφορικών ερμηνειών, περιγράφει φαινόμενα που έχουν παρατηρηθεί (Neumann, 1961-63). Με άλλα λόγια, το μοντέλο είναι μια απλοποιημένη κατάσταση, όπου οι θεωρητικοί υπολογισμοί είναι εφικτοί. Ελπίζουμε να προσεγγίσουμε έτσι πραγματικές καταστάσεις. Προφανώς, οι νέες τεχνολογίες μας παρέχουν όλο και περισσότερο, τα εργαλεία εκείνα αλλά και το κατάλληλο περιβάλλον που μας επιτρέπει να βελτιώνουμε τα μοντέλα που δημιουργούμε. Είναι γεγονός ότι ο καλύτερος τρόπος για να αποκτήσει ο μαθητής αυτοπεποίθηση για τις ικανότητες του στα μαθηματικά είναι να συμμετάσχει ενεργά στη διαδικασία της εξερεύνησης, της ανακάλυψης και της ερμηνείας των βασικών μαθηματικών εννοιών. Οι νέες τεχνολογίες διαθέτουν κατάλληλα ψηφιακά εργαλεία που με σωστούς χειρισμούς απ' τη μεριά του εκπαιδευτικού μπορούν να παίξουν βασικό ρόλο στην εξερεύνηση, την ανακάλυψη και ερμηνεία Φυσικών και άλλων νόμων. Ένα αλληλεπιδραστικό λογισμικό που μπορεί να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση, είναι το The Geometer's Sketchpad. Πρόκειται για ένα λογισμικό που παρέχει τη δυνατότητα στο μαθητή-χρήστη να δημιουργεί σχέδια (όχι μόνο γεωμετρικά) από αριθμητικές και οπτικές πληροφορίες που εισάγει ο ίδιος και τα οποία μπορεί να μετασχηματίσει με την κίνηση ενός στοιχείου του σχήματος (Balacheff & Kaput, 1996). Τέλος, ο χειρισμός του λογισμικού Sketchpad για την υλοποίηση των δραστηριοτήτων που προτείνουμε είναι ιδιαίτερα απλός και προσιτός ακόμη και σε μαθητές Γυμνασίου, αφού το περιβάλλον του είναι το απλούστερο από όλα τα μαθηματικά λογισμικά (Function Probe, Cabri, Geogebra κα.) που προσφέρονται για διδασκαλία.

5.2 Συσχέτιση παραδοσιακών οργάνων με Δυναμική Γεωμετρία

Γιατί να χρησιμοποιήσουμε τον υπολογιστή αφού έχουμε πραγματικό χάρακα και διαβήτη; Πρώτα απ' όλα οι συγκεκριμένες δραστηριότητες πιστεύουμε ότι πρέπει αρχικά να δουλευτούν απ' τους μαθητές με τον παραδοσιακό τρόπο πάνω σε χαρτί. Πράγματι, είναι γνωστό στη μαθηματική κοινότητα ότι ο ερευνητής μαθηματικός στο πρώτο στάδιο των σκέψεών του αρπάζει μια λευκή κόλα χαρτί και πάνω σ' αυτήν «μουτζουρώνει» τις αρχικές του ιδέες, οι οποίες κατά πάσα πιθανότητα θα' ναι λανθασμένες και ατελείς. Είναι σίγουρο όμως ότι με επιμονή θα δικαιωθεί τις περισσότερες φορές φτάνοντας στην επιθυμητή λύση. Το ίδιο θέλουμε να κάνουν και οι μαθητές μας. Στο επόμενο στάδιο όμως, όσον αφορά στην επαλήθευση και μοντελοποίηση του project, δυστυχώς τα παραδοσιακά όργανα δεν έχουν τα ακόλουθα πλεονεκτήματα της Δυναμικής Γεωμετρίας: **κίνηση, δυνατότητα ίχνους (trace), ταχύτητα διεκπεραίωσης σχημάτων, μέγιστη ακρίβεια στη σχεδίαση και στους υπολογισμούς, πλούσιο χρώμα, αλλαγή σχημάτων χωρίς να αλλοιώνονται τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά (δυναμική κίνηση), ακούραστη επαλήθευση-πειραματισμός ισχυρισμών κα.** Κακά τα ψέματα, ακόμα και ο εκπαιδευτικός, πόσο μάλλον ο μαθητής, θα βαρεθεί και θα κουραστεί, εγκαταλείποντας αργά ή γρήγορα τις δημιουργικές προσπάθειες του πάνω σ' ένα πολύπλοκο σχήμα χρησιμοποιώντας μόνο παραδοσιακά όργανα. Κάτι ακόμα: εξ ιδίας πείρας οι συγγραφείς έχουν διαπιστώσει ότι «παίζοντας» με το Sketchpad ανακαλύπτει κανείς τυχαία νέα θεωρήματα, τα οποία μπορεί μετά να προσπαθήσει να τα αποδείξει. Μάλιστα, ορισμένοι ερευνητές στην προσπάθεια τους να τεκμηριώσουν τη μαθηματική γνώση που κατασκευάζεται με τις νέες τεχνολογίες, υποστηρίζουν ότι συγκεκριμένα το Sketchpad μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά όχι μόνο στην διατύπωση της εικασίας μιας πρότασης αλλά και στην ίδια την απόδειξη της. Χαρακτηριστικά ο Michael D. De Villiers στο βιβλίο του Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad, αναφέρει: ''*...proof is not necessarily a prerequisite for conviction – to the contrary, conviction is probably far more frequently a prerequisite for the finding of a proof*'' (De Villiers, 2004, σ. 6) και αλλού ''*When students have thoroughly investigated a geometric conjecture through continuous variation with dynamic software like Sketchpad, they have little need for further conviction or verification… I have found it relatively easy to solicit further curiosity by asking students why they think a particular result is true; that is to challenge them to try and explain it.*'' (De Villiers, 2004, σ. 10), δηλαδή η ανακάλυψη με το Sketchpad βοηθά στο να ζωντανέψει το ενδιαφέρον που θέλουμε να εμφυτεύσουμε στους μαθητές, την ανάγκη για απόδειξη.

5.3 Η υπερβολή ως γεωμετρικός τόπος

Αφού οι μαθητές έχουν επιλύσει το πρόβλημα της κατασκευής του πηλίκου x/y, μπορούν να την εφαρμόσουν στην ειδική περίπτωση της κατασκευής του αντιστρόφου τμήματος 1/x, δεδομένου τμήματος x. Αν μάλιστα πουν «Έστω y=1/x», τότε προκύπτει «x·y = 1», δηλαδή η εξίσωση της υπερβολής. Σημειώνουμε ότι την υπερβολή την έχουν ήδη διδαχθεί στη Β΄ Γυμνασίου. Βέβαια, η συγκεκριμένη εφαρμογή δεν αποβλέπει στην «διδασκαλία της υπερβολής με αριθμημένο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων συναρτήσει ενός πίνακα τιμών», αλλά σε μια απλή καμπύλη που προκύπτει από την κίνηση στο δυναμικό Sketchpad ως γεωμετρικός τόπος. Αυτή η προσέγγιση διδακτικά συμπληρώνει τον παραδοσιακό τρόπο του σχολικού βιβλίου (Βλάμος et al, 2008, σ. 79) όπου ο μαθητής γεμίζει πίνακες τιμών που προέρχονται από αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Αυτό συμφωνεί και με το πνεύμα των συγγραφέων του βιβλίου μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου για τον καθηγητή όπου αναφέρεται το εξής: «*Πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι η εξοικείωση των μαθητών με τους υπολογιστές δεν αντικαθιστά αλλά συμπληρώνει τον κλασσικό τρόπο διδασκαλίας*» (Αργυράκης et al, 2007, σ. 11). Ακόμη όμως και αν υποθέσουμε ότι ο μαθητής διαθέτει λογισμικό γραφικών παραστάσεων όπου με την απλή εισαγωγή του τύπου της συνάρτησης ο υπολογιστής του προσφέρει «αυτόματα» το γράφημα, εξακολουθεί να είναι ένας παθητικός δέκτης. Ενώ, στη δραστηριότητα που προτείνουμε έχει ιδία εμπειρία της κατασκευής, άρα αυθεντική μαθηματική γνώση. Εξάλλου, σύμφωνα με τον κονστρουκτιβισμό η κεντρική ιδέα είναι ότι το παιδί κατασκευάζει ενεργητικά τη γνώση κατανοώντας σύμφωνα με τα δικά του γνωστικά αποθέματα και δεν την απορροφά παθητικά αποδεχόμενος τις απόψεις των άλλων. Το ερέθισμα για την κατασκευή της νέας γνώσης ξεκινά από μια προβληματική κατάσταση, η οποία κατ' αρχήν φαίνεται να μην μπορεί να συμβιβαστεί με την ενυπάρχουσα οργάνωση της γνώσης στο παιδί. (Τουμάσης, 1999).



Εικόνα 2: *Υπερβολή*

Η δική μας προσέγγιση μέσω των νέων τεχνολογιών συνίσταται στην παρακάτω κατασκευή η οποία είναι μεν ευκλείδεια γεωμετρική κατασκευή αλλά όχι με αληθινό κανόνα και διαβήτη!

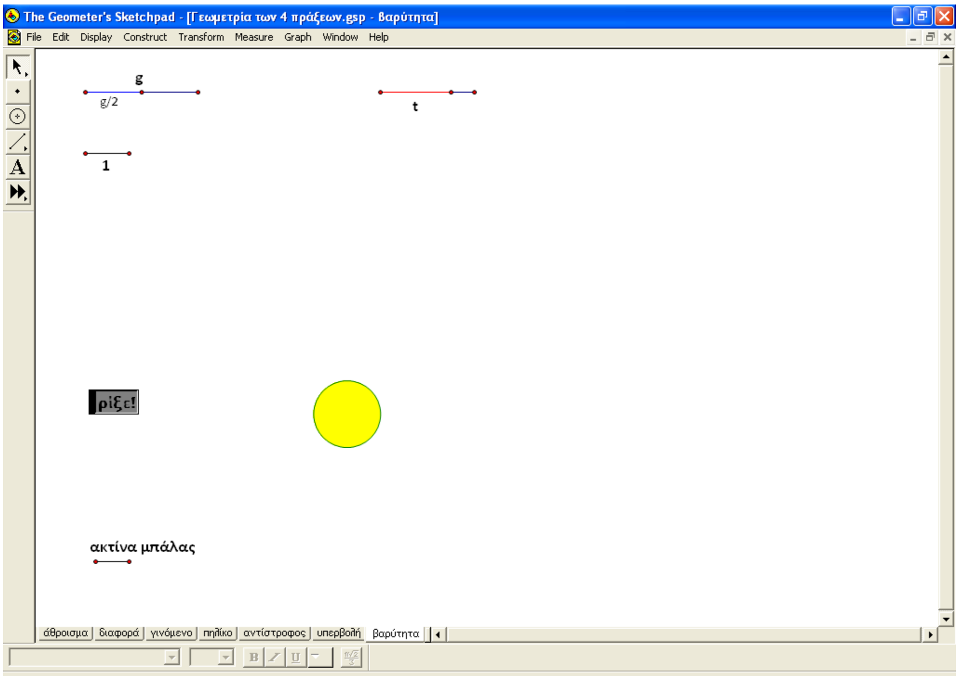
Κατασκευή: Τοποθετούμε δύο μοναδιαία τμήματα κάθετα μεταξύ τους όπως στο παρακάτω σχήμα. Δεδομένου του τμήματος x που παίζει ρόλο ελεύθερης μεταβλητής αφού μετά θα «κινηθεί», δηλ. θα αυξομειώνεται το μήκος του, και με τη βοήθεια των διακεκομμένων παραλλήλων, κατασκευάζεται το τμήμα y. Από τα όμοια τρίγωνα, το y είναι ο αντίστροφος του x. Καθώς τώρα το Sketchpad κινεί το τμήμα x, με τη βοήθεια του ίχνους (trace) του σημείου με «συντεταγμένες (x, y)», προκύπτει η γνωστή μας καμπύλη. Επισημαίνουμε και πάλι ότι η προσέγγιση αυτή είναι καθαρά γεωμετρική και δεν προκύπτει από αλγεβρικούς υπολογισμούς υπό την έννοια της γραφικής παράστασης. Επίσης, φαίνεται ξεκάθαρα για άλλη μια φορά ο υποβόσκων ρόλος της μονάδας.

5.4 Εξομοίωση της βαρύτητας - Διαθεματικότητα

Η αποσπασματική γνώση δε βοηθάει το μαθητή να συγκροτήσει τη μόρφωσή του με τρόπο ουσιώδη, ως βαθειά παιδεία ζωής. Η αρχή της διαθεματικής διδασκαλίας έχει στόχο να διαρρήξει τις διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των αντικειμένων μάθησης, προκειμένου να γίνει συνείδηση η συμβολή πολλών επιστημών στη δημιουργία σύνθετης γνώσης και σύνθετων εφαρμογών της (Πηγιάκη, 2003).

Εξάλλου, στο βιβλίο μαθηματικών του εκπαιδευτικού της Γ΄ Γυμνασίου αναφέρεται ρητά ότι η διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών με τις δραστηριότητες και τα σχέδια εργασιών (projects), που προτείνονται στο νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα του Γυμνασίου, φιλοδοξεί να δώσει τη δυνατότητα σε καθηγητές και μαθητές για μια νέα προσέγγιση των Μαθηματικών, αφού επιδιώκεται να τα συνδέσουν με άλλα γνωστικά αντικείμενα καθώς και με καταστάσεις που αντιμετωπίζουν στην καθημερινή τους ζωή (Αργυράκης et al, 2007, σ. 11).

Αυτή τη στιγμή έχουμε την υπέροχη ευκαιρία να δείξουμε στα παιδιά ότι αυτό που εφεύραν, δηλαδή η γεωμετρικοποίηση των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, τους ανοίγει μία τεράστια ποικιλία από διαθεματικές δυνατότητες εφαρμογών σε οποιαδήποτε επιστήμη, αρκεί να το συνειδητοποιήσουν. Πράγματι, τώρα μπορούμε να εξομοιώσουμε γεωμετρικά τύπους της Φυσικής που περιλαμβάνουν πολυώνυμα. Σχετικά με τους προχωρημένους μαθητές, ίσως πρέπει να γίνει αναφορά στο ότι τώρα μπορούν να κατασκευαστούν γενικότερα αριθμοί που εκφράζονται ως πηλίκα πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές.



Εικόνα 3: *Βαρύτητα*

Για να κατασκευάσουμε το τμήμα s του τύπου $s=(1/2)gt^2$ κατασκευάζουμε πρώτα το τμήμα μήκους (1/2)g. Στη συνέχεια δεδομένου τμήματος μήκους t (παίζει το ρόλο του χρόνου), κατασκευάζουμε το τμήμα t^2 και τέλος το τμήμα $(1/2)gt^2=s$. Αρκεί τώρα να θέσουμε σε κίνηση το σημείο που ορίζει το τμήμα t (μπορεί να γίνει με χρήση της επιλογής Action Buttons – Animations από το μενού Edit του Sketchpad) για να απολαύσουμε τη χαριτωμένη μας μπαλίτσα να ανεβοκατεβαίνει υπό την επίδραση μιας virtual γεωμετρικής βαρυτικής δύναμης. Επισημαίνουμε ότι στην όλη διαδικασία δεν υπεισέρχεται κανένας αλγεβρικός υπολογισμός!

Βιβλιογραφία

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based Learning Environments in Mathematics. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. *International Handbook of Mathematics Education*. 469-501.

De Villiers, M. (2004) *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*. Key curriculum Press.

Neumann (von), J. (1961-63). Collected Works (6 vol.). Pergamon, Oxford, London, New York, Paris.

Polya, G. (1957). *How to Solve It*. 2nd ed. Princeton University Press. Ελληνική μετάφραση *Πώς να το λύσω*. Μτφρ. Λ. Σιαδήμας. Αθήνα: Σπηλιώτη 1990.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. (2007). Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. Βιβλίο καθηγητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Μπαλής, Σ (2006). Γεωμετρικές κατασκευές-Η γεωμετρία του διαβήτη. Στο *Πρακτικά του 23ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Πάτρα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) Ιστοσελίδα Π.Ι. (pi-schools.gr).

Πηγιάκη, Π. (2003). *Προετοιμασία Σχεδιασμός και Αξιολόγηση της Διδασκαλίας*. Αθήνα: Γρηγόρη.

Τουμάσης, Μπ. (1999). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.