Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2005)

3ο Συνέδριο Σύρου στις ΤΠΕ

Ιστορίες για το e

Παναγιώτα Κοταρίνου, Παναγιώτης Αγγελικόπουλος

ΙΣΤΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ e

Κοταρίνου Παναγιώτα
Μαθηματικός με Master στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.
pkotarinou@sch.gr

Αγγελικόπουλος Παναγιώτης
Μεταπτυχιακός φοιτητής στη ΣΕΜΦΕ, με ειδίκευση στη Μαθηματική Προτυποποίηση στις Νέες Τεχνολογίες
pangel@mail.ntua.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εισήγηση περιγράφεται μια διδακτική πρόταση στην ύλη της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στο 4ο Κεφάλαιο που αναφέρεται στην Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση. Η διδακτική πρόταση περιλαμβάνει καθοδηγούμενες δραστηριότητες με τους υπολογιστές, συμπληρώνεται δε από μικρές ιστορικές αναφορές, θεωρώντας ότι η ιστορική συνιστώσα είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση της κατανόησης μιας έννοιας.

Οι στόχοι για τη διδακτική μας πρόταση είναι οι παρακάτω:0

1.Να κατανοήσουν οι μαθητές, μέσα από μια ιστορία ανατοκισμού ενός κεφαλαίου, τη διαδικασία ορισμού του αριθμού ***e.*** *Με τη βοήθεια δε του προγράμματος* **Function Probe** *(Παράθυρο* ***Αριθμομηχανή)*** *αφού υπολογίσουν διάφορες τιμές του $(1+1/v)^v$, να παρατηρήσουν ότι καθώς το ν αυξάνει, το $(1+1/v)^v$ προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό e.*

2.Να διαπιστώσουν οι μαθητές μέσω ενός πειράματος και τη βοήθεια του προγράμματος **Function Probe(** *Παράθυρα* ***Πίνακας και Γράφημα)****, ότι η εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ είναι ένα μοντέλο που περιγράφει φαινόμενα σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους.*

3.Να διαπιστώσουν τα παιδιά μέσω μιας δραστηριότητας με το ***sketchpad 4.03****,τη φυσική σημασία των λογαρίθμων με βάση το e.*

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *ο αριθμός e, νόμος εκθετικής μεταβολής, Φυσικός λογάριθμος, Νεπέριος λογάριθμος*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τα Μαθηματικά, στο κεφάλαιο που αφορά την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση , αναφέρονται μεταξύ άλλων και οι εξής στόχοι. Οι μαθητές πρέπει:

- Να μπορούν να περιγράφουν τη διαδικασία ορισμού του αριθμού e
- Να γνωρίζουν ότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e είναι η συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός χ αντιστοιχίζεται στο φυσικό του λογάριθμο

Θελήσαμε λοιπόν να κάνουμε μια διδακτική πρόταση που να περιλαμβάνει τους παραπάνω στόχους και επιπλέον θα τονίζει τη σημασία του νόμου της εκθετικής μεταβολής.

Θεωρώντας ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι μια κατασκευαστική διαδικασία προτείνουμε μια σειρά από δραστηριότητες που θα βοηθήσουν το μαθητή να συμμετέχει ενεργά στην οικοδόμηση της γνώσης του. Ποιο ειδικά προτείνουμε και δραστηριότητες με υπολογιστές γιατί:

- Οι μαθητές με τη βοήθεια των υπολογιστών δραστηριοποιούνται και αυτενεργούν.
- Οι μαθητές μαθαίνουν να παρατηρούν και να διατυπώνουν εικασίες.
- Οι υπολογιστές βοηθούν την ενεργητική συμμετοχή του μαθητή στη μάθηση.

- Βοηθούν στη συνεργατική μάθηση μια και μπροστά από τον υπολογιστή μπορεί να δουλεύει μια ομάδα 2- 3 παιδιών η οποία θα πρέπει να συνεργαστεί για την εξαγωγή των συμπερασμάτων.
- Ο Η/Υ ως εποπτικό μέσο βοηθά στην κατανόηση των εννοιών καθώς και στην ανακάλυψη από τους μαθητές ιδιοτήτων των εννοιών αυτών.
- Συμβάλουν στην αποδέσμευση των μαθητών από αντιλήψεις με τις οποίες η μάθηση εμφανίζεται σαν διαδικασία απομνημόνευσης.
- Βοηθά στους γρήγορους υπολογισμούς απελευθερώνοντάς μας από δουλειά ρουτίνας και έτσι προσφέροντάς μας χρόνο για δημιουργική εργασία.

Α) ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ e

Απαιτούμενος χρόνος: μια διδακτική ώρα.

Διδακτικός στόχος

- Να μπορούν να περιγράφουν τη διαδικασία ορισμού του αριθμού e, μέσα από το πρόβλημα ανατοκισμού ενός κεφαλαίου 1,2,3,...,ν φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα.
- Να εξοικειωθούν τα παιδιά με το πρόγραμμα Function Probe (παράθυρα Αριθμομηχανή και γράφημα) που θα τους βοηθήσει στις δραστηριότητες αυτού και των επομένων μαθημάτων.

Μέσα διδασκαλίας

- Θα χρησιμοποιηθεί ένα απόσπασμα από το βιβλίο του Ντενί Γκετζ ‘‘Το θεώρημα του παπαγάλου’’, για να διεγείρουμε την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών.
- Θα χρησιμοποιηθεί το εργαστήρι των υπολογιστών και τα προγράμματα Function Probe, για να υπολογίσουν οι μαθητές τις τιμές του (1+1/ν)ν για διάφορες μεγάλες τιμές του ν.

Δομή μαθήματος

Κατ’ αρχάς ο καθηγητής θα διαβάσει το απόσπασμα από το βιβλίο ‘Το θεώρημα του παπαγάλου’ που παρατίθεται στη συνέχεια. Στη συνέχεια τα παιδιά με τη βοήθεια του παραθύρου **Αριθμομηχανή** του προγράμματος **Function Probe** υπολογίζουν τις τιμές του $(1+1/\nu)^{\nu}$ για διάφορες τιμές του ν , για να διαπιστώσουν ότι καθώς αυξάνει το ν, το $(1+1/\nu)^{\nu}$ δεν αυξάνει απεριόριστα, αλλά προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό, τον **e.** Στη συνέχεια ο καθηγητής-τρια θα παρουσιάσει ένα ιστορικό σημείωμα για το e και θα τους παρουσιάσει την εκθετική συνάρτηση με βάση το e. Τα παιδιά με τη βοήθεια του **Function Probe** (παράθυρο Γράφημα) θα δουν τη γραφική της παράσταση. Η διδακτική ώρα θα κλείσει με μια μικρή δραστηριότητα για την παρουσίαση της αλυσοειδούς συνάρτησης $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}\right)$.

Ιστορία του e

(Απόσπασμα από ‘‘ Το θεώρημα του παπαγάλου’’ σελ. 498)

Η πρώτη ερώτηση ήταν: «τι είναι το e;» Η απάντηση, τους εξέπληξε με την απλότητά της. Το e είναι ένας αριθμός! Απλά και καθαρά, σαν το 1, το 2 ή το π. Και, ακριβώς όπως κι αυτός ο τελευταίος, αντίθετα όμως με τους δύο άλλους, δεν μπορεί να γραφεί με ακρίβεια ως δεκαδικός αριθμός. Η Λέα τον περιέγραψε σαν «έναν αριθμό που δεν τελειώνει ποτέ, και που η συμπεριφορά του δεν είναι προβλέψιμη». Για να γίνουμε πιο σαφείς, η Λέα εννοούσε ότι όχι μόνο ο e έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, αλλά, επιπλέον, αυτά τα ψηφία δεν παρουσιάζουν καμιά κανονικότητα, δηλαδή δεν υπάρχει κανένας τρόπος να τα προβλέψουμε πριν τα υπολογίσουμε.

e =2,718281828…

…..-Εδώ βρίσκεται όλο το ενδιαφέρον του e παρατήρησε η Λέα. Πρόσεξε, μιλάμε υποθετικά βεβαίως. Φαντάσου ότι μέσα σ' ένα χρόνο συγκεντρώνεις ένα καλό κομπόδεμα, που θα μας επιτρέψει να πληρώσουμε το ταξίδι μας στο Μανάους. Πες πως Κ είναι το κομπόδεμα. Περιμένοντας το ταξίδι, το καταθέτεις στην τράπεζα. Ο τραπεζίτης, που ήταν εκείνη τη μέρα στις καλές του σου προτείνει ένα συγκλονιστικό επιτόκιο: 100%! Μη γελάς, έχουμε ξαναδεί τέτοια πράγματα. Όχι βέβαια με τους φτωχούς, με τις καταθέσεις των πλουσίων. Μπορείς να ονειρεύεσαι!

Υπολόγισε! Στο τέλος του χρόνου, θα είχες Κ+Κ=2Κ. Θα είχες διπλασιάσει το κομπόδεμά σου. Αν όμως, αντί να πάρεις τον τόκο στο τέλος του χρόνου, τον εισέπραττες κάθε εξάμηνο και τον κατέθετες κι αυτόν στο τέλος του χρόνου θα είχες $K(1+1/2)^2$. Υπολόγισε. Δεν θα είχες απλώς διπλασιάσει τα λεφτά σου, θα είχες 2,25Κ.

Αν τώρα, αντί να εισπράττεις τον τόκο στο εξάμηνο, τον εισέπραττες στο τρίμηνο και τον κατέθετες αμέσως, στο τέλος του χρόνου θα είχες $K(1+1/4)^4$. Υπολόγισε! Θα είχες κερδίσει ακόμα περισσότερο: 2,441Κ. Αν εισέπραττες τον τόκο κάθε μήνα, και τον κατέθετες αμέσως, θα είχες $K(1+1/12)^{12}$. Υπολόγισε! 2,5996. Ακόμα περισσότερο! Κάθε μέρα. Ακόμα περισσότερα! Κάθε δευτερόλεπτο! Ακόμη περισσότερα! Σχεδόν κάθε τίποτα της ώρας, «συνεχώς»! Δεν αντέχεις άλλο. ¨Πετάς. Σχεδιάζεις, λες ότι βρίσκεσαι στο Βυζάντιο, το κομπόδεμά σου γίνεται κομπόδεμα από κομποδέματα, τετραπλασιάζεται, δεκαπλασιάζεται, εκατονταπλασιάζεται, χιλιαπλασιάζεται, εκατομμυριαπλάζεται, άρχισες κιόλας να σκέφτεσαι να δώσεις τα μισά στην αδελφούλα σου, πολύ που σε νοιάζει, την άλλη στιγμή θα κερδίσεις τα διπλά….

Ερώτηση προς τα παιδιά:

Έχει δίκιο η Λέα;

Για να σιγουρευτείτε για την απάντησή σας, υπολογίστε τα παρακάτω με τη βοήθεια του υπολογιστή.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΑΘΗΤΗ-ΤΡΙΑ

Συμπληρώστε τα κενά με τη βοήθεια του παραθύρου Αριθμομηχανή του προγράμματος **Function Probe.**

Στο τέλος του χρόνου το Κεφάλαιο θα είναι $(1+1)^1$K=............

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>εξάμηνο</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/2)^2$K=............

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>τρίμηνο</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/4)^4$K=............

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>μήνα</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/12)^{12}$K=............

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>εβδομάδα</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/52)^{52}$K=............

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>μέρα</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/365)^{365}$K=...........

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>ώρα</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/8760)^{8760}$K=...........

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>λεπτό</u> τότε στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/525600)^{525600}$K=...........

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>δευτερόλεπτο</u> στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/31.536.000)^{31.536.000}$K=..........

Αν το Κ ανατοκίζεται ν φορές στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι ....

Τι παρατηρείτε όταν αυξάνει το ν;

....

Επίλογος της ιστορίας μας (Το θεώρημα του παπαγάλου σελ. 498)

Προσγειώσου, καλέ μου, Ίων! Το όμορφό όνειρό σου καταρρέει, Ό,τι και να γίνει, οι σύνθετοι τόκοι σου διαιρούνται, στο τέλος δεν θα πάρεις ούτε τα τριπλάσια από το κομπόδεμά σου, ούτε καν 2,8, ούτε καν 2,75, ούτε καν 2,72…

Έχεις μόνο 2,718281828…! Φουκαρά μου Ίων. Μετά από τόσα πλούτη, νάσαι μόλις e φορές πιο πλούσιος απ' ό,τι πριν.

Η εκθετική συνάρτηση και το αναπάντεχο κρέμασμα

Αν κρατήσουμε τις δυο άκρες μιας εύκαμπτης αλυσίδας και την αφήσουμε να κρεμάσει, το σχήμα που θα πάρει θα είναι αυτό της αλυσοειδούς καμπύλης. Η εξίσωση της αλυσοειδούς περιέχει το e και είναι της μορφής $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$. Μια cross section διατομή στα φουσκωμένα από τον άνεμο πανιά μιας βάρκας μας δίνει επίσης το σχήμα μιας αλυσοειδούς συνάρτησης, με τον οριζόντιο άνεμο να έχει την ίδια επίδραση στα πανιά, όπως έχει η βαρύτητα στην αλυσίδα.(Gardner 82)

Μια μικρή δραστηριότητα

Πράγματι, κρατάμε με τα χέρια μας τα άκρα μιας μικρής αλυσίδας ώστε να δουν τα παιδιά το σχήμα που θα πάρει. Μετά με τη βοήθεια του **Function Probe** σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας αλυσοειδούς συνάρτησης και με τη βοήθεια του προβολέα την προβάλουμε, ώστε να διαπιστώσουν τα παιδιά ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει το ίδιο σχήμα με την κρεμασμένη αλυσίδα.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ-ΤΡΙΑ

Τύπος ανατοκισμού **$K_{\nu}=K(1+\tau)^{\nu}$**.

Κ αρχικό κεφάλαιο, ε επιτόκιο, τ=ε/100 ο τόκος της μιας δραχμής για ένα έτος

Εδώ έχουμε επιτόκιο 100% δηλ. ε=100 και δυνατότητα ανατοκισμού ν φορές το χρόνο.

Στο τέλος του χρόνου το Κεφάλαιο θα είναι $(1+1)^{1}K=2K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>εξάμηνο</u> τότε τ=1/2

και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/2)^{2}K=2{,}25K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>τρίμηνο</u> τότε τ=1/4

και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/4)^{4}K=2{,}441K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>μήνα</u> τότε τ=1/12

και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/12)^{12}K=2{,}613035K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>εβδομάδα</u> τότε τ=1/52

και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/52)^{52}K=2{,}704813K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>μέρα</u> τότε τ=1/365

και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/365)^{365}K=2{,}714567K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>ώρα</u> τότε τ=1/8760

και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι$(1+1/8760)^{8760}K=2{,}718127K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>λεπτό</u> τότε τ=1/525600 και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/525600)^{1/525600}K=2{,}718279K$

Αν το Κ ανατοκίζεται ανά <u>δευτερόλεπτο</u> τότε τ=1/31.536.000 και στο τέλος του χρόνου το κεφάλαιό μου θα είναι $(1+1/525600)^{31.536.000}$K=2,718282K

Παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνει το ν, αυξάνει και το $(1+1/ν)^{ν}$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο άρρητος αυτός αριθμός συμβολίζεται με e.

Ιστορική αναδρομή

Ο Leonard Euler, Ελβετός μαθηματικός του 18ου αιώνα, πρώτος χρησιμοποίησε το σύμβολο e. Είναι πιθανό να το επέλεξε γιατί το e είναι το επόμενο φωνήεν του a, το οποίο είχε χρησιμοποιήσει για κάποιον άλλον αριθμό. Επειδή όμως ο Euler έκανε τόσες πολλές ανακαλύψεις για το e, ο αριθμός αυτός είναι γνωστός σαν ‘‘ ο αριθμός του Euler’’. Εκτός από όριο της άπειρης σειράς $(1+1/ν)^{ν}$, το e μπορεί να εκφραστεί και $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}$…Η σειρά αυτή συγκλίνει γρήγορα και μας κάνει δυνατό τον υπολογισμό του e , με προσέγγιση οποιουδήποτε δεκαδικού στοιχείου θέλουμε.(Gardner)

Β) Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Απαιτούμενος χρόνος :μια διδακτική ώρα.

<u>Στόχος του μαθήματος</u>

Να διαπιστώσουν οι μαθητές μέσω ενός πειράματος τη σημασία της εκθετικής συνάρτησης ως μοντέλου για την περιγραφή φαινομένων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Το πείραμα αναφέρεται στο βιβλίο Φυσικής Γενικής παιδείας της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Function Probe θα έχουμε γρήγορα και με ακρίβεια τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $N(t)=N_0e^{-0,5x}$ που είναι απαραίτητη για την εξαγωγή των συμπερασμάτων μας.

<u>Υλικά και μέσα διδασκαλίας</u>

1 κουτί σοκολατάκια M&M’s

Το πρόγραμμα Function Probe.(Παράθυρα Πίνακας και Γράφημα)

<u>Δομή του μαθήματος</u>

Τα παιδιά αφού πάρουν τις οδηγίες του πειράματος, το εκτελούν και με τη βοήθεια του προγράμματος Function Probe αντιλαμβάνονται ότι το φαινόμενο υπακούει σ’ ένα νόμο που εκφράζεται με μια συνάρτηση της μορφής $N(t)=N_0e^{-0,5x}$. Στη συνέχεια ο καθηγητής- τρια, μέσα από παραδείγματα θα τους τονίσει τη σημασία του νόμου της εκθετικής μεταβολής.

<u>Οδηγίες πειράματος για τους μαθητές</u>

1. Βάλτε όλα τα σοκολατάκια στο άδειο κουτί, ανακινήστε το καλά , ώστε να ανακατευτούν καλά και αδειάστε το περιεχόμενο στο τραπέζι. Μετρήστε το συνολικό αριθμό των M&M’s . Γράψτε τον αριθμό αυτό στο πρώτο κουτάκι της δεύτερης σειράς του πίνακα που φαίνεται παρακάτω

Αριθμός μέτρησης	1	2	3	4	5	6	7
M&M’s που έμειναν							

Απομακρύνετε εκείνα τα σοκολατάκια που έχουν στην επάνω όψη τους το M. Μια καλή ιδέα θα ήταν να το φάτε! Μετρήστε το συνολικό αριθμό από τα σοκολατάκια που απέμειναν τώρα στο τραπέζι και σημειώστε στο κουτάκι της μέτρησης υπ’ αριθμόν 2.

Επαναλάβατε τη διαδικασία αυτή 7 συνολικά φορές. Αν ο αριθμός των M&M’s που απομένει γίνει 0 σε κάποια δοκιμή, το πείραμα σταματάει και το 0 δε θα το περιλάβετε στις μετρήσεις σας.

2. Απεικονίστε με τη βοήθεια του **προγράμματος Function Probe** του υπολογιστή, σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, τα σημεία (χ,ψ), όπου στον άξονα Χ θα βάλετε τον αριθμό της μέτρησης και στον άξονα Υ τον αντίστοιχο αριθμό από τα σοκολατάκια που απέμεναν κάθε φορά. Παρατηρείστε τα σημεία. Νομίζετε ότι αποτελούν σημεία γραφικής παράστασης κάποιας συνάρτησης; Τι συνάρτηση σας θυμίζει;

…………………………………………………………………...………………………………

3. Με τη βοήθεια του **προγράμματος Function Probe** σχεδιάστε στους ίδιους άξονες την εκθετική καμπύλη $N(t) = N_0 e^{-0,5x}$, όπου N_0 ο αρχικός αριθμός των M&M's. Τι παρατηρείτε;

…………………………………………………………………...………………………………

4. Ξέρετε άλλα φαινόμενα που να υπακούουν σ' ένα νόμο που εκφράζεται με μια συνάρτηση τέτοιας μορφής;

…………………………………………………………………...………………………………

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ-ΤΡΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ FUNCTION PROBE

Βήμα 1. Ενεργοποίηση του παραθύρου 'Πίνακας', με ένα κλικ πάνω σ' αυτό

Βήμα 2. Εισαγωγή μεταβλητών:

Στη σειρά μεταβλητών (2^{η} σειρά) εισάγουμε τις μεταβλητές χ, ψ στην πρώτη και δεύτερη στήλη αντιστοίχως.

Βήμα 3. Εισαγωγή ετικετών:

Η 3^{η} σειρά είναι η σειρά ετικετών. Κάνοντας κλικ στη σειρά αυτή, ονομάζουμε τις μεταβλητές μας χ και ψ, αριθμό μέτρησης και αριθμό M&M'ς αντιστοίχως.

Βήμα 4. Εισαγωγή δεδομένων:

Εισάγουμε τις τιμές του χ στην πρώτη στήλη και τις τιμές του ψ στη δεύτερη στήλη, ξεκινώντας αμέσως κάτω από τη σειρά ετικετών.

Βήμα 5. Αποστολή δεδομένων από τον 'Πίνακα' στο 'Γράφημα':

Επιλέξτε από το μενού 'Αποστολή' την εντολή 'Σημεία σε γράφημα'. Οι τιμές εμφανίζονται ως διακριτά σημεία στο γράφημα. Για να μπορέσετε να τα δείτε, θα πρέπει να αλλάξετε την κλίμακα των αξόνων (εντολή 'Αλλαγή κλίμακας' στο μενού 'Γράφημα'). Μπορείτε τώρα να απαντήσετε στο ερώτημα 2.

Βήμα 6. Γραφική αναπαράσταση του τύπου $y = 83 * e^{-0.5x}$:

Πηγαίνετε στο παράθυρο 'Γράφημα' και από το μενού 'Γράφημα' επιλέγετε την εντολή 'Νέος τύπος'. Πληκτρολογείτε στο πλαίσιο τύπων τον τύπο με την εξής μορφή y=83*exp(-0.5x).Εμφανίζεται τότε παράθυρο διαλόγου 'Αλλαγή κλίμακας' στο οποίο θα πρέπει να καθορίσετε τα άκρα των αξόνων καθώς και τις αποστάσεις του πλέγματος.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ-ΤΡΙΑ

1.Πραγματοποιώντας το πείραμα, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Αριθμός μέτρησης	1	2	3	4	5	6	7
M&M's που έμειναν	83	46	35	24	13	7	2

2. Αποτελούν σημεία γραφικής παράστασης εκθετικής συνάρτησης.

3. Στη συνάρτηση $y = 83 * e^{-0.5x}$ ο εκθέτης 0,5 είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το Μ στην επάνω όψη από κάθε σοκολατάκι σε κάθε ρίψη. Αντιστοιχεί στη σταθερά λ των πυρήνων, η οποία εκφράζει την πιθανότητα διάσπασής του ανά μονάδα χρόνου.

4. ‘‘Την εκθετική συνάρτηση τη βρίσκουμε λίγο πολύ παντού. Στη φύση και στην κοινωνία. Η ανάπτυξη ενός φυτού, η εξάπλωση μιας επιδημίας, η εξέλιξη ενός πληθυσμού, η ραδιενέργεια, κ.λ.π. Να και το σχετικό τσιτάτο: Όταν ο *ρυθμός* της ανάπτυξης είναι ανάλογος της *υπάρχουσας* ανάπτυξης, μυρίζει εκθετική συνάρτηση’’ (Γκετζ 2000, σελ 500).

Παραδείγματα φαινομένων που ακολουθούν το νόμο της εκθετικής μεταβολής

- Οι ραδιενεργές διασπάσεις πυρήνων ακολουθούν το νόμο $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ όπου $N(t)$ ο αριθμός ραδιενεργών πυρήνων μιας ραδιενεργού ουσίας και λ πιθανότητα διάσπασης ανά μονάδα χρόνου.
- Η ανάπτυξη πληθυσμού βακτηρίων συναρτήσει του χρόνου ακολουθεί το νόμο $X(t) = X_0 e^{-\lambda t}$, όπου $X(t)$ είναι ο πληθυσμός βακτηρίων.
- Η συγκέντρωση μικροβίων συναρτήσει του χρόνου ακολουθεί το νόμο $C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$, όπου $C(t)$ ο αριθμός μικροβίων όταν χρησιμοποιείται αποστειρωτικό μέσο και C_0 ο αρχικός αριθμός μικροβίων.
- Η μεταβολή μάζας κυττάρου (μεταβολισμός) συναρτήσει του χρόνου ακολουθεί το νόμο $M(t) = M_0 e^{at}$ όπου M_0 η αρχική μάζα του κυττάρου.

(Αραχωβίτης 98)

Γ) ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Στόχος του μαθήματος

Το θεωρητικό πλαίσιο των λογαρίθμων στηρίζεται στο συσχετισμό των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου, με τους λογαρίθμους να αποτελούν τους όρους της αριθμητικής προόδου. Όμως στους φυσικούς λογαρίθμους έχουμε και μια προφανή γεωμετρική φυσική σημασία. Οι λογάριθμοι με βάση το e (οι όροι δηλ. της αριθμητικής προόδου) εκφράζουν τα εμβαδά συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων.

Αυτή τη σημασία θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουν τα παιδιά μέσα από τη δραστηριότητα με τον υπολογιστή. Ταυτόχρονα θα μας δοθεί και μια ευκαιρία για μια μη αυστηρή εισαγωγή στον ολοκληρωτικό λογισμό. (Θωμαΐδης 85)

Μέσα διδασκαλίας

Το ιστορικό σημείωμα του Γιάννη Θωμαΐδη που περιέχεται στο διδακτικό βιβλίο της Β΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε την παράγραφο που αναφέρεται στην εμφάνιση των φυσικών λογαρίθμων.

Το πρόγραμμα The Geometer’s Sketchpad, Version 4.03.

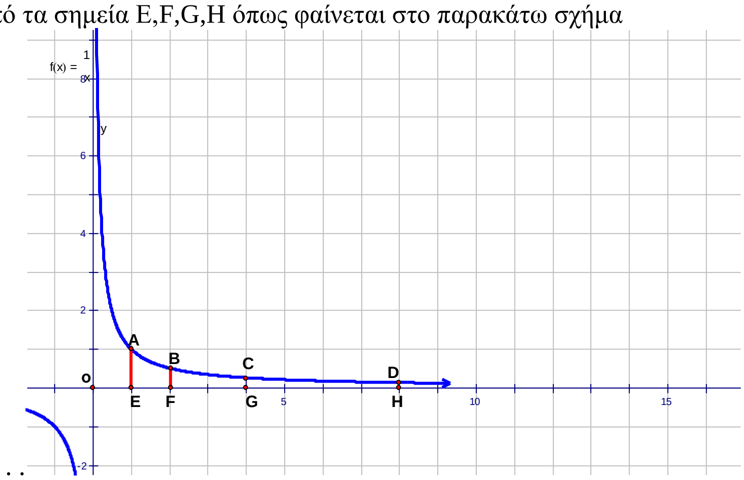
Δομή του μαθήματος

Δίνουμε στα παιδιά μια έτοιμη δραστηριότητα με το Sketchpad Version 4.03., αφού έχουμε εγκαταστήσει στους υπολογιστές αυτή την εκδοχή του Sketchpad.

Με τις οδηγίες που τους δίνουμε είναι εύκολο να απαντήσουν σε όλες τις ερωτήσεις που τους θέτουμε και να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι οι λογάριθμοι με βάση το e εκφράζουν γεωμετρικά εμβαδά. Η ενότητα θα κλείσει από τον διδάσκοντα-σουσα με ένα σύντομο ιστορικό σημείωμα στους φυσικούς λογαρίθμους.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ SKETCHPAD

Στο σχήμα μας έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης 1/x. Έχουμε θεωρήσει τα σημεία E,F,G,H στον άξονα των χ έτσι ώστε : (OE)=1, (OF)=2, (OG)=4, (OH)=8. Έχουμε δε σχεδιάσει τα καμπυλόγραμμα τραπέζια (ABFE),(BCGF),(CDHG), που κάθε ένα περικλείεται από ένα τόξο της υπερβολής, τον άξονα των χ και δυο ευθείες παράλληλες προς τον άξονα των ψ, που έχουν αχθεί από τα σημεία E,F,G,H όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

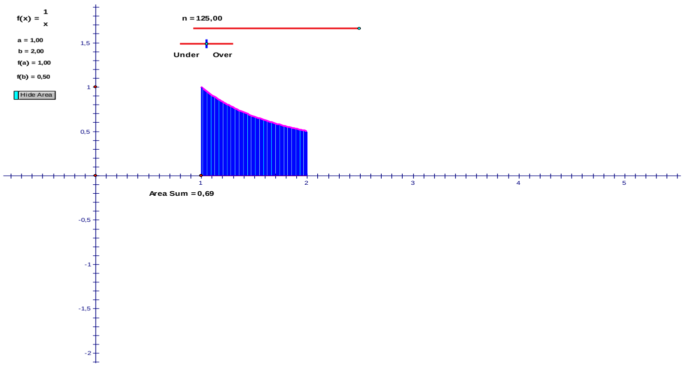


1. Τι αποτελούν οι τετμημένες των σημείων E,F,G,H;

………………………………………………………………………………………………

2.Υπολογίστε τα εμβαδά των καμπυλόγραμμων τραπεζίων (ABFE),(BCGF),(CDHG) ως εξής:

Ανοίγοντας το αρχείο AreaIntegral θα δείτε σχεδιασμένη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=1/x.



Όταν θέλετε να υπολογίσετε το εμβαδόν ABFE, θεωρείστε a=1, b=2.

Ο αριθμός n μας δίνει τη διαμέριση του EF και έτσι μας προσδιορίζει τον αριθμό των ορθογωνίων με τα οποία θα προσεγγίσουμε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου. Μας καθορίζει δηλ. το βαθμό ακρίβειας του ζητούμενου εμβαδού. Όσο μεγαλώνει το n τόσο μεγαλώνει η ακρίβεια με την οποία προσεγγίζουμε το εμβαδόν.

Για να ορίσετε το εμβαδόν BCGF , θεωρείστε a=2 και b=4 κ.ο.κ.(οι αλλαγές των τιμών a, b, γίνονται με διπλό κλικ πάνω στα κουτιά a=1, b=2.

Τι παρατηρείτε για τα εμβαδά (ABFE), (BCGF), (CDHG) ;

………………………………………………………………………………………..

3.Υπολογίστε τα παρακάτω εμβαδά:

(ABFE)=……….. (ACGE)=……………(ADHE)=…………….

Τι νομίζετε ότι αποτελούν;

………………………………………………………………………………………..

4.Υπολογίστε από το calculator τους αριθμούς ln2=………,ln4=……..ln8=………

Παρατηρείστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων 3και 4. Τι συμπεραίνετε;

……………………………………………………………………………………......

5. Ποιο καμπυλόγραμμο τραπέζιο (με μία πλευρά την AE) νομίζετε ότι έχει εμβαδόν 1;

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Μικρή ιστορική αναφορά

Οι λογάριθμοι επινοήθηκαν με σκοπό την απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών. Η δύναμή τους ως τεχνική υπολογισμού έγκειται στο γεγονός ότι με αυτούς, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση ανάγονται στις ευκολότερες πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Το 1614 πρωτοδημοσιεύτηκαν οι λογαριθμικοί πίνακες του John Napier ,που περιέχουν τους νεπέριους λογαρίθμους των ημιτόνων γωνιών ανά πρώτο λεπτό του τόξου, γεγονός που όπως σχολίασε ο Laplace ‘‘αφού μειώνει την κούραση, διπλασιάζει τη ζωή των αστρονόμων.’’ (Eves 1989). Γύρω στο 1650 όμως παρατηρήθηκε, όπως αναφέρεται από το Βέλγο Ιησουίτη Gregory st. Vincent και αργότερα από το Newton, μια απροσδόκητη εμφάνισή τους στην γεωμετρία, η οποία οδήγησε στην αναγνώριση των φυσικών λογαρίθμων (Θωμαΐδης 85)

1. Οι τετμημένες των σημείων E,F,G,H δηλ. οι αριθμοί 1,2,4,8, αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.
2. Τα εμβαδά (ABFE),(BCGF),(CDHG) είναι ίσα (εδώ μπορεί να γίνει μια μη αυστηρή εισαγωγή στην έννοια του ολοκληρώματος)
3. Τα εμβαδά αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Έχουμε λοιπόν μια αντιστοιχία ανάμεσα σε μια γεωμετρική και μια αριθμητική πρόοδο δηλ τη βασική αρχή ενός λογαριθμικού συστήματος. Βάσει αυτής της παρατήρησης οι μαθηματικοί στα μέσα του 17^ου αι. κατασκεύασαν λογαριθμικούς πίνακες, υπολογίζοντας τα αντίστοιχα εμβαδά. Ο Newton μάλιστα κατασκεύασε έναν τέτοιο πίνακα λογαρίθμων υπολογίζοντας τις τιμές των εμβαδών με 57 δεκαδικά ψηφία. Τους λογαρίθμους αυτούς ο Mercator ονόμασε Φυσικούς λογαρίθμους το 1668. (Θωμαΐδης 85)
4. Παρατηρούμε ότι τα εμβαδά εκφράζουν τους σημερινούς λογαρίθμους με βάση το e, του 2,4, και 8 αντιστοίχως. Οι λογάριθμοι αυτοί συμβολίζονται διεθνώς με το σύμβολο ln (από τα αρχικά των λέξεων logarithmus naturalis) (Θωμαΐδης 91)
5. Το τραπέζιο με a=1 και b=e.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Clements C. et al (2002), Exploring Calculus with the Geometer's Skethpad, California, Key Curriculum Press
2. Gardner, M.(1982) The transcendental Number e, in Gardner, M., Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin
3. Eves, H. (1989) Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, Αθήνα: Τροχαλία.
4. Function Probe, (2002) Βιβλίο Καθηγητή, Αθήνα, EXODUS (2000), Φυσική Γενικής παιδείας Γ΄ τάξη ενιαίου Λυκείου, ΟΕΔΒ
5. Markushevish, A. (1987), Areas and Logarithms, Moscow, Mir publishers
6. Αραχωβίτης, Ι. (1998), Εφαρμογές, τεκμηρίωση διδασκαλίας των θεωρητικών μαθηματικών, Αθήνα: Συμμετρία.
7. Γκετζ, Ν.(2000), Το Θεώρημα του παπαγάλου, Αθήνα: Πόλις.
8. Θωμαΐδης, Γ.(1985), Προέλευση και εφαρμογές της θεωρίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών, Ευκλείδης Γ, 13(Γ), 1-31
9. Θωμαΐδης, Γ.(1991), Ιστορικό σημείωμα στους Λογαρίθμους, στο Ανδρεαδάκης, Σ. et al, Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, Αθήνα, ΟΕΔΒ.
10. ΥΠ.Ε.Π.Θ., Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, (2004) Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2003-2004, Τεύχος Β΄, Μαθηματικά. ΟΕΔΒ.