Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2022)

7ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Κατασκευάζοντας χορευτικά γεωμετρικά animations για την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας

Μυρτώ Καραβάκου , Χρόνης Κυνηγός

Κατασκευάζοντας χορευτικά γεωμετρικά animations για την ενίσχυση της μαθηματικής δημιουργικότητας

Καραβάκου Μυρτώ, Κυνηγός Χρόνης
karavak@ppp.uoa.gr, kynigos@eds.uoa.gr
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΠαιΤΔΕ, ΦΣ, ΕΚΠΑ

Περίληψη

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μία μικρής κλίμακας έρευνα που μελετά την μαθηματική δημιουργικότητα μαθητών καθώς κατασκευάζουν κινούμενα γεωμετρικά ψηφιακά δομήματα με σκοπό να 'χορεύουν' στον ρυθμό ενός μουσικού κομματιού. Το ψηφιακό μέσο που χρησιμοποιήθηκε συνδυάζει την προγραμματιστική γλώσσα Logo, την τρισδιάστατη 'Γεωμετρία της Χελώνας' και τον δυναμικό χειρισμό ψηφιακών μοντέλων που κατασκευάζονται από παραμετρικές διαδικασίες. Τρεις μαθητές Γυμνασίου συμμετείχαν στην έρευνα και δημιούργησαν τρία 'χορευτικά γεωμετρικά animations'- video clips ενός τραγουδιού μέσω της κατασκευής και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών μετασχηματισμών μοντέλων στον χώρο. Η δραστηριότητά τους καταγράφηκε και αναλύθηκε ως προς τη μαθηματική δημιουργικότητα, όπως αυτή προσεγγίζεται εννοιολογικά και επιστημολογικά από τη θεωρία 'Δημιουργικής Μαθηματικής Δραστηριότητας', η οποία προσαρμόστηκε στο πλαίσιο του κατασκευαστικού εποικοδομητισμού. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι το μαθησιακό πλαίσιο παρείχε πλούσιες ευκαιρίες για μαθηματική δημιουργικότητα που περιλαμβάνει τη διαμόρφωση, διερεύνηση και επέκταση μαθηματικών ιδεών που συνδέθηκαν με καλλιτεχνικές έννοιες όπως ο συγχρονισμός, η συμμετρία και η περιοδικότητα.

Λέξεις κλειδιά: δημιουργική μαθηματική δραστηριότητα, προγραμματισμός, μαθηματικά, τέχνη.

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια, το θέμα της μαθηματικής δημιουργικότητας έχει προσεγγιστεί ερευνητικά με ποικίλους τρόπους και θεωρητικές βάσεις με στόχο την κατανόηση, την ανάλυση και την καλλιέργεια της στην διδακτική των μαθηματικών. Σύμφωνα με τις κυρίαρχες θεωρητικές προσεγγίσεις, η μαθηματική δημιουργικότητα μπορεί να οριστεί ως χαρακτηριστικό έμφυτου ταλέντου ειδικής περίπτωσης μαθητών (Mann, 2006; Sriraman, 2005) ή ως μέρος του διδακτικού κινήματος σχεδιασμού και επίλυσης προβλήματος (problem posing-solving) (Silver, 1997). Ωστόσο, η Riling (2020, 2021) σε πρόσφατη κριτική της πάνω σε υπάρχουσες προσεγγίσεις στην μαθηματική δημιουργικότητα τονίζει τους περιορισμούς τους ως προς το πώς αυτή καλλιεργείται και αναγνωρίζεται στην σχολική τάξη, καθώς και το πότε ένας μαθητής θεωρείται δημιουργικός. Η Riling πρότεινε έναν εναλλακτικό τρόπο θεώρησης της μαθηματικής δημιουργικότητας, ο οποίος συνδέεται άμεσα με την δραστηριότητα των μαθητών και είναι ανοιχτός σε κοινωνικοπολιτισμικές επιρροές. Πρόκειται, λοιπόν, για έναν πρωτοποριακό τρόπο αντίληψης της μαθηματικής δραστηριότητας, που συνάδει με τον τρόπο προσέγγισής της σε ανθρωπιστικούς ή καλλιτεχνικούς κλάδους, όπως η μουσική και η χορογραφία. Η Riling ανέπτυξε ένα θεωρητικό πλαίσιο, που ονόμασε 'Δημιουργική Μαθηματική Δραστηριότητα', μέσα στο οποίο η μαθηματική δραστηριότητα συνδέεται με την ελεύθερη, προσωπική έκφραση μαθηματικών ιδεών που μπορεί να καλλιεργηθεί σε όλους τους μαθητές. Αυτό το είδος δραστηριότητας αποκλίνει από τους διδακτικούς στόχους που τίθενται από το -για χρόνια παγιωμένο- πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, παρέχοντας ευκαιρίες για την ανάπτυξη πρωτότυπων, διαθεματικών εκπαιδευτικών προσεγγίσεων για τα μαθηματικά (Kynigos & Diamantidis, 2021). Αυτή η οπτική για τη μαθηματική

Παναγιωτακόπουλος, Χ., Καρατράντου, Α., & Αρμακόλας, Σ. (Επιμ.), *Πρακτικά Εργασιών 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»*, σ. 1049-1058, Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και Κοινωνικής Εργασίας, Πανεπιστήμιο Πατρών, 16-18 Σεπτεμβρίου 2022. ISBN 978-618-83186-7-0.

δημιουργικότητα υιοθετήθηκε στον σχεδιασμό και την ανάλυση μίας διδακτικής παρέμβασης στην οποία συμμετείχαν τρεις μαθητές Γ΄ Γυμνασίου. Το ψηφιακό μέσο σχεδιασμού και υλοποίησης της δραστηριότητας αποτελεί το MaLT2, το οποίο παρέχει δυνατότητες διαμόρφωσης, έκφρασης και διερεύνησης μαθηματικών ιδεών κατά την μοντελοποίηση τρισδιάστατων ψηφιακών αντικειμένων (Kynigos, 2015). Στόχος της έρευνας αποτελεί η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο αυτό το είδος δημιουργικότητας μπορεί να καλλιεργηθεί στο πλαίσιο της ελεύθερης καλλιτεχνικής δημιουργίας. Το θεωρητικό πλαίσιο Δημιουργικής Μαθηματικής Δραστηριότητας αποτέλεσε το βασικό θεωρητικό δόμημα για την ανίχνευση και ανάλυση επεισοδίων δημιουργικής μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών, καθώς εμπλέκονται με την κατασκευή ψηφιακών κινούμενων σχημάτων (animation) στο MaLT2.

Θεωρητική Πλαισίωση

Υποκειμενισμός και Κατασκευαστικός Εποικοδομητισμός

Η οπτική της μαθηματικής δημιουργικότητας που μελετάται βασίζεται στην επιστημολογική προσέγγιση του *υποκειμενισμού* (fallibilism), η οποία αντιτίθεται στην κοινά αποδεκτή προσέγγιση του *φορμαλισμού* (formalism) πάνω στη φύση των μαθηματικών (Davis & Hersh, 1980; Ernest, 2003; Kynigos, 2015). Σύμφωνα με την *φορμαλιστική* προσέγγιση, τα μαθηματικά αποτελούν ένα αντικειμενικό, απόλυτο, άκαμπτο και αδιαμφισβήτητο σώμα γνώσης (Ernest, 2003). Έτσι, τα μαθηματικά συστήματα θεωρούνται πλήρως απαλλαγμένα από κάθε ανθρωπιστική – κοινωνικοπολιτιστική επιρροή και διαδίδονται από γενιά σε γενιά ως γνήσια κληρονομιά γνώσης που εμπλουτίζεται μόνο μέσω της ανακάλυψης. Αντιθέτως, ο *υποκειμενισμός* βασίζεται στην παραδοχή ότι τα μαθηματικά έχουν κατασκευαστεί από την ανθρώπινη σκέψη. Τα *υποκειμενικά* μαθηματικά είναι ανοιχτά στην τροποποίηση ή αμφισβήτηση και διάψευση, αναλόγως με τον τρόπο που χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο. Μία βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο επιστημολογικές προσεγγίσεις αποτελούν οι εκπαιδευτικοί στόχοι που πρεσβεύουν. Ο *φορμαλισμός* στοχεύει στην κατανόηση των αφηρημένων μαθηματικών που διαδίδονται ως προϊόντα γνώσης μέσω της αποστήθισης και εξάσκησης. Από την άλλη πλευρά, ο *υποκειμενισμός* εστιάζει στην μαθηματική δραστηριότητα, τονίζοντας την πρακτική της διάσταση, αντί για τα ίδια τα μαθηματικά. Έτσι, στοχεύει στην ενίσχυση της βιωματικής δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές, τα οποία έχουν προσωπική αξία για αυτούς (Kynigos, 2015; Kynigos & Diamantidis, 2021).

Η παραδοσιακή διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία χαρακτηρίζει τις περισσότερες ελληνικές σχολικές τάξεις, αποτελείται κυρίως από *φορμαλιστικές* εκπαιδευτικές πρακτικές, που στηρίζονται στην υπόθεση ότι κάθε άσκηση έχει μία μοναδική σωστή απάντηση, ενώ κάθε λάθος συνοδεύεται από κατάκριση και αποδοκιμασία. Έτσι, δεν δίνονται δυνατότητες στους μαθητές να βιώσουν την δημιουργική ενασχόληση με τα μαθηματικά. Αντιθέτως, ο *υποκειμενισμός* συνδέεται με τη φιλοσοφία και τις πρακτικές του *κατασκευαστικού εποικοδομητισμού* (ΚΕ) (constructionism) (Papert & Harel, 1991; Kynigos, 2015). Σύμφωνα με τον ΚΕ, η μάθηση των μαθηματικών επέρχεται με φυσικό τρόπο κατά τη δημιουργία και τον διαμοιρασμό απτών ή ψηφιακών κατασκευών-δομημάτων (artefacts) (Papert & Harel, 1991). Ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων στο πλαίσιο ΚΕ συνδέεται κατά κύριο λόγο με εκφραστικά ψηφιακά μέσα και έχει ως στόχο να παρέχει δυνατότητες κατασκευής ισχυρών μαθηματικών ιδεών από τον μαθητή. Κατάλληλα μαθησιακά περιβάλλοντα που πλαισιώνουν την ενασχόληση με αυτού του είδους δραστηριότητες υποστηρίζουν τη συνεργατική κατασκευή μαθηματικών ιδεών και ψηφιακών δομημάτων. Από την μία πλευρά, τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για την κατασκευή και το μαστόρεμα ενός ψηφιακού δομήματος, λαμβάνοντας *υποκειμενική* μορφή. Αντίστροφα, η ενασχόληση με τη δημιουργία ενός δομήματος παρέχει στους μαθητές πλούσιες ευκαιρίες για διαμόρφωση και διερεύνηση μαθηματικών ιδεών. Οι μαθητές ενθαρρύνονται να εμπλακούν παράλληλα και προς τις δύο κατευθύνσεις και να εξωτερικεύσουν τις ιδέες τους, λαμβάνοντας τον ρόλο του σχεδιαστή, του μηχανικού ή του καλλιτέχνη-δημιουργού. Επιπλέον, το δημιούργημά τους,μετατρέπεται σε δημόσια οντότητα προσβάσιμη στους ίδιους ή σε άλλους προς χρήση, διερεύνηση, επέκταση και αναστοχασμό. Στο πλαίσιο του *υποκειμενισμού* η δημιουργικότητα, γίνεται αναπόσπαστο κομμάτι της μάθησης των μαθηματικών με άμεσο τρόπο: τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται για προσωπική έκφραση και δημιουργία.

Θεωρία Δημιουργικής Μαθηματικής Δραστηριότητας

Για την παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε το θεωρητικό πλαίσιο της Δημιουργικής Μαθηματικής Δραστηριότητας (ΔΜΔ) (Riling, 2020, 2021), το οποίο προσαρμόστηκε σε ΚΕ τεχνολογικό πλαίσιο. Το ΔΜΔ παρέχει ένα θεωρητικό μοντέλο για την αναγνώριση της δημιουργικότητας σε μαθησιακά πλαίσια πάνω στα μαθηματικά, όπως η σχολική τάξη εξοπλισμένη με ψηφιακές τεχνολογίες (Kynigos & Diamantidis, 2021). Δίνει έμφαση πάνω στην διαδικασία του *πώς* η δημιουργικότητα λαμβάνει χώρα, αντί για το *τι* τελικό προϊόν (γνωστικό ή απτό) δημιουργείται. Ως δημιουργικότητα ορίζονται διάφορα είδη δραστηριότητας που συνδέονται με την ανάδυση νέων μαθηματικών ιδεών-δυνατοτήτων, όπως αυτές βιώνονται από ένα άτομο. Έτσι, η δημιουργικότητα συνδέεται άμεσα με την διαδικασία νοηματοδότησης μαθηματικών εννοιών και λαμβάνει *υποκειμενική* διάσταση. Στο πλαίσιο της έρευνας αυτής, η έννοια των νέων μαθηματικών δυνατοτήτων επεκτείνεται, καθώς λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος που αυτές επικοινωνούνται μέσα από την κατασκευή ψηφιακών δομημάτων. Σύμφωνα με την Riling, ως ΔΜΔ ορίζεται «μία δράση κατά την οποία σηματοδοτείται η μετάβαση από ένα δοσμένο μαθηματικό πλαίσιο σε μία νέα εκδοχή των μαθηματικών, μέσω της εύρεσης και υιοθέτησης νέων τρόπων -από το άτομο ή μία κοινότητα ατόμων- του να κάνει μαθηματικά ή να σκέφτεται για τα μαθηματικά, οι οποίοι δεν ήταν προηγουμένως δυνατοί» (2020, σελ. 17). Επεκτείνοντας τον παραπάνω ορισμό από ΚΕ οπτική, ως ΔΜΔ μέσω μίας συγκεκριμένης ψηφιακής τεχνολογίας ορίζεται ως «μία δράση κατά την οποία σηματοδοτείται η μετάβαση από ένα δοσμένο μαθηματικό πλαίσιο σε μία νέα εκδοχή των μαθηματικών μέσω της χρήσης τεχνολογικών εργαλείων για την παραγωγή, έκφραση, διερεύνηση ή επέκταση ενός μαθηματικού νοήματος κατά την κατασκευή ψηφιακών δομημάτων». Τρία βασικά κριτήρια ώστε μία δράση να θεωρηθεί «εν δυνάμει δημιουργική» αποτελούν 1) να προκύπτει ως απόφαση του ίδιου του μαθητή (ή της ομάδας μαθητών), χωρίς να υποκινείται από υπόδειξη του καθηγητή 2) να αποκλίνει από τις τυπικές διαδικασίες του «κάνω μαθηματικά», όπως αυτές πλαισιώνονται από το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών του σχολείου και 3) να συνδέεται άμεσα ή έμμεσα με «αισθητικές εμπειρίες» (Sinclair, 2009), όπως η ικανοποίηση, το κάλλος/η ομορφιά, το μυστήριο και η έκπληξη. Η Riling (2021) απαρίθμησε έξι είδη δημιουργικής δραστηριότητας, όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων της, τα οποία προσαρμόστηκαν σε ΚΕ πλαίσιο ως εξής:

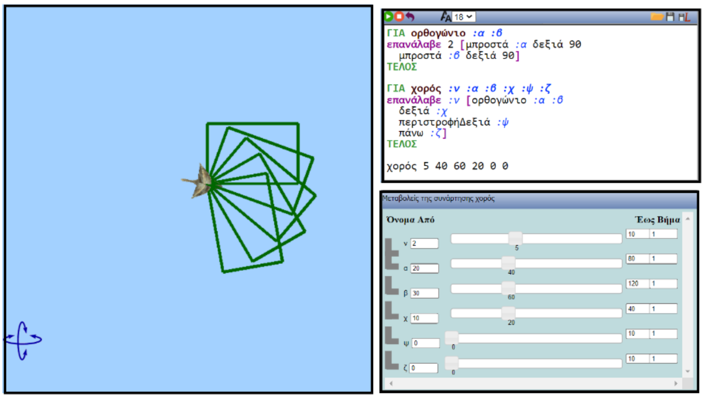
1. *διαμόρφωση στόχου (setting out):* σχεδιασμός ενός στόχου σε πρωταρχικό, διαισθητικό επίπεδο μέσω της διερεύνησης άγνωστων, μη αναμενόμενων πτυχών ενός δομήματος, η οποία δεν συνδέεται άμεσα με μαθηματικό περιεχόμενο
2. *φαντασίωση (imagining):* πιο συστηματική χρήση ψηφιακών εργαλείων με σκοπό τη διαμόρφωση νοητικής εικόνας ενός πλάνου υλοποίησης μίας ιδέας και δημιουργία διακριτού στόχου που εμπεριέχει μαθηματικές έννοιες σε γενική μορφή
3. *εκδήλωση (manifesting):* καθαρή, εσκεμμένη χρήση των ψηφιακών εργαλείων για την υλοποίηση αλλαγών στο ψηφιακό δόμημα με συνειδητό τρόπο που να συμβάλει στην επίτευξη συγκεκριμένων στόχων, κατά την οποία γίνεται διακριτή χρήση μαθηματικών εννοιών

4. *εξοικείωση (familiarizing):* αφιέρωση χρόνου στην διερεύνηση των συνθηκών του κατασκευασμένου δομήματος με αναστοχαστικό τρόπο
5. *αναγνώριση (recognizing):* επανεκτίμηση μίας συγκεκριμένης πτυχής του δομήματος, η οποία ερμηνεύεται με νέο, διαφορετικό τρόπο
6. *ονοματοδοσία (naming):* αναγνώριση ενός μοτίβου συμπεριφοράς του ψηφιακού δομήματος και εξωτερίκευσής του ως μία διακριτή μαθηματική ιδέα

Υιοθετώντας τα παραπάνω θεωρητικά δομήματα, ως ερευνητικά ερωτήματα τίθενται τα εξής: Τι είδους ΔΜΔ ανιχνεύεται στη δραστηριότητα μαθητών καθώς χρησιμοποιούν τα ψηφιακά εκφραστικά μέσα του MaLT2 για τη δημιουργία ενός «χορευτικού animation»; Τι είδους μαθηματικά νοήματα προκύπτουν μέσα από την ΔΜΔ τους;

Μεθοδολογία

Το MaLT2 (http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/), το ψηφιακό μέσο που χρησιμοποιήθηκε για την έρευνα, αποτελεί ένα online προγραμματιστικό λογισμικό στο οποίο μπορούν να κατασκευαστούν δυναμικά τρισδιάστατα γεωμετρικά μοντέλα. Το MaLT2 συνδυάζει την προγραμματιστική γλώσσα Logo, η οποία βασίζεται σε διαδικαστικό μοντέλο προγραμματισμού, με γεωμετρικές αναπαραστάσεις και δυναμικό χειρισμό των γενικευμένων τιμών μίας παραμετρικής διαδικασίας μέσω της χρήσης του εργαλείου του μεταβολέα (ολισθητών) (Kynigos & Grizioti, 2018). Έτσι, το MaLT2 παρέχει τρεις αλληλένδετες αναπαραστάσεις: τον προγραμματισμό, την γεωμετρική αναπαράσταση και τον δυναμικό χειρισμό των παραμέτρων του δομήματος. Το τελευταίο χαρακτηριστικό επιτρέπει την δυναμική συμπεριφορά ενός γεωμετρικού μοντέλου, το οποίο κατασκευάζεται από μία παραμετρική διαδικασία. Συνεπώς, το εργαλείο αυτό παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας ενός κινούμενου σχεδίου (animation) μέσω γεωμετρικών μετασχηματισμών ενός σχήματος. Επιπλέον, η δυναμική αλλαγή των γεωμετρικών μοντέλων ενισχύει τις ευκαιρίες διερεύνησης μαθηματικών ιδιοτήτων, διαμόρφωσης αποριών και εικασιών και παροχής άμεσης ανατροφοδότησης για την εγκυρότητα των εικασιών. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε μία συνεχή σχέση αλληλεπίδρασης με το υπό κατασκευή δόμημα.



Σχήμα 1. Το αρχικό δόμημα στις τις τρεις διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του MaLT2

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, σχεδιάστηκε μία δραστηριότητα με τίτλο «χορευτικά animations». Από την ερευνήτρια σχεδιάστηκε ένα δόμημα στο MaLT2, το οποίο δόθηκε στους μαθητές ώστε να ξεκινήσουν αλλάζοντάς το, με σκοπό να φτιάξουν το δικό τους animation και να το συγχρονίσουν στον ρυθμό ενός αποσπάσματος τραγουδιού (Σχήμα 1). Πρόκειται για μία ανοικτού τύπου δραστηριότητα που είχε ως βασικό στόχο την αφύπνιση της δημιουργικότητας, της λήψης πρωτοβουλιών και αποφάσεων και ενθάρρυνση της έκφρασης στοιχείων της προσωπικής ταυτότητας των μαθητών στην ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά. Το τελικό τους animation θα καταγραφόταν μέσω μίας εφαρμογής καταγραφής οθόνης, η οποία θα κατέγραφε την γραφική αναπαράσταση στο MaLT2 (Σχήμα 1, αριστερά) παράλληλα με το άκουσμα του ηχητικού αρχείου του αποσπάσματος του τραγουδιού, ώστε να δημιουργηθεί ένα χορευτικό «βίντεο κλιπ». Οι μαθητές μπορούσαν να διαλέξουν ένα απόσπασμα τραγουδιού μέσα από μία λίστα 14 επιλογών. Κάθε κομμάτι ήταν αποκομμένο τέτοιο τρόπο, ώστε να αποτελεί ένα επαναλαμβανόμενο μουσικό μοτίβο με σταθερό ρυθμό. Η διάρκεια κάθε κομματιού ήταν σημειωμένη στον τίτλο του ηχητικού αρχείου (από 22 μέχρι 54 δευτερόλεπτα). Η τελική καταγραφή θα γινόταν από τους ίδιους τους μαθητές σύροντας έναν ολισθητή μέσω του δεξί και του αριστερού βέλους του πληκτρολογίου.

Η παρούσα έρευνα έγινε στο πλαίσιο της έρευνας σχεδιασμού (design research) (Bakker, 2018) υλοποιήθηκε σε πιλοτικό επίπεδο με τρεις μαθητές Γυμνασίου – ένα κορίτσι Β′ Γυμνασίου (Μαρία) και ένα αγόρι και ένα κορίτσι της Γ′ Γυμνασίου (Δημήτρης και Άννα). Οι μαθητές συμμετείχαν εθελοντικά σε ένα άτυπο εξωσχολικό πλαίσιο που φιλοξενήθηκε στην αίθουσα ενός φροντιστηρίου μέσης εκπαίδευσης. Η δραστηριότητα διήρκησε δύο ώρες. Κάθε μαθητής διέθετε έναν φορητό υπολογιστή, ένα ζευγάρι ακουστικά και ένα σημειωματάριο. Η ερευνήτρια-συγγραφέας είχε τον ρόλο ενθάρρυνσης της επικοινωνιακής διαδικασίας μεταξύ των μαθητών και της εξωτερίκευσης της σκέψης και των ιδεών τους. Όλοι οι μαθητές είχαν συμμετάσχει εκ των προτέρων σε μία εισαγωγική δραστηριότητα στο MaLT2. Η συλλογή των δεδομένων έγινε μέσα από μία εφαρμογή καταγραφής της οθόνης του υπολογιστή, η οποία κατέγραφε τους ήχους εισόδου και εξόδου, αποτυπώνοντας έτσι τις ομιλίες των μαθητών και την μουσική κάθε φορά που αυτή έπαιζε στο παρασκήνιο. Τα δεδομένα αποτέλεσαν οι διάλογοι των μαθητών, τόσο μεταξύ τους όσο και με την ερευνήτρια, καθώς και η δραστηριότητά τους στο MaLT2 και οι γραπτές τους σημειώσεις. Η ανάλυση των δεδομένων αποτέλεσε την αναγνώριση και κωδικοποίηση των επεισοδίων των έξι ειδών ΔΜΔ, όπως αυτή θεωρητικοποιήθηκε σε προηγούμενη ενότητα.

Αποτελέσματα

Από τα δεδομένα αναγνωρίστηκαν και αναλύθηκαν επεισόδια ΔΜΔ των μαθητών, καθώς αυτοί σχεδίαζαν και μαστόρευαν τα ψηφιακά τους δομήματα στο MaLT2. Στον Πίνακα 1 περιγράφονται εν συντομία η σειρά έντεκα επεισοδίων ΔΜΔ, όπως προέκυψαν από τα δεδομένα του Δημήτρη και της Άννας, οι οποίοι αποφάσισαν να συνεργαστούν καθ′ όλη τη διάρκεια της δραστηριότητας. Τα συγχωνευμένα κελιά του Πίνακα 1 υποδεικνύουν από κοινού δημιουργική δραστηριότητα, που έχει προκύψει από συνεννόηση και συνεργασία και προσαρμοστεί στο δόμημα του καθενός. Οι φράσεις που βρίσκονται σε εισαγωγικά υπάρχουν αυτούσιες στα δεδομένα, είτε από τους διαλόγους, είτε από τις ψηφιακές και γραπτές τους σημειώσεις.

Πίνακας 1. Δημιουργική Μαθηματική Δραστηριότητα του Δημήτρη και της Άννας

Είδος δραστηριότητας	Δημήτρης	Άννα
1. διαμόρφωση στόχου	Εξέφρασαν τον στόχο να δημιουργήσουν μία χορευτική κίνηση αφού παράλληλα έσερναν του ολισθητές με τυχαίο τρόπο και παρατηρούσαν τις αλλαγές στο δυναμικό δόμημα.	

2.	φαντασίωση	Εστίασαν στην κίνηση ενός ολισθητή και έθεσαν τον στόχο να βρουν έναν τρόπο να δημιουργήσουν μία «ολοκληρωμένη περιστροφική κίνηση» που να προσομοιώνει την χορευτική κίνηση της «πιρουέτας» με σκοπό «να μοιάζει σαν να χορεύει».	
3.	εκδήλωση	Επέλεξαν να κινήσουν τον ολισθητή της παραμέτρου «χ» που αντιστοιχεί στην εντολή «δεξιά» και δοκίμασαν διαφορετικές τιμές στο πάνω όριο του μεταβολέα.	
4.	εξοικείωση	Κατέληξαν να θέτουν τα όρια από το 0 μέχρι το 360 και εξέφρασαν ότι το 360 είναι η τιμή για την οποία «γίνεται μία ολοκληρωμένη πιρουέτα».	
5.	ονοματοδοσία	Συνέδεσαν την τιμή 360 με τις έννοιες «πλήρης γωνία», «ολόκληρη στροφή» και «κύκλος» και «περίοδος του χορευτικού”.	
6.	αναγνώριση	Καθώς έσυραν τον ολισθητή της παραμέτρου «χ» χρησιμοποιώντας το δεξί βέλος του πληκτρολογίου και ταυτόχρονα ακούγοντας το τραγούδι που επέλεξαν, εξέφρασαν ότι το animation ήταν «εκτός ρυθμού», «ασυγχρόνιστο» και «πολύ αργό».	
7.	φαντασίωση	Έθεσαν ως στόχο την προσαρμογής της περιόδου της χορευτικής κίνησης του animation στην περίοδο του τραγουδιού με το να βρουν «έναν τρόπο να κινείται πιο γρήγορα και να ταιριάζει».	
8.	εκδήλωση	Θεώρησε ως περίοδο του τραγουδιού (Iggy Pop - The Passenger) τα «2 δευτερόλεπτα» και υπολόγισε ότι αντιστοιχούν σε «60 τιμές του ολισθητή καθώς πατιέται το βελάκι». Πρόσθεσε στην εντολή «δεξιά :χ» έναν παράγοντα, με τον οποίο θα έλεγχε «την ταχύτητα του animation». Αφού δοκίμασε διαφορετικές τιμές, κατέληξε στην εντολή «δεξιά 6*:χ». Ανέφερε ότι συνειδητοποίησε ότι «το 6 ήταν η σωστή τιμή, γιατί 6 φορές το 60 ισούται με 360».	Θεώρησε ως περίοδο του τραγουδιού (Milky Chace – Stolen Dance) τα «9 δευτερόλεπτα» και υπολόγισε ότι αντιστοιχούν σε «270 τιμές του ολισθητή». Πρόσθεσε στην εντολή «δεξιά :χ» έναν παράγοντα, με τον οποίο θα έλεγχε «την ταχύτητα του animation». Αφού δοκίμασε διαφορετικές τιμές, κατέληξε στην εντολή «δεξιά 1.3*:χ». Ανέφερε ότι το βρήκε «μέσα από δοκιμές».
9.	εξοικείωση	Παρατήρησαν το animation τους και συνειδητοποίησαν ότι κάνει «μια ολοκληρωμένη πιρουέτα που ταιριάζει τέλεια στην περίοδο του τραγουδιού.».	
10.	αναγνώριση	Εξέφρασαν ότι η χορευτική τους κίνηση δεν αρκεί για όλη τη διάρκεια του κομματιού. Έθεσαν τον στόχο να προσαρμόσουν την διάρκειά του σε αυτήν του τραγουδιού.	
11.	εκδήλωση	Το απόσπασμα του κομματιού διαρκούσε 50 δευτερόλεπτα. Ο Δημήτρης άλλαζε την τιμή του άνω ορίου του ολισθητή της παραμέτρου «χ» ώστε να αυξήσει τη διάρκειά του. Σημείωσε ότι τα επαναλαμβανόμενα μέρη του τραγουδιού ήταν 25 και πολλαπλασίασε το 25 επί το 60 (που	Το απόσπασμα του κομματιού διαρκούσε 34 δευτερόλεπτα. Η Άννα δοκίμασε διάφορες τιμές του άνω ορίου του ολισθητή της παραμέτρου «χ». Προσέγγισε την ακριβή τιμή (=1020) λέγοντας «την βρήκα όταν σκέφτηκα ότι κάθε τρία χτυπήματα είναι περίπου 100 τιμές (συρσίματος)

	αντιστοιχεί στην τιμή της περιόδου του animation).	του ολισθητή, άρα πρόσθετα 100 μοίρες κάθε φορά για να το βρω».

Ο Δημήτρης και η Άννα ακολούθησαν από κοινού μία παρόμοια ακολουθία ΔΜΔ, ως αποτέλεσμα της συνεργασίας και της ανταλλαγής ιδεών τους. Για παράδειγμα, ξεκίνησαν με κοινά στιγμιότυπα δραστηριότητας διαμόρφωσης στόχου και φαντασίωσης, συζητώντας μεταξύ τους το τι ακριβώς κάνουν στο δόμημά τους και το τι φαντάζονται να αλλάξουν. Και οι δύο ξεκίνησαν σύροντας τους ολισθητές της διαδικασίας «χορός» (βλ. Σχήμα 1) δεξιά-αριστερά και παρατηρώντας τις δυναμικές αλλαγές του δομήματός τους, περιγράφοντάς το παράλληλα ο ένας στο άλλον. Ο παρακάτω διάλογος υποδεικνύει αυτά τα αρχικά στιγμιότυπα δημιουργικής δραστηριότητας:

Δημήτρης: Πώς θα γίνει τώρα να το κάνουμε να χορεύει?

Άννα: Εγώ το φαντάζομαι κάπως έτσι... (Σηκώθηκε και έκανε μία περιστροφή γύρω από τον εαυτό της.)

Δημήτρης: Πρέπει να βρούμε έναν τρόπο ώστε το σχήμα να γυρίζει. (Σύροντας τον ολισθητή της μεταβλητής «χ».) Αυτό δημιουργεί την αίσθηση ότι χορεύει. Όταν αλλάζει η τιμή το χ, το σχήμα γυρίζει συνεχώς.

Άννα: Ναι, αλλά πρέπει να αυξήσουμε το πάνω όριο. Σωστά; Αφού θέλουμε μία ολοκληρωμένη πιρουέτα.

Αυτή η διερεύνηση κατά την οποία τέθηκε από τους ίδιους τους μαθητές ο στόχος δημιουργίας της «αίσθησης του χορού», αποτέλεσε το σημείο εκκίνησης της ΔΜΔ των μαθητών. Έθεσαν το πιο διακριτό πρόβλημα εύρεσης της κατάλληλης αριθμητικής τιμής ώστε το σχήμα να κάνει μία ολοκληρωμένη περιστροφική κίνηση που θα προσομοιώνει την χορευτική κίνηση της «πιρουέτας». Προκύπτει έτσι ένα παράδειγμα *διαμόρφωσης στόχου* και *φαντασίωσης* προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος, με τα μαθηματικά να αρχίζουν σταδιακά να παίρνουν πιο διακριτή μορφή στον λόγο τους. Κατά τη διάρκεια αυτής της διερεύνησης, χρησιμοποίησαν και νοηματοδότησαν την μαθηματική έννοια της μεταβλητής. Στη συνέχεια, οι δύο μαθητές ενεπλάκησαν σε δύο από κοινού στιγμιότυπα δημιουργικής δραστηριότητας *εκδήλωσης* και *εξοικείωσης*, όπως φαίνεται και από τον παρακάτω διάλογο:

Άννα: Δοκίμασα να αλλάξω το δεξί όριο της μεταβλητής χ. Νομίζω ότι το 360 είναι η τιμή για μία ολοκληρωμένη περιστροφή.

Ερευνήτρια: Γιατί διαλέξατε την μεταβλητή χ; Αντί για την α ή την β;

Άννα: Σκέφτηκα ότι οι μεταβλητές χ, ψ και ζ είναι για τις στροφές. Μία στροφή σημαίνει ότι αλλάζει η γωνία. Και 360 είναι μία πλήρη γωνία. Γι' αυτό δουλεύει το 360. Τώρα βγάζουν όλα νόημα! Είναι 360 μοίρες, που είναι ένας ολόκληρος κύκλος, δηλαδή μία πλήρη στροφή. Αν βάλουμε πιο

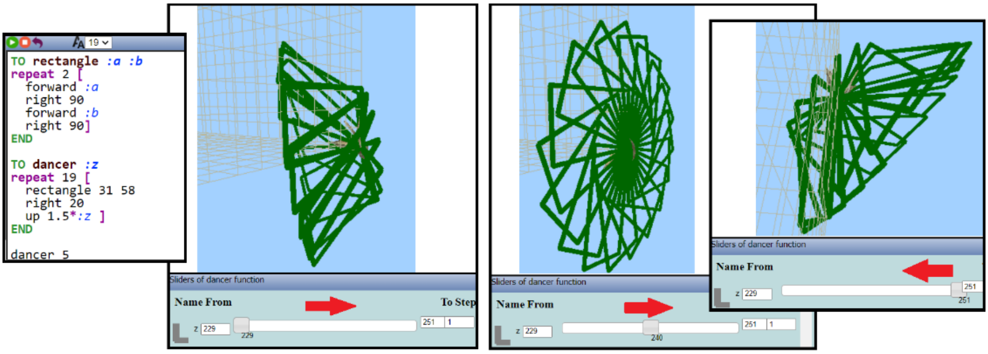
	πολύ από 360, ξεκινάει να επαναλαμβάνει την ίδια κίνηση ξανά. Μπορούμε να το κάνουμε έτσι να συνεχίζει να γυρίζει για όλη τη διάρκεια του τραγουδιού.
Δημήτρης:	Σωστά! Κάνει άλλη μία ολοκληρωμένη πιρουέτα όταν φτάνει το 720. (…) Και το 1080. Άρα το 360 είναι η περίοδος του χορευτικού.

Οι δύο μαθητές συνέδεσαν την στροφή 360 μοιρών με τις έννοιες της πλήρους γωνίας και του κύκλου, αναφέροντας ότι πρόκειται για κάτι που δεν είχαν συνειδητοποιήσει προηγουμένως. Επιπλέον, η Άννα ανέφερε ότι τιμές μεγαλύτερες του 360 κάνουν το animation να «επαναλαμβάνει την ίδια κίνηση». Αφού το δοκίμασε και ο Δημήτρης, συνειδητοποίησε ότι σε κάθε πολλαπλάσιο του 360, ολοκληρωνόταν μία πλήρη περιστροφική κίνηση. Και οι δύο *φαντάστηκαν* μία χορογραφία επαναλαμβανόμενων περιστροφών που θα ταίριαζε με την περίοδο του τραγουδιού. Η υπόλοιπη ΔΜΔ τους αποτυπώνεται στον Πίνακα 1. Η στενή συνεργασία τους οδήγησε σε κοινή ακολουθία δημιουργικής δραστηριότητας, με στιγμιότυπα *φαντασίωσης* και *αναγνώρισης* να συζητούνται σε ομαδικό επίπεδο και στιγμιότυπα *εκδήλωσης* και *εξοικείωσης* να γίνονται σε ατομικό επίπεδο, οδηγούμενοι στη δημιουργία δύο μοναδικών χορευτικών animation.

Πίνακας 2. Δημιουργική Μαθηματική Δραστηριότητα της Μαρίας

Είδος δραστηριότητας		Μαρία
1.	διαμόρφωση στόχου	Σύροντας τους ολισθητές, έθεσε τον στόχο δημιουργίας μίας χορευτικής κίνησης με επαναλαμβανόμενη παλινδρομική κίνηση δεξιά-αριστερά.
2.	φαντασίωση	Σύροντας τον ολισθητή των μεταβλητών «χ» και «ζ» εναλλάξ, εξέφρασε τον στόχο να δημιουργήσει μία κίνηση όπου «τα ορθογώνια θα κινούνται πάνω-κάτω γύρω από τον οριζόντιο επίπεδο συνεχόμενα».
3.	εκδήλωση	Επέλεξε τον ολισθητή της μεταβλητής «ζ» που αντιστοιχεί στην εντολή «πάνω». Δοκίμασε διαφορετικές τιμές και για το κάτω και για το άνω όριο του ολισθητή της «ζ». Κατέληξε να δοκιμάζει τιμές που ισαπείχαν αριθμητικά από το 360 (από 340 μέχρι 380, από 300 μέχρι 420, κ.ο.κ.)
4.	εξοικείωση και ονοματοδοσία	Παρατήρησε ότι «το 360 είναι το κέντρο της κίνησης και πρέπει να κρατήσω τις ακριανές τιμές σε ίση απόσταση». Απέδωσε στην τιμή 360 την ιδιότητα «κέντρο του animation», συνδέοντας την με την έννοια του κέντρου συμμετρίας.
5.	αναγνώριση	Εξέφρασε ότι το animation «παίρνει πολλή ώρα» και ότι θέλει να το κάνει να «κινείται πιο γρήγορα» και «μέσα στον ρυθμό».
6.	φαντασίωση	Έθεσε τον στόχο να βρει έναν τρόπο για το animation «να επαναλαμβάνει την κίνηση πάνω-κάτω πολλές φορές κατά τη διάρκεια μίας μουσικής περιόδου».
7.	εκδήλωση	Ως μουσική περίοδο του κομματιού (Milky Chace – Stolen Dance) σημείωσε τα 14 δευτερόλεπτα. Εξέφρασε ότι θα θεωρήσει τα 2 δευτερόλεπτα ως την περίοδο του χορευτικού, με σκοπό να επαναλαμβάνεται 7 φορές κατά τη διάρκεια της μουσικής περιόδου. Σημείωσε «2 sec = 22 μπρος+ 22 πίσω». Κατέληξε να θέτει τα όρια του ολισθητή από (360-11=) 349 μέχρι (360+11=) 371.

8.	αναγνώριση	Σύροντας τον ολισθητή της παραμέτρου «ζ», εξέφρασε ότι ήθελε να αυξήσει την ταχύτητα της κίνησης για να προλαβαίνει να ολοκληρώνεται στα 2 δευτερόλεπτα.
9.	εκδήλωση	Άλλαξε την εντολή «πάνω :ζ» σε «πάνω 1.5*:ζ». Μετά άλλαξε τα όρια του ολισθητή από (240-11=) 229 μέχρι (240+11=)251.
10.	ονοματοδοσία	Εξέφρασε ότι «η οριζόντια κατάσταση άλλαξε από 360 σε 240» ενώ είχε σημειώσει την πράξη «360/1,5=240».
11.	εξοικείωση	Στη συνέχεια είπε ότι «το animation είναι ακόμα καλύτερο αφού είναι και συμμετρικό και εντός ρυθμού.» (Σχήμα 2)



Σχήμα 2. Το τελικό χορευτικό animation της Μαρίας

Σε αντίθεση με τους άλλους, η Μαρία ακολούθησε διαφορετική ακολουθία ΔΜΔ, καθώς επέλεξε να δουλέψει μόνη της. Οι λόγοι αυτής της επιλογής ήταν προσωπικοί και βασίζονταν στο γεγονός ότι η Μαρία, ως μικρότερη, δεν ένιωσε άνετα να συνεργαστεί με τους άλλους δύο μαθητές. Στον Πίνακα 2 αποτυπώνεται η δικιά της αλληλουχία ΔΜΔ. Η χορευτική της προσέγγιση αποτέλεσε η περιοδική κίνηση «πάνω-κάτω», την οποία εξέφρασε τόσο με λόγια, όσο και με περιοδικές κινήσεις του ολισθητή. Μέσα από τη σειρά δραστηριοτήτων *διαμόρφωσης στόχου*, *φαντασίωσης*, *εκδήλωσης*, *αναγνώρισης* και *ονοματοδοσίας* αναδύθηκαν μαθηματικές έννοιες γύρω από την συμμετρία -τόσο σε γεωμετρικό όσο και σε αριθμητικό επίπεδο. Στη συνέχεια, το πρόβλημα συγχρονισμού του χορευτικού με το τραγούδι προέκυψε φυσικά. Για την επίλυσή του, η Μαρία χρησιμοποίησε και νοηματοδότησε μαθηματικές έννοιες αναλογίας και αντίστροφης αναλογίας, μέχρι να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2, πέρασε μέσα από τρεις κύκλους ΔΜΔ, όπου οι ιδέες της διαμορφώθηκαν, εκφράστηκαν μέσω του MaLT2 και επανεξετάστηκαν, οδηγούμενη στη δημιουργία του τελικού χορευτικού animation (Σχήμα 2).

Συμπεράσματα

Το επίπεδο εγκυρότητας των συμπερασμάτων της παρούσας έρευνας είναι αρκετά χαμηλό, δεδομένου του μικρού δείγματος και του περιορισμένου χρόνου υλοποίησης της έρευνας. Ωστόσο, μέσα από τα περιορισμένα δεδομένα προέκυψαν κάποια ενδιαφέροντα στοιχεία που αξίζει να αναφερθούν, με σκοπό τη μελλοντική επαναδιαμόρφωση της έρευνας σε μεγαλύτερη κλίμακα και την προσαρμογή του σχεδιασμού της σε αυτά.

Και οι τρεις μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα διαμόρφωσαν, χρησιμοποίησαν και επέκτειναν καλλιτεχνικές-μαθηματικές ιδέες προκειμένου να δημιουργήσουν μία καλαίσθητη

-με προσωπικά κριτήρια- χορευτική κίνηση και να την συγχρονίσουν στο ρυθμό της μουσικής. Το μοντέλο ΔΜΔ παρείχε ένα χρήσιμο αναλυτικό εργαλείο για την αναγνώριση και διερεύνηση της δραστηριότητας των μαθητών και την αλληλεπίδρασή τους με τα εργαλεία του MaLT2. Στην ανάλυση ανιχνεύτηκε μία σειρά ΔΜΔ των μαθητών με στιγμιότυπα *διαμόρφωσης στόχου*, *φαντασίωσης*, *εκδήλωσης*, *αναγνώρισης*, *εξοικείωσης* και *ονοματοδοσίας*. Συνέθεσαν έτσι τρία διακριτά μονοπάτια διερεύνησης και νοηματοδότησης μαθηματικών εννοιών. Μέσα από τη σύγκριση των δεδομένων των τριών μαθητών προέκυψε ότι τόσο στη συνεργατική δραστηριότητα των δύο μαθητών (Δημήτρη και Άννας), όσο και στην ατομική δραστηριότητα (της Μαρίας), υποστηριζόμενη και στις δύο περιπτώσεις από τον ενθαρρυντικό ρόλο της ερευνήτριας, ανιχνεύτηκε εξίσου ποικίλη ΔΜΔ που οδήγησε σε αντίστοιχο επίπεδο κατασκευής μαθηματικών νοημάτων. Οι μαθητές προσέγγισαν τα μαθηματικά με *υποκειμενικό* τρόπο, καθώς τα χρησιμοποίησαν ως εργαλεία για την πραγματοποίηση προσωπικών καλλιτεχνικών ιδεών γύρω από τον χορό. Από την άλλη πλευρά, οι καλλιτεχνικές ιδέες αποτέλεσαν έναυσμα για την δημιουργική ενασχόληση με τα μαθηματικά. Στα στιγμιότυπα που αναλύθηκαν στο πλαίσιο του άρθρου, οι μαθητές νοηματοδότησαν μαθηματικές έννοιες όπως η γωνία, η μεταβλητή, η παράμετρος, η γραμμική συνάρτηση, η αναλογία, η αντίστροφη αναλογία, η περιοδικότητα και η συμμετρία. Το λογισμικό χρησιμοποιήθηκε ως μέσο για τη διαμόρφωση, τον έλεγχο και την επαλήθευση εικασιών τόσο σε μαθηματικό όσο και καλλιτεχνικό επίπεδο. Το βασικό συμπέρασμα του άρθρου αποτελεί το ότι τόσο το MaLT2 όσο και η καλλιτεχνική πλαισίωση της μαθησιακής διαδικασίας συνέβαλαν φυσικά στην εμπλοκή των μαθητών σε συνεχόμενη, κυκλική ΔΜΔ και των έξι ειδών του θεωρητικού μοντέλου.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Bakker, A. (2018). *What is design research in education? 1* (pp. 3-22). Routledge.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. London: Penguin.

Ernest, P. (2003). Images of mathematics, values and gender: A philosophical perspective. In *Mathematics Education* (pp. 21-35). Routledge.

Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of learning or theory of design?. In *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 417-438). Springer, Cham.

Kynigos, C., & Diamantidis, D. (2021). Creativity in engineering mathematical models through programming. *ZDM–Mathematics Education*, 1-14. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01314-6

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming approaches to computational thinking: Integrating Turtle geometry, dynamic manipulation and 3D Space. *Informatics in Education*, *17*(2), 321-340. https://doi.org/10.15388/infedu.2018.17

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236-260. https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, *36*(2), 1-11.

Riling, M. (2020). Recognizing Mathematics Students as Creative: Mathematical Creativity as Community-Based and Possibility-Expanding. *Journal of Humanistic Mathematics*, *10*(2), 6-39. https://doi.org/10.5642/jhummath.202002.04

Riling, M. (2021). *Expanding mathematical creativity by understanding student actions* (Doctoral dissertation, Boston University).

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, *29*(3), 75-80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Sinclair, N. (2009). Aesthetics as a liberating force in mathematics education?. *ZDM*, *41*(1), 45-60.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics?. *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36. https://doi.org/10.4219/jsge-2005-389