Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2005)

3ο Συνέδριο Σύρου στις ΤΠΕ

Κριτήρια αξιολόγησης των μαθητών σε υπολογιστικό περιβάλλον μέσα από τη χρήση δραστηριοτήτων: Η περίπτωση εμβαδού παραλληλογράμμου

Κατερίνα Κασιμάτη, Στυλιανός Ιωάννου

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΜΒΑΔΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Κασιμάτη Κατερίνα - Στυλιανός Ιωάννου
Πάρεδροι ε.θ. Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
kakas@pi-schools.gr - sioannou@pi-schools.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Στη συγκεκριμένη εργασία προτείνονται κάποια κριτήρια αξιολόγησης, τα οποία μας ενισχύουν το προφίλ του μαθητή και μας επιτρέπουν να είμαστε πιο ουσιαστικοί και αντικειμενικοί στην αξιολόγησή μας. Τα κριτήρια τα οποία αναφέρονται στο εννοιολογικό βάθος, στον έλεγχο, στην προσπάθεια, στην ευελιξία, στη λογική, στη δημιουργικότητα, στη μεθοδολογία, στην οργάνωση, στη διαδικασία και στην ταχύτητα τα χρησιμοποιούμε, όταν παρατηρούμε μαθητές που συμμετέχουν σε δραστηριότητες στο εργαστήριο των υπολογιστών. Η προτεινόμενη δραστηριότητα εντάσσεται στην προσπάθεια να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία κατάλληλα σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία με κύριους άξονες: α) την κατανόηση της έννοιας και της μέτρησης του εμβαδού παραλληλογράμμου, β) τη συμβολική έκφραση της έννοιας, γ) τις δυνατότητες ανάπτυξης εικασιών, υποθέσεων και αφαιρετικής ικανότητας των μαθητών και δ) τη σημασία της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας στη διδασκαλία.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Αξιολόγηση, είδη και εμβαδόν παραλληλογράμμου, μεταβλητή, περιβάλλον υπολογιστή, Sketchpad*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μάθηση στη γεωμετρία με τη βοήθεια υπολογιστικών εργαλείων μας επιτρέπει να δομήσουμε ένα πλούσιο και δυναμικό περιβάλλον μάθησης, το οποίο δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν οι ίδιοι τη μαθηματική γνώση μέσα από διερεύνηση και πειραματισμό. Τα αντικείμενα και οι προτάσεις που οι μαθητές καλούνται να αποδείξουν με τυπικές αποδεικτικές διαδικασίες μπορούν να μετατραπούν σε αντικείμενα διερεύνησης. Μέσα σε ελάχιστο χρόνο, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουν σχήματα, να τα τροποποιήσουν, να τα μετακινήσουν, να τα μετασχηματίσουν χωρίς να αλλοιωθούν οι κρίσιμες γεωμετρικές τους ιδιότητες. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν όχι μόνο παρατηρώντας την εικόνα, αλλά και μετρώντας, συγκρίνοντας και αλλάζοντας τα σχήματα (Arcavi & Hadas, 2000). Η μετάβαση από τη χρήση αδρανών υλικών, όπως το μολύβι και το χαρτί, στη χρήση δυναμικών λογισμικών τα οποία αλληλεπιδρούν με το χρήστη, επαναπροσδιορίζει τόσο τον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής κάνει μαθηματικά, όσο και την ίδια την φύση των μαθηματικών αντικειμένων (Smith, 1999). Κάτω από αυτή την προοπτική η διαμεσολάβηση των υπολογιστικών εργαλείων δεν αποτελεί απλά γέφυρα για να αποκτήσουμε πρόσβαση σε κάποια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια, αλλά διαμορφώνει και, σε μεγάλο βαθμό, καθορίζει την ίδια την κατανόηση της έννοιας. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι τα υπολογιστικά μέσα διευρύνουν το παρεχόμενο πεδίο των διαφορετικών προσεγγίσεων για δημιουργία, συλλογή, επεξεργασία και ερμηνεία της εκάστοτε διαχειριζόμενης γνώσης. Μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον οι μαθητές αποκτούν κίνητρο και αυτοπεποίθηση, γιατί τους επιτρέπει να κάνουν δικές τους υποθέσεις και να τις ελέγχουν. Ο έλεγχος των υποθέσεων οδηγεί συχνά τους μαθητές σε εκπλήξεις και τους κινητοποιεί, ώστε να επανεξετάσουν τις γνώσεις και τις αρχικές απόψεις τους. Οι πιθανόν λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών επανελέγχονται, τους προκαλούν γνωσιακές συγκρούσεις και τους οδηγούν μ' αυτό τον τρόπο να δομήσουν την προσωπική τους γνώση.

Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ

Μέσα από αυτή τη σημαντική αλλαγή των υπολογιστικών εργαλείων, τα οποία οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους, προβάλλει η ανάγκη της διερεύνησης του τρόπου με τον οποίο επαναπροσδιορίζεται η συναισθηματική εμπλοκή τους και οι πρακτικές τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Οι συναισθηματικοί παράγοντες τους οποίους καλούμαστε να διερευνήσουμε είναι:

- Το επίπεδο αυτοπεποίθησης των μαθητών σχετικά με την ικανότητά τους να κάνουν και να μάθουν μαθηματικά.
- Το ενδιαφέρον τους, όταν κάνουν μαθηματικές εργασίες.
- Το επίπεδο αυτοπεποίθησης, όταν χρησιμοποιούν υπολογιστικά μέσα.
- Τη στάση τους στη μάθηση των μαθηματικών σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον.

Φαίνεται να υπάρχει μια ασθενής σχέση ανάμεσα στις στάσεις απέναντι στα μαθηματικά και στο υπολογιστικό περιβάλλον, όσον αφορά την αυτοπεποίθηση και το κίνητρο. Οι στάσεις των μαθητών στη χρήση τεχνολογίας για τη μάθησή τους στα μαθηματικά συσχετίζονται πολύ ισχυρότερα με τις στάσεις τους προς τα υπολογιστικά μέσα παρά με τις στάσεις τους στα μαθηματικά (Cretchley, 2000). Οπότε, ένα υπολογιστικό περιβάλλον μας εξυπηρετεί να επεκτείνουμε τη μάθηση των μαθηματικών πέρα από τη μάθηση των εννοιών, των διαδικασιών και των εφαρμογών τους, να καλλιεργήσουμε στους μαθητές στάσεις να βλέπουν τα μαθηματικά ως ένα δυναμικό τρόπο παρατήρησης των πραγματικών καταστάσεων, να τους αναπτύξουμε διαθέσεις να προσεγγίζουν μαθηματικά θέματα με αυτοπεποίθηση, να εξερευνήσουν διαφορετικές προσεγγίσεις τους με προθυμία, με επιμονή και ενδιαφέρον και να τους οδηγήσουμε να αναστοχάζονται την ίδια τους τη σκέψη (NCTM, 2000).

Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σύμφωνα με σχετικές έρευνες έχουν καταγραφεί τρεις προσεγγίσεις στη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων στη μαθηματική εκπαίδευση (Clements, 2000). Η πρώτη προσέγγιση είναι αυτή κατά την οποία χρησιμοποιείται περιστασιακά ένα λογισμικό εξάσκησης και εφαρμογής, χωρίς να εντάσσεται στη διδακτική πρακτική. Στη δεύτερη προσέγγιση το προηγούμενο λογισμικό εντάσσεται στη διδακτική πρακτική, αλλά παραμένει μέσα στο πλαίσιο της διδασκαλίας των γνωστικών αντικειμένων που προβλέπει το αναλυτικό πρόγραμμα και στην τρίτη προσέγγιση χρησιμοποιείται λογισμικό για διερεύνηση και λύση προβλημάτων, τα οποία δεν αναφέρονται υποχρεωτικά μέσα στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος. Η μεγάλη πρόκληση φαίνεται να προέρχεται από την τρίτη προσέγγιση, αφού ο υπολογιστής δε χρησιμοποιείται πλέον ως μία διδακτική μηχανή. Αυτό που μπορεί κάποιος να επισημάνει είναι ότι οι δυο πρώτες προσεγγίσεις υπονοούν μια σταθερή αδιαπραγμάτευτη μαθηματική γνώση, προς την οποία το εργαλείο επιτρέπει συντομότερη πρόσβαση από ό,τι επιτρέπει η χρήση των παραδοσιακών μέσων (μολύβι, χαρτί). Η τρίτη προσέγγιση αποτελεί την επιλογή για την παρούσα εργασία, η οποία διαπραγματεύεται συγκεκριμένη μαθηματική έννοια, την έννοια εμβαδού παραλληλογράμμου. Ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσεται η διδακτική πρακτική για τη συγκεκριμένη έννοια συνδέεται άμεσα με τα διδακτικά μέσα που χρησιμοποιούνται. Δεν υπάρχει σαφής συσχετισμός και γενίκευση του τρόπου υπολογισμού για όλα τα είδη του παραλληλογράμμου. Αυτό ίσως οφείλεται και στη στατικότητα των γεωμετρικών σχημάτων ένεκα του περιορισμού των εργαλείων (βιβλίο, τετράδιο, κιμωλιοπίνακας). Η μη δυναμική διαχείριση αυτών δημιουργεί μαθησιακά εμπόδια, τόσο στην κατανόηση της ίδιας της έννοιας όσο και στον υπολογισμό του εμβαδού οποιουδήποτε σχήματος της οικογένειας των παραλληλογράμμων, ειδικότερα όταν η βάση είναι διαφορετική από αυτή της οριζόντιας. Η πρακτική αυτή έχει ως αποτέλεσμα τη χρήση του υπολογιστή ως εργαλείου, το οποίο απλά συγκεντρώνει και συν-προβάλλει τις αναπαραστάσεις αυτές με έναν περισσότερο συνεκτικό και άμεσο τρόπο από ό,τι όταν χρησιμοποιείται χαρτί και μολύβι. Σε κάθε περίπτωση, όμως, η έννοια του εμβαδού παραμένει εγκλωβισμένη μέσα στο συμβολικό σύστημα, με αποτέλεσμα η μια αναπαράσταση να αναφέρεται στην άλλη και όχι σε κάποιο φαινόμενο. Η συμβολή του υπολογιστή προς αυτή την κατεύθυνση είναι αποφασιστική. Μέσα από δραστηριότητες δυναμικής διαχείρισης γεωμετρικών σχημάτων μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μαθητές οδηγούνται στην κατάλληλη μαθηματική γνώση, μέσω της οποίας αποκτούν τη δυνατότητα να ανταποκρίνονται σε καταστάσεις προβληματισμού, δομώντας, αναδομώντας και οργανώνοντας νοητικές διαδικασίες και αντικείμενα τα οποία θα χρησιμοποιήσουν για να διαπραγματευθούν αυτές τις καταστάσεις (Dubinsky,1989). Στην περίπτωση του εμβαδού, η διατήρηση εμβαδού ορίζεται ως η διαδικασία κατά την οποία η αριθμητική τιμή μέτρησης του εμβαδού μιας επιφάνειας παραμένει αναλλοίωτη, όταν το σχήμα που ορίζει την επιφάνεια μετασχηματίζεται και παίρνει διαφορετική ποιοτική μορφή (Piaget et al.,1981). Η κατανόηση της αρχής της αμεταβλητότητας της επιφάνειας ενός σχήματος καθώς αυτό μετασχηματίζεται, συνεπάγεται ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια διαφορετική αντίληψη για την έννοια του εμβαδού, αποκτώντας ένα δυναμικό χαρακτήρα. Η ανάπτυξη από μέρους των μαθητών της αρχής αυτής θεωρείται ως πρωταρχική διαδικασία για την κατανόηση της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού (Πιττάλης,2004). Τα εργαλεία, που χρησιμοποιούν οι μαθητές σε δραστηριότητες που αναφέρονται στην αρχή της διατήρησης του εμβαδού, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας (Kordaki, 2003). Η ενιαία μορφή της αριθμητικής, γραφικής και συμβολικής αναπαράστασης των εννοιών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν το αμετάβλητο της έννοιας, όταν το σχήμα μεταβάλλεται ως προς τη θέση. Το λογισμικό δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να προσεγγίσουν την αρχή της διατήρησης του εμβαδού με ένα διερευνητικό και δυναμικό τρόπο, αφού έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν ένα άπειρο πλήθος ισεμβαδικών σχημάτων. Τους δίνεται, επίσης, η ευκαιρία να μελετήσουν κλάσεις παραλληλογράμμων που μετασχηματίζονται στο ίδιο ορθογώνιο. Μέσα από συνεχείς δραστηριότητες και ερωτήσεις του τύπου «τι θα γίνει αν» κινούνται ανάμεσα εμπειρικής και παραγωγικής απόδειξης και οδηγούνται σε γενικεύσεις και ανακαλύψεις (Hadas & al,2000). Οι μαθητές εφοδιάζονται με δυνατότητες να αντιληφθούν όλες τις λειτουργίες της απόδειξης και να τη χρησιμοποιήσουν για αιτιολόγηση, επεξήγηση, διερεύνηση, ανακάλυψη και συστηματοποίηση προτάσεων σε ένα αξιωματικό σύστημα.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΚΑΙ Η ΔΟΜΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Η διαγραμματική απεικόνιση αποτελεί τον πιο συνηθισμένο τρόπο αναπαράστασης γεωμετρικών αντικειμένων (Τσούκας & al., 2004).Αυτές οι οπτικές αναπαραστάσεις φαίνεται να ασκούν ισχυρή επίδραση στην ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές (Contreras,2003). Το μοντέλο του Vinner (1983, 1991) περιγράφει την ύπαρξη τριών κύριων ειδών νοητικών αναπαραστάσεων που συνδέονται με μια μαθηματική έννοια: το μαθηματικό ορισμό της έννοιας, την αντίληψη του μαθητή για το μαθηματικό ορισμό και τη νοερή αναπαράσταση της έννοιας στη σκέψη των μαθητών. Ο μαθηματικός ορισμός της έννοιας αναφέρεται στο ελάχιστο σύνολο αναγκαίων ή κρίσιμων ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν την έννοια. Για παράδειγμα, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ορίζεται ως το γινόμενο της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος. Η θέση της βάσης σε σχέση με το παραλληλόγραμμο και η διευθύνσή του στο χώρο δεν αποτελούν κρίσιμες ιδιότητες του εμβαδού.

Ως αποτέλεσμα των προϋπαρχουσών εμπειριών τους, οι μαθητές αναπτύσσουν δικές τους αντιλήψεις όσον αφορά τον ορισμό των σχημάτων. Η αντίληψη που έχουν οι μαθητές για το μαθηματικό ορισμό είναι αυτός που εκφράζουν, όταν τους ζητείται να ορίσουν μια μαθηματική έννοια και να αποτυπώσουν τη νοερή αναπαράστασή της, όπως τη συλλαμβάνουν. Για παράδειγμα, συχνά οι μαθητές θεωρούν ότι το ύψος του παραλληλογράμμου πρέπει να βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του.

Στόχος της διδασκαλίας, είναι η γνωστική ενότητα, δηλαδή η ταύτιση του μαθηματικού ορισμού, της αντίληψης των μαθητών για το μαθηματικό ορισμό και της νοερής αναπαράστασης που έχουν δημιουργήσει για την έννοια. Ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας της γεωμετρίας ασκεί περιορισμένη επίδραση στη σωστή οικοδόμηση της γνωστικής ενότητας. Ως εκ τούτου, ορισμένες παρανοήσεις στη σκέψη των μαθητών παραμένουν ή και εντείνονται. Στις παρανοήσεις αυτές συμβάλλουν σε πολύ μεγάλο βαθμό και οι πρωτοτυπικές έννοιες των μαθητών, που αναπτύσσονται κατά τη διδασκαλία της στατικής γεωμετρίας (Herskowitz et al.,1990). Για παράδειγμα, η οριζόντια τοποθέτηση της βάσης για την εύρεση του εμβαδού.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Για να αναλύσουμε την επίδοση των μαθητών μέσα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον είναι αναγκαίο να αναγνωρίσουμε τους σημαντικούς δεσμούς-σημεία ενσωμάτωσης στο πλέγμα των μαθηματικών ιδεών, όπως έννοιες, δεξιότητες, φόρμες, συναισθήματα. Μία κλίμακα κριτηρίων, η οποία μας επιτρέπει μια ικανοποιητική προσέγγιση αξιολόγησης των μαθητών, είναι η εξέταση δέκα βασικών παραγόντων: εννοιολογικό βάθος, έλεγχος, προσπάθεια, ευελιξία, λογική, δημιουργικότητα, μεθοδολογία, οργάνωση, διαδικασία και ταχύτητα. Αυτοί οι παράγοντες υπεισέρχονται στα τρία κύρια είδη νοητικών αναπαραστάσεων που συνδέονται με τη μαθηματική έννοια και εκφράζουν μια ολιστική άποψη της μαθηματικής παρουσίασης.(Gray & Tall 1991; Sfard, 1991).

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΒΑΘΟΣ: Το εννοιολογικό βάθος σχετίζεται με την ικανότητα του μαθητή να απομονώνει και να διακρίνει τη δομή που είναι ενσωματωμένη σε μια κατάσταση, δηλαδή τα δομικά χαρακτηριστικά της κατάστασης. Τα δομικά χαρακτηριστικά αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι έννοιες, στις σχέσεις που καθορίζουν τις συμπεριφορές τους, και απαιτούν υψηλό επίπεδο αφαιρετικής ικανότητας. Κατά τον Bruner (Sierpinska, 1994) πολλά ενεργήματα κατανόησης συνίστανται όχι απλά στην αναπαράσταση ενός αντικειμένου, αλλά στην μετάφραση μιας αναπαράστασης σε μια άλλη. Για παράδειγμα, το αμετάβλητο του εμβαδού, όταν το σχήμα μεταβάλλεται ως προς τη θέση

ΕΛΕΓΧΟΣ: Υπάρχουν δύο είδη ελέγχου που είναι σημαντικά. Το ένα αναφέρεται στη διαδικασία της προηγούμενης γνώσης, ελέγχοντας ένα αποτέλεσμα που έχει αποκτηθεί και το αίσθημα ότι είναι εφικτό. Το άλλο είδος ελέγχου είναι περισσότερο δύσκολο για να περιγραφεί, αλλά μπορεί να εκφραστεί με τη φράση «ξέρω τι κάνω, ελέγχω τις μαθηματικές έννοιες, εργάζομαι με αυτές, επειδή είμαι οικείος με τα χαρακτηριστικά τους» (Bergsten,1993). Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, η θέση της βάσης σε σχέση με το παραλληλόγραμμο και η διεύθυνσή του στο χώρο δεν αποτελούν κρίσιμες ιδιότητες του εμβαδού.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: Στα σχολικά μαθηματικά η φαντασία ή πρωτοτυπία στη μαθηματική σκέψη σπάνια επισημαίνεται. Όταν όμως χρησιμοποιείται από τους μαθητές, αποτελεί δείκτη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Στο παράδειγμά μας, η δημιουργικότητα δηλώνεται από την ευκαμψία που έχουν οι μαθητές να κατασκευάζουν σχήματα, να τα τροποποιούν, να τα μετακινούν και να τα μετασχηματίζουν χωρίς να αλλοιωθούν οι κρίσιμες γεωμετρικές τους ιδιότητες.

ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ: Μπορεί μερικές φορές να φαίνεται ότι ο μαθητής έχει προσπαθήσει σκληρά να διαχειριστεί μια κατάσταση προβληματισμού και για τους αδύνατους μαθητές η προσπάθεια είναι ο πιο κρίσιμος παράγοντας. Ωστόσο, επειδή αυτός είναι συναισθηματικός παράγοντας, δεν μπορεί να κριθεί πάντα από μία γραπτή μόνο απάντηση του μαθητή. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε κατά πόσο οι μαθητές πειραματίζονται μετρώντας, συγκρίνοντας και μετασχηματίζοντας τα σχήματα

ΕΥΕΛΙΞΙΑ: Η ικανότητα για αλλαγή σε ένα τρόπο σκέψης κατάλληλο για συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση, π.χ. αριθμητική, γραφική ή συμβολική αναπαράσταση παρουσίασης μαθηματικών ιδεών, είναι σημαντική για τη επίλυση πολλών μαθηματικών προβλημάτων. Εδώ συμπεριλαμβάνεται η ικανότητα να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά σύμβολα, τα οποία αναπαριστούν ένα μαθηματικό αντικείμενο ή μία μαθηματική λειτουργία που πρέπει να εκτελεστεί, καθώς και η ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται τα πολλαπλά είδη αναπαραστάσεων. Κατά πόσο π.χ οι μαθητές διερευνούν ένα άπειρο πλήθος ισεμβαδικών σχημάτων ή μελετούν κλάσεις παραλληλογράμμων που μετασχηματίζονται στο ίδιο ορθογώνιο.

ΛΟΓΙΚΗ: Υπάρχουν πολλές πλευρές λογικής που εμπλέκονται στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Ένας είναι η αυστηρότητα, δηλ. ο βαθμός στον οποίο ένα συμπέρασμα στη διαδικασία λύσης είναι λογικά έγκυρο. Μία άλλη πλευρά είναι η συνέπεια, δηλ. η απουσία ανακολουθίας. Η πληρότητα, η ακρίβεια και η γενικότητα στην αιτιολόγηση μπορούν επίσης να θεωρηθούν πλευρές της λογικής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Με την προτεινόμενη δραστηριότητα ο μαθητής μπορεί να διαχειριστεί τη γεωμετρική αναπαράσταση του παραλληλογράμμου με τη βοήθεια ενός μικρού εξειδικευμένου προγράμματος που δημιουργήθηκε με το λογισμικό The Geometer' s Sketchpad. Οι δυνατότητες με τη χρήση του λογισμικού είναι:

- Δυναμική μεταβολή: ορθογώνιο ⇔ Πλάγιο ⇔ Ρόμβος ⇔ Τετράγωνο
- Δυναμική μεταβολή μήκους ύψους και βάσης σε κάθε είδος παρ/μου.

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές:

- Μετρούν – παρατηρούν – διαπιστώνουν
- Υπολογίζουν – παρατηρούν – διαπιστώνουν
- Παρατηρούν – υποθέτουν - επαληθεύουν

Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν ένα ειδικά σχεδιασμένο φύλλο εργασίας που θα περιγράφει τα καθήκοντα και τις εργασίες σ' αυτή τη δραστηριότητα. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στη δυναμική διαχείριση του γεωμετρικού μοντέλου παραλληλογράμμου. Στην περίπτωση της παραδοσιακής διδασκαλίας, ο μαθητής δεν μπορεί εύκολα να κατανοήσει ότι χρησιμοποιώντας τον ίδιο γεωμετρικό τύπο μπορεί να υπολογίσει το εμβαδόν όλης της οικογένειας των παραλληλογράμμων. Δεν υπάρχει σαφής συσχετισμός και γενίκευση του ίδιου τρόπου υπολογισμού για όλα τα είδη του παρ/μου. Αυτό ίσως οφείλεται και στη δυσκολία που προκύπτει από τη στατικότητα των γεωμετρικών σχημάτων, που δεν επιτρέπει στους μαθητές το μετασχηματισμό από το ένα είδος παραλληλογράμμου στο άλλο. Οι δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού εντοπίζονται επίσης στον υπολογισμό της μέτρησης του εμβαδού, όταν αλλάζουν οι θέσεις της βάσης και του αντίστοιχου ύψους.

ΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η δραστηριότητα στηρίζεται στην παρατήρηση και στη δυναμική διαχείριση ενός γεωμετρικού μοντέλου έτσι ώστε να μπορούν να το περιγράφουν με φυσική γλώσσα και να διατυπώνουν συμπεράσματα και υποθέσεις και ίσως γενικεύσεις. Ο βασικός στόχος της δραστηριότητας που προτείνεται είναι να αναδειχθούν οι αναστοχαστικές κατασκευές, τις οποίες έχουμε ήδη περιγράψει. Οι επί μέρους στόχοι είναι:

α) Η κινητοποίηση (motivation) των μαθητών μέσω του προβλήματος.

β) Η εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις λύσης προβλήματος (problem solving).

γ) Η αναπαράσταση του προβλήματος μέσω του εκπαιδευτικού λογισμικού για τη γεωμετρία (sketchpad).

δ) Η δημιουργία εικασιών για ενδεχόμενες σχέσεις μεταξύ μεγεθών τα οποία συμμεταβάλλονται.

ε) Στην παρατήρηση ενός γεωμετρικού μοντέλου έτσι ώστε να μπορούν να το περιγράφουν με φυσική γλώσσα και να διατυπώνουν συμπεράσματα και υποθέσεις και ίσως γενικεύσεις

Ειδικότερα:

- Να κατανοήσουν την έννοια των διαστάσεων ενός παρ/μου ως απόσταση των απέναντι πλευρών του.
- Να γνωρίζουν τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου
- Να αντιληφθούν ότι ο ίδιος τύπος υπολογισμού εμβαδού ισχύει για όλα τα είδη του παρ/μου ανεξάρτητα από την επιλογή της βάσης και του ύψους.
- Αξιοποίηση του υπολογιστικού περιβάλλοντος για την υπερνίκηση των δυσκολιών στη μετάβαση από το ένα είδος παρ/μου στο άλλο ενώ διατηρείται αναλλοίωτη η βασική ιδιότητα του παρ/μου ή διατηρούνται σταθερά κάποια μεγέθη (βάση ή ύψος)
- Στη γενίκευση του τύπου υπολογισμού του εμβαδού παρ/μου για όλα τα είδη αυτού.

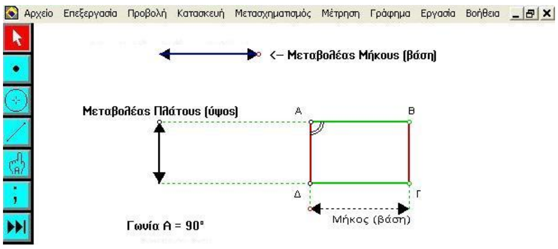
Η προτεινόμενη δραστηριότητα καλύπτει τους γενικούς μαθησιακούς στόχους για την συγκεκριμένη γνωστική περιοχή στην Α΄ Γυμνασίου όπου οι μαθητές πρέπει (Οδηγίες 2004-05):

- Να γνωρίζουν και να εφαρμόζουν τον τύπο εμβαδού του παρ/μου
- Να λύνουν προβλήματα όπου δίνεται το εμβαδόν και μία διάσταση και ζητείται η άλλη.
- Ο εθισμός των μαθητών στην επίλυση εγγραμμάτων τύπων με μία ή δύο μεταβλητές.

Η αναμενόμενη διδακτική πορεία της δραστηριότητας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ:

Α' ΜΕΡΟΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΟΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΣ



Οι μαθητές διαχειρίζονται το μοντέλο του παρ/μου και πειραματίζονται για λίγο ελεύθερα έτσι ώστε να εξοικειωθούν με τις δυνατότητες που τους παρέχονται με τη βοήθεια του προγράμματος όπως:

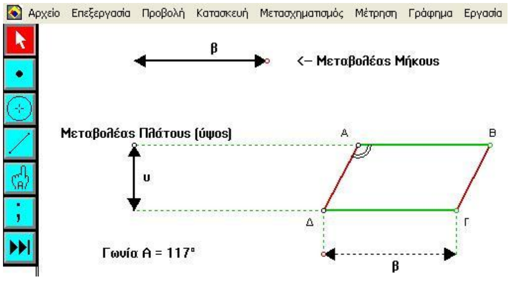
- Να μετασχηματίσουν το παραλληλόγραμμο από ορθογώνιο σε πλάγιο ή ρόμβο ή τετράγωνο μετακινώντας μια κορυφή.
- Να μεταβάλλουν τα μήκη πλευρών ή την απόσταση (ύψος) των απέναντι ευθειών είτε με τους μεταβολείς μήκους / πλάτους είτε με τη μετακίνηση ενός δυναμικού σημείου.
- Να μετρήσουν τα μήκη των βάσεων και του αντίστοιχου ύψους καθώς και το εμβαδόν του επίπεδου σχήματος

Β’ ΜΕΡΟΣ: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ - ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

Από τον ελεύθερο πειραματισμό οι μαθητές μπορούν να περάσουν σε διαδικασίες μέτρησης και χαρακτηρισμού των πλευρών και των διαστάσεων στα διάφορα είδη παρ/μου συμπληρώνοντας πίνακες και συνδέοντας τα αποτελέσματα των μετρήσεων με τις έννοιες βάση και το αντίστοιχο ύψος (το οποίο συμπίπτει με την απόσταση των απέναντι πλευρών). Η προσοχή στρέφεται στη σύγκριση του εμβαδού σε επιλογή μη κατακόρυφης βάσης και του αντίστοιχου ύψους στα διάφορα είδη παρ/μου. Καλούνται επίσης να πινακοποιήσουν τα αποτελέσματα εντοπίζοντας τα ζεύγη βάσης – ύψους που δίνουν τη ίδια τιμή εμβαδού κυρίως στα μη ορθογώνια παραλληλόγραμμα διατυπώνοντας παρατηρήσεις και απαντήσεις σε ερωτήματα σχετικά με θέματα όπως:

- Πόσοι συνδυασμοί βάσης – αντίστοιχου ύψους δίνουν ίδια τιμή για το εμβαδόν;
- Τι θα συμβεί στο εμβαδόν αν μεταβληθεί μόνο το ύψος ή μόνο το μήκος της βάσης;
- Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου εξαρτάται από την επιλογή της βάσης (οριζόντια, πλάγια και κατακόρυφη θέση);
- Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου για συγκεκριμένες τιμές μήκους (βάση) και πλάτους (ύψος) είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της πλευράς ως βάση. Ισχύει το ίδιο και για το πλάγιο παραλληλόγραμμο; Δικαιολογείστε την απάντησή σας:
- Για συγκεκριμένες διαστάσεις μήκους (βάση) και πλάτους (ύψος) να υπολογίσετε, με τη βοήθεια του λογισμικού, το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως προς βάση τη ΔΓ και ύστερα ως προς βάση τη ΒΓ και να γράψετε τα αποτελέσματα. στον πίνακα που δίνετε στο φύλλο εργασίας.

Γ΄ ΜΕΡΟΣ: ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΕΜΒΑΔΩΝ



Για τις ίδιες διαστάσεις μήκους (βάση) και πλάτους (ύψος) να μετασχηματίσετε το ορθογώνιο στα άλλα είδη παραλληλογράμμου. Για τις ίδιες διαστάσεις μήκους (βάση) και πλάτους (ύψος) οι μαθητές υπολογίζουν τα αντίστοιχα εμβαδά του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ως προς βάση τη ΔΓ και ύστερα ως προς βάση τη ΒΓ και πινακοποιούν τα αποτελέσματα για τα τέσσερα είδη του παραλληλογράμμου. Στη συνέχεια καλούνται να σχολιάσουν ερωτήσεις όπως:

- Για συγκεκριμένο μήκος της βάσης ΔΓ και της απόστασης των απέναντι πλευρών η τιμή του εμβαδού αλλάζει όταν αλλάζει το είδος του παραλληλογράμμου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- Για συγκεκριμένο μήκος της βάσης και της απόστασης των απέναντι πλευρών η τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ή του πλαγίου ή του ρόμβου αλλάζει όταν αλλάζει η επιλογή της πλευράς ως βάση; Για το τετράγωνο τι παρατηρείται; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δ΄ ΜΕΡΟΣ : ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Οι μαθητές καλούνται να διαπιστώσουν «*Ποια σχέση έχει το εμβαδόν ενός τριγώνου με το εμβαδόν ενός παρ/μου με την ίδια βάση και ύψος*;». Θα χρησιμοποιήσουν το ίδιο μοντέλο του παραλληλογράμμου με το λογισμικό Sketchpad όπου με τους μεταβολείς μήκους και πλάτους διαλέγουν κάποια συγκεκριμένα μήκη με τα οποία θα εργαστούν. Για συγκεκριμένες διαστάσεις φροντίζουν ώστε το παραλληλόγραμμο στην οθόνη του υπολογιστή να είναι ορθογώνιο.

Η περίπτωση τριγώνου & ορθογωνίου: Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ κατασκευάζουν τη διαγώνιο ΑΓ και διαπιστώνουν με τη βοήθεια των μετρήσεων του λογισμικού ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ θα έχουν ίσα εμβαδά.(μπορεί να τεθούν και ερωτήματα για την ισότητα αυτών των τριγώνων) ενώ καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα «Ποια σχέση έχει το εμβαδόν του ΑΓΔ με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ»; Μπορούν να πειραματιστούν με διάφορα μήκη της βάσης β (ΔΓ) και του ύψους υ (ΑΔ) του ορθογωνίου υπολογίζοντας κάθε φορά το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. Οι μαθητές παρατηρούν τις μετρήσεις και καλούνται να επαληθεύσουν την προηγουμένη ερώτηση για τη σχέση των εμβαδών τριγώνου και ορθογωνίου;

Η περίπτωση τριγώνου & πλαγίου παρ/μου: Οι μαθητές θα μετασχηματίσουν το ορθογώνιο σε πλάγιο ή ρόμβο και θα επαναλάβουν την ίδια εργασία για να υποθέσουν και να διαπιστώσουν τη σχέση των εμβαδών τριγώνου και πλάγιου παραλληλογράμμου: Ισχύει η ίδια σχέση για το εμβαδόν του τριγώνου και του παραλληλογράμμου σε όλα τα είδη αυτού (με την ίδια βάση και ύψος); Μπορείτε να γράψετε έναν τύπο που να υπολογίζει το εμβαδόν του τριγώνου με τα γράμματα Ε (εμβαδόν), β (βάση) και υ (ύψος);

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Το πρόγραμμα (αρχείο του Sketchpad) πρέπει ήδη να έχει ήδη δημιουργηθεί (από τον διδάσκοντα ή από κάποιον άλλο).

Η προτεινόμενη δραστηριότητα αναφέρεται στο δεύτερο κεφάλαιο «Μετρήσεις Μεγεθών» (§ 2.11) και στο έβδομο κεφάλαιο «Ευθύγραμμα Σχήματα» (§ 7.4, 7.7) του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου. Στις Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθηματικών 2002-03 του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου αναφέρεται ότι στις §7.6 – 7.7 μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα «Εμβαδά Παραλληλογράμμων και Τριγώνων» σελ. 65-68 του Βιβλίου Μαθητή που συνοδεύει το λογισμικό.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών πάνω στο γνωστικό αντικείμενο που έχει επιλεγεί εντοπίζονται στην έννοια και τα είδη του παρ/μου καθώς και στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του όπως προκύπτουν μέσα από την παραδοσιακή διδασκαλία. Επίσης οι μαθητές πρέπει να έχουν κατανοήσει την έννοια της απόστασης σημείου από ευθεία.

Οι προαπαιτούμενες τεχνικές γνώσεις για τη χρησιμοποίηση του τεχνολογικού μέσου με τη βοήθεια του οποίου θα υλοποιηθεί το σενάριο εντοπίζονται στη εξοικείωση με τα βασικά εργαλεία του περιβάλλοντος του λογισμικού Sketchpad και τις εντολές «εσωτερικό πολυγώνου» (μενού κατασκευή), «απόσταση», «εμβαδόν» και «υπολογισμοί» (μενού μέτρηση).

Το προτεινόμενο σενάριο προτείνεται να ενταχθεί στο σχολείο σύμφωνα με το αναλυτικό και ωρολόγιο πρόγραμμα, μετά τη διδασκαλία των ενοτήτων § 7.4, 7.7.

Για την εφαρμογή της δραστηριότητας απαιτείται ένα φύλο εργασίας για τους μαθητές, η καλή λειτουργία του εργαστηρίου υπολογιστών με το λογισμικό εγκατεστημένο και η συγκρότηση ομάδων εργασίας.

Οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες και προσπαθούν να υλοποιήσουν το φύλλο εργασίας. Ο διδάσκοντας παρακολουθεί, συντονίζει και παροτρύνει αυτούς που δυσκολεύονται.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Το συγκεκριμένο παράδειγμα δραστηριότητας μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον την κατανόηση από τους μαθητές μιας από τις σημαντικές έννοιες που διαχειρίζονται στη μαθησιακή τους πορεία, την έννοια του εμβαδού του παραλληλογράμμου.

Μέσα από μια δραστηριότητα, οι μαθητές κινητοποιούνται να διαχειριστούν και τα τρία κύρια είδη νοητικών αναπαραστάσεων που συνδέονται με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια όπως: το μαθηματικό ορισμό της έννοιας του εμβαδού, την αντίληψη των μαθητών για το αμετάβλητο της έννοιας και της νοερής αναπαράστασης της έννοιας που έχουν δομήσει στη σκέψη τους.

Ως προς την αξιολόγηση, το περιβάλλον του υπολογιστή μας ευνοεί να εστιάζουμε στην ενεργητική συμπεριφορά του μαθητή, να παρακολουθούμε τα λάθη του και να καταγράφουμε το ενδιαφέρον το οποίο εκδηλώνει ως προς τη ζητούμενη μάθηση. Τα στοιχεία τα οποία καταγράφουμε και χρησιμοποιούμε ενισχυτικά στην αξιολόγησή μας είναι η εστίαση στους δέκα βασικούς παράγοντες, τους οποίους δεχτήκαμε ως κλίμακα κριτηρίων.

Συγκεκριμένα:

Ως προς το εννοιολογικό βάθος παρατηρούμε τις προσπάθειες των μαθητών να λύσουν το πρόβλημα και να δώσουν απλές και ακριβείς λύσεις, χωρίς περιττές περιπλοκές με πολλές εργασίες. (αμετάβλητο της έννοιας). Για παράδειγμα «τ*ο εμβαδόν στα διάφορα είδη του παραλληλογράμμου εξαρτάται από την επιλογή της βάσης (οριζόντια, πλάγια και κατακόρυφη θέση)»;*

Ως προς τον έλεγχο, καταγράφουμε πώς οι μαθητές διαχειρίζονται την προηγούμενη γνώση, η οποία προαπαιτείται για την επίλυση του προβλήματος. Παρατηρούμε επίσης αν οι μαθητές ξέρουν τι κάνουν, ελέγχουν τις μαθηματικές έννοιες και εργάζονται με αυτές, επειδή είναι οικείοι με τα χαρακτηριστικά τους. (προϋπάρχουσες γνώσεις). Για παράδειγμα, οι μαθητές *γνωρίζουν τον τύπο του εμβαδού, μπορούν να συνδέσουν το ύψος με την απόσταση των απέναντι παραλλήλων ευθειών* κτλ.

Ως προς τη δημιουργικότητα, παρατηρούμε τη φαντασία, την πρωτοτυπία στη μαθηματική σκέψη και την ικανότητα του κάθε μαθητή να διαχειριστεί το πρόβλημα. Για παράδειγμα μπορεί να παρατηρηθεί η εργασία στο δυναμικό μετασχηματισμό του γεωμετρικού σχήματος για την επαλήθευση εικασιών.

Ως προς την προσπάθεια, κρίνουμε τη συμμετοχή και την επιμονή που καταβάλλει ο καθένας μαθητής για να λύσει το πρόβλημα. Για τους αδύνατους μαθητές η προσπάθεια είναι ο πιο κρίσιμος παράγοντας. (συμμετοχή των μαθητών στη δραστηριότητα). Για παράδειγμα, *η προσπάθεια των μαθητών να ολοκληρώσουν τις εργασίες που προτείνει το φύλλο εργασίας ή να συμπληρώσουν τους πίνακες και να απαντήσουν στα ερωτήματα*.

Ως προς την ευελιξία, κρίνουμε τον τρόπο σκέψης, τον οποίο ο κάθε μαθητής θεωρεί ως κατάλληλο για να επιλύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα π.χ. αριθμητικό, γραφικό ή συμβολικό. Επίσης την ικανότητα να χρησιμοποιούν οι μαθητές τα μαθηματικά σύμβολα για να μοντελοποιήσουν τη συγκεκριμένη μαθηματική κατάσταση. Για παράδειγμα αναφέρεται *η δυναμική διαχείριση του σχήματος για συγκεκριμένες ερωτήσεις – πινακοποιήσεις και η αξιοποίηση του λογισμικού σε μετρήσεις και υπολογισμούς*.

Ως προς τη λογική, σημειώνουμε την πληρότητα, την ακρίβεια και τη γενικότητα στην αιτιολόγηση της επίλυσης του προβλήματος. Επίσης τη συνέπεια στη διαδικασία λύσης, δηλ. την απουσία ανακολουθίας και την εγκυρότητα των συμπερασμάτων.

Θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον, επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν εκείνες τις προσεγγίσεις στη γεωμετρική έννοια του εμβαδού, ώστε να τη διαχειριστούν ταυτόχρονα στα κύρια είδη νοητικών αναπαραστάσεων. Μέσα από τις συνεχείς δραστηριότητες στην προσπάθεια να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους τίθενται, φαίνεται ότι οι μαθητές κατακτούν την ορθή μαθηματική γνώση. Πιστεύουμε ότι η δυνατότητα να ανταποκρίνονται σε καταστάσεις προβληματισμού δομώντας, αναδομώντας και οργανώνοντας νοητικές διαδικασίες και μαθηματικά αντικείμενα τα οποία θα χρησιμοποιήσουν για να διαπραγματευθούν αυτές τις καταστάσεις, τους δομεί κριτική σκέψη και τους εφοδιάζει με ουσιαστική γνώση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Arcavi, A., & Hadas,N. (2000), *Computer Mediated learning: an example of an approach,* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5,25-45.
2. Bergsten, C. (1993). On analysis computer labs. *Technology in mathematics teaching: A bridge between teaching and learning.* Conference proceedings. B.Jaworski (ed). University of Birmingham, 133-140.
3. Bloom S. Benjamin et al. (1979). *Taxonomie des objectifs pédagogiques, domaines cognitifs et affectifs*. Les presses uninersitaires du Quebec.
4. Clements, D. (2000). From exercises and tasks to problems and projects. Unique contributions of computers to innovative mathematics education. Journal of mathematical behaviour, 19, 9-47.
5. Contreras, J. N. (2003), *Some potential realities and some improbably dreams about learning geometric concepts*, Retrieved in April 2004 from http://www.usm.edu/pt3/info/99-00/vtc/ contreras-vtc.html
6. Cretchley, P. & Galbraith, P. (2000). Mathematics of Computers? Confidence or Motivation?
7. Dubinsky, Ed. et al, (1989). Development of the process conception of function in pre-service teachers in a discrete mathematics course in Development of the process Conception of Function. Educational Studies in Mathematics.
8. Fey, J, (1989). Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems. Educational Studies in Mathematics, 20, 237-272.
9. Gray, E. & Tall, D, (1991). *Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking*. In Proceedings Fifteenth PME Conference. Assisi, Italy, 2, 72-79.
10. Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B.B (2000), The role of contradiction and uncertainly in promoting the need to prove in dynamic geometry environments, Educational Studies in Mathematics, 44,127-150.
11. Herskowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles,C.,Lappan,G.,Mitchelmore,M.,&Vinner,(1990), *Psychological aspects of learning geometry,* In P. Nesher &J.Kilpatrick. Mathematics and cognition: Aresearch synthesis by the International group for the Psychology of Mathematics Education (pp.70-95).Cambridge: England
12. Kaput, J. (1996). *The role of physical and cybernetic phenomena in building intimacy with mathematical representations (Keynote address).* In P. Clarkson (Ed.), Technology in Mathematics Education: Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia (MERGA) (pp. 20–29), Melbourne, Australia: Deakin University Press.
13. Kaput, J.J, (1986). Information Technology and mathematics: Opening new representational windows. The Journal of Mathematical Behavior 5(2), 187-207.
14. Key Curriculum Press, www.keypress.com
15. Kordaki,M.(2003), The effect of tools of a computer microworld on students'strategies regarding the concept of conservation of area, Educational Studies in Mathematics, 52,177`-209
16. Lajoie, S.P. (1993). *Computer environment as cognitive tools for enhancing learning*. In S.D Lajoie & S.J Derry (Eds.). Computer as cognitive tools (pp.261-288). LEA.
17. National Council of teachers of Mathematics, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston,VA: NCTM.
18. Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A. (1981), *The Child's Conception of Geometry*. Norton and Company, N.Y
19. Salomon, G. (1992). *Effects with of computers and the study of computer-based learning environment.* In E. De Corte et al. (Eds.). Computer-based learning environment and problem solving (pp. 249-263). NY: Springer-Verlag (NATO ASI Series F, 84).
20. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

21. Sierpinska A. (1994). *Understanding in Mathematics*. New York: The Falmer Press.
22. Smith, E. (1999). Social Constructivism, Individual Constructivism and the role of computers in Mathematics Education. Journal of Mathematical behaviour, 17(4).
23. Vochell, E. & Van Deusen, R.M (1989). *The computer and higher order thinking skills*. California: Mitchell Publishing inc.
24. Δαπόντες Ν.-Ιωάννου Σ.-Μαστρογιάννης Ι.-Τζιμόπουλος Ν.-Τσοβόλας Σ.-Αλπάς Α. (2003), Ο δάσκαλος δημιουργός: Προτάσεις για παιδαγωγική αξιοποίηση του Microworlds pro στο Νηπιαγωγείο και το Δημοτικό Σχολείο, Αθήνα, Εκδόσεις Καστανιώτη
25. Διδάσκοντας Γεωμετρία: Βιβλίο καθηγητή (2000), *Εκπαιδευτικό Λογισμικό «The Geometer's Sketchpad*», Key Curriculum Press, Ελληνική έκδοση Πληροφορική Τεχνογνωσία, Αθήνα
26. Διδάσκοντας Γεωμετρία: Βιβλίο μαθητή (2000), *Εκπαιδευτικό Λογισμικό «The Geometer's Sketchpad*», Key Curriculum Press, Ελληνική έκδοση Πληροφορική Τεχνογνωσία, Αθήνα
27. Ιωάννου Σ. – Χαρχαρίδου Α. κ.α. (2001), «*Ποιότητα εκπαιδευτικού λογισμικού: Εννέα σημεία με ψηφιακό υλικό*», Πρακτικά 1ου Συνεδρίου για την Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη, Σύρος
28. Ιωάννου Σ. (2001), «*Εφαπτομένη γωνίας και κλίση ευθείας (Β΄ Γυμνασίου) – Η έννοια της μεταβλητής (Α΄ Γυμνασίου)*», Πρακτικά 1ου Συνεδρίου για την Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη, Σύρος.
29. Ιωάννου Σ. Βλαχάκης Ε. (2000), «*Η χρήση του υπολογιστή σε διδακτικές δραστηριότητες: Διαπιστώσεις – Προπτικές και Έρευνα*», Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών IV, Πανεπιστήμιο Αιγαίου – Gutenberg.
30. Οδηγός χρήσης (2000), *Εκπαιδευτικό Λογισμικό The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Ελληνική έκδοση Πληροφορική Τεχνογνωσία, Αθήνα
31. Πιττάλης, Μ., Μουσουλίδης, Ν., &Χρίστου, Κ. (2004), *Νέες προοπτικές στη διδασκαλία της γεωμετρίας:Η περίπτωση του εμβαδού πολυγώνων,* Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου συνέδριου με Διεθνή Συμμετοχή: Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, Αθήνα
32. Τσούκκας, Λ., Ξυστούρη, Ξ., Χρίστου, Κ., Πίττα-Πανταζή. Δ. (2004), *Η περίπτωση της διδασκαλίας εμβαδού και απόδειξης μέσω μετασχηματισμού*, Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου συνέδριου με Διεθνή Συμμετοχή: Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και της επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, Αθήνα