ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ
NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2022)

7ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου για την αξονική συμμετρία μέσω του ψηφιακού εργαλείου MaLT2

Άρτεμις Κατσακιώρη, Μαριάνθη Γριζιώτη , Χρόνης Κυνηγός

Βιβλιογραφική αναφορά:

Κατσακιώρη Ά., Γριζιώτη Μ., & Κυνηγός Χ. (2023). Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου για την αξονική συμμετρία μέσω του ψηφιακού εργαλείου MaLT2. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 0459–0472. ανακτήθηκε από https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/5758

https://epublishing.ekt.gr | **e-Εκδότης:** EKT | **Πρόσβαση:** 21/01/2026 11:57:30

Διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών της Β Γυμνασίου για την αξονική συμμετρία μέσω του ψηφιακού εργαλείου MaLT2

Κατσακιώρη Άρτεμις[1], Γριζιώτη Μαριάνθη[2], Κυνηγός Χρόνης[3]
artemiskatsakiori@gmail.com, mgrizioti@ppp.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr
[1]Μαθηματικός, Καθηγήτρια Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, [2,3]Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φιλοσοφίας Παιδαγωγικής Ψυχολογίας, Τομέας Παιδαγωγικής

Περίληψη

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται έρευνα, στην οποία μελετώνται τα νοήματα που αναπτύσσουν μαθητές, της Β' Γυμνασίου, αναφορικά με την αξονική συμμετρία, όταν διερευνούν τις συμμετρικές κινήσεις των χεριών του ανθρώπινου σώματος ως προς την σπονδυλική του στήλη. Για την υλοποίηση της έρευνας, πραγματοποιήθηκε διδακτική παρέμβαση, η οποία υποστηρίχθηκε από ψηφιακό δόμημα που αναπτύχθηκε στο MaLT2 και στηρίχθηκε στον δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων, καθώς και από δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν ώστε να εμπλέξουν τους χρήστες με την υπολογιστική σκέψη και με το Problem Posing. Τα ευρήματα της έρευνας, φανερώνουν πως ο συνδυασμός των δραστηριοτήτων με το ψηφιακό εργαλείο ενίσχυσε την διερεύνηση των μαθητών για τις σχέσεις των γωνιών που δημιουργούν συμμετρία και συνέβαλε στην διεύρυνση των νοημάτων, αναφορικά με την αξονική συμμετρία. Οι δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης ενισχύθηκαν, ενώ οι στόχοι του Problem Posing, σε σχέση με τα μαθηματικά, δεν επιτεύχθηκαν.

Λέξεις Κλειδιά: αξονική συμμετρία, υπολογιστικοί μικρόκοσμοι, συστήματα δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων, Problem posing

Εισαγωγή

Η Γεωμετρία ως αντικείμενο μάθησης, έχει υμνηθεί για την αναλυτική σκέψη και τη δυνατότητα αξιοποίησης διαισθητικού πειραματισμού. Στον κλάδο της εκπαίδευσης, η γεωμετρία εξακολουθεί να αφορά πρωτίστως 'την αντίληψη του χώρου στον οποίο τα παιδιά ζουν, αναπνέουν και κινούνται' (Freudenthal, 1983). Την τελευταία δεκαετία η εκπαιδευτική κοινότητα αναζητά τρόπους ενσωμάτωσης των ψηφιακών τεχνολογιών στη διδασκαλία της Γεωμετρίας, καθώς θεωρείται ότι υποστηρίζουν τη διαδραστικότητα, τις πολλαπλές αναπαραστάσεις και τον δυναμικό χειρισμό των γεωμετρικών αντικειμένων, που δίνει πρόσθετη παιδαγωγική αξία στην διδασκαλία αυτού του διαισθητικού αντικειμένου (Laborde et al., 2006).

Η παρούσα έρευνα εστιάστηκε σε μια γεωμετρική έννοια, αυτή της αξονικής συμμετρίας.

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση φανερώνει αρχικά πως υπάρχουν κοινές παρανοήσεις για την αξονική συμμετρία, οι οποίες εμφανίζονται ανεπηρέαστες στην πάροδο του χρόνου (Leikin et al., 2000; Seah & Horne, 2019). Αυτό έχει ενδιαφέρον, καθώς με το πέρασμα των χρόνων τα προγράμματα σπουδών παγκοσμίως αναμορφώνονται και προσαρμόζονται σε αυτούς που απευθύνονται. Άρα, εκείνες οι παράμετροι που επηρεάζουν την «αστάθεια» των μαθητών απέναντι στην αξονική συμμετρία, πιθανά δεν έχουν εντοπιστεί ή αντιμετωπιστεί κατάλληλα.

Με βάση το τρέχον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) που εφαρμόζεται στην Ελλάδα, η έννοια της αξονικής συμμετρίας διδάσκεται από την Ά Δημοτικού έως τη Ά

Παναγιωτακόπουλος, Χ., Καρατράντου, Α., & Αρμακόλας, Σ. (Επιμ.), *Πρακτικά Εργασιών 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»*, σ. 459-472, Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και Κοινωνικής Εργασίας, Πανεπιστήμιο Πατρών, 16-18 Σεπτεμβρίου 2022. ISBN 978-618-83186-7-0.

Γυμνασίου. Οι στόχοι που θέτει το ΑΠΣ είναι, προοδευτικά, οι μαθητές να περάσουν από την αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων, στην κατασκευή τους και στην αξιοποίηση των ιδιοτήτων τους, κυρίως στα ισοσκελή και ισόπλευρα τρίγωνα.

Με στόχο την αναζήτηση ενδείξεων σχετικά με τον τρόπο που θα μπορούσαν να συνδυαστούν οι δυνατότητες των ψηφιακών τεχνολογιών με τη ανάπτυξη πρόσθετων δεξιοτήτων για τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας, οργανώθηκε έρευνα. Για την οργάνωση της έρευνας, αντλήθηκαν πληροφορίες από τα συμπεράσματα ερευνών της παιδαγωγικής επιστήμης. Για τις ανάγκες της έρευνας αναπτύχθηκαν μικρόκοσμοι σε ψηφιακά εργαλεία, υποστηρικτικές δραστηριότητες καθώς και σχολική παρέμβαση στην οποία εφαρμόστηκαν. Η έρευνα έχει σαφείς επιρροές από τις θεωρίες μάθησης του εποικοδομισμού, του κονστραξιονισμού (Ackermann, 2001) και του κοινωνικού εποικοδομισμού.

Επισκόπηση Πεδίου

Οι μικρόκοσμοι ορίζονται ως υπολογιστικά περιβάλλοντα, τα οποία ενσωματώνουν ένα συνεκτικό σύνολο επιστημονικών εννοιών και σχέσεων που έχουν σχεδιαστεί ώστε σε συνδυασμό με κατάλληλο σύνολο δραστηριοτήτων και παιδαγωγικού σχεδιασμού, να επιτρέψει στους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες κατασκευής και εξερεύνησης πλούσιες σε δημιουργία νοημάτων (Sarama & Clements, 2002). Βασικοί μικρόκοσμοι που υποστηρίζουν την κατασκευή και εξερεύνηση γεωμετρικών εννοιών και σχέσεων είναι η Γεωμετρία της χελώνας, τα συστήματα δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων γνωστά ως dynamic geometry systems (DGS) και το MaLT2 που ενσωματώνει τα παραπάνω.

Ο μικρόκοσμος της Γεωμετρία της χελώνας εισάγεται από τον Seymour Papert. Σε αυτόν οι μαθητές καλούνται να καθοδηγούν την χελώνα μέσα από γραπτό κώδικα να κινηθεί στο επίπεδο. Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιείται για τον μικρόκοσμο είναι η Logo, η οποία προσεγγίζει την φυσική γλώσσα των μαθητών, τόσο σε επίπεδο λεξιλογίου, όσο και σε επίπεδο διατύπωσης των εντολών. Η θεωρητική αρχή του μικρόκοσμου ορίζει πως οι κινήσεις της χελώνας υπόκεινται στους περιορισμούς των βασικών γεωμετρικών αρχών (Papert, 1980). Ο Papert δημιουργώντας τον χελωνόκοσμο επιδιώκει να δώσει στους μαθητές ένα εργαλείο για να δημιουργήσουν αναπαραστάσεις, καθοδηγώντας τη χελώνα να κινηθεί, και να αναστοχαστούν επί των ίδιων των αναπαραστάσεων, αλλά και επί των κανόνων βάσει των οποίων δημιουργούνται οι αναπαραστάσεις. Με αυτόν τον, εμπειρικό, τρόπο οι μαθητές θα αντιλαμβάνονται τους περιορισμούς της Γεωμετρίας στους οποίους στηρίχτηκε η Γεωμετρία της χελώνας και θα τους γενικεύουν, δημιουργώντας για τους ίδιους ένα σύστημα μαθηματικής αντίληψης.

Οι μικρόκοσμοι που υποστηρίζουν τον δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών αντικειμένων (DGS) βοηθούν τους μαθητές να κατανοούν τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και να γενικεύουν τους κανόνες τους και τις μεταξύ τους σχέσεις (Goldenberg & Cuoco, 1998). Ο δυναμικός χειρισμός αλλάζει τον τρόπο που γίνονται αντιληπτά τα αντικείμενα, περνώντας από μια στατική οπτική αντίληψη σε μια πρόσκαιρη εστίαση του τί παραμένει αμετάβλητο (Battista, 2008).

Το MaLT2 ή αλλιώς η Χελωνόσφαιρα, αποτελεί επέκταση της Γεωμετρίας της χελώνας του Papert. Χαρακτηρίζεται ως επέκταση γιατί η χελώνα - που έγινε σπουργίτι κινείται στον τρισδιάστατο γεωμετρικό χώρο και επίσης, γιατί προστέθηκε στις δυνατότητες του μικρόκοσμου ένα εργαλείο δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων. Δηλαδή, ο χρήστης μπορεί να προκαλέσει δυναμικές μεταβολές σε αναπαραστάσεις που κατά την κωδικοποίηση τους τούς εκχωρήθηκαν μεταβλητές (Kynigos & Grizioti, 2018).

Οι όλο και πιο εξελιγμένες ψηφιακές δυνατότητες οδήγησαν στην ανάγκη του ψηφιακού αλφαβητισμού και της Υπολογιστικής Σκέψης, δηλαδή τις διαδικασίες σκέψης που περιλαμβάνουν διατυπώσεις προβλημάτων και εκφορά της λύσης τους, με τρόπο τέτοιο που τόσο ο άνθρωπος, όσο και ο υπολογιστής μπορεί να κατανοήσει και να φέρει εις πέρας (Wing, 2011). Η Γεωμετρία είναι το κατεξοχήν αντικείμενο που απαιτεί κριτική και αναλυτική σκέψη για την επίλυση προβλημάτων. Χρειάζεται κανείς να κατασκευάσει ένα δόμημα, να επεξεργαστεί τα ζητούμενα του προβλήματος με γνώμονα όλες τις ιδιότητες των γεωμετρικών εννοιών που περιλαμβάνονται σε αυτό (τμήματα, γωνίες, σχήματα, ισότητα, ανισότητα κ.λπ.), να επιμερίσει το τελικό ζητούμενο σε μικρά κομμάτια και να αξιοποιήσει εκείνες τις ιδιότητες που τον οδηγούν στην λύση. Επίσης, παρά το ότι μπορεί ένα πρόβλημα να επιλύεται με αρκετούς τρόπους, υπάρχει μια βέλτιστη λύση, δηλαδή, μια λύση που οδηγεί στο ζητούμενα με τα λιγότερα βήματα. Πολλές από τις παραπάνω δεξιότητες για την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος αποτελούν και πρακτικές της υπολογιστικής σκέψης. Όπως η αποδόμηση του προβλήματος (problem decomposition), η δημιουργία ψηφιακών δομημάτων, η δοκιμή και αποσφαλμάτωση, η σταδιακή βελτίωση και η συνεργασία και δημιουργικότητα (Grover & Pea, 2017).

Ο όρος Problem Posing (PP) επινοήθηκε από τον Βραζιλιάνο παιδαγωγό Paulo Freire το 1970. Ως Problem Posing ορίζεται μια διδακτική μέθοδος που δίνει έμφαση στην κριτική σκέψη, δηλαδή σε μια δεξιότητα του 21ου αιώνα. Είναι μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση της παραδοσιακής μεθόδου διδασκαλίας, στην οποία ο μαθητής καλείται να δημιουργήσει ένα νέο πρόβλημα ή μια ερώτηση με βάση μια δεδομένη κατάσταση (Mishra & Iyer, 2013). Το PP εμπλέκει τον μαθητή στην κατανόηση, στον μετασχηματισμό και την παραγωγή νέας γνώσης μέσω διαφόρων διαδικασιών εξερεύνησης και αναστοχασμού (Beal & Cohen, 2012). Ανάλογα με τη στόχευση μιας δραστηριότητας PP, δηλαδή αν στοχεύεται η κατανόηση ή ο μετασχηματισμός γνώσης κ.λπ., μπορεί να αξιοποιηθεί μια δομημένη, μια ημιδομημένη ή μια ελεύθερη κατάσταση PP (Stoyanova & Ellerton, 1996). Στο μαθηματικό PP στοχεύεται ο μαθητής μέσω των προβλημάτων που θέτει να εμβαθύνει στην μαθηματική έννοια και στις ιδιότητες της.

Η έννοια της συμμετρίας είναι πλούσια σε αναφορές τόσο σε μαθηματικό επίπεδο, όσο και σε κοινωνικό. Για τον λόγο αυτό, ένα μέρος της εκπαιδευτικής έρευνας εστιάστηκε στον αν οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια της συμμετρίας και στο ποιες είναι οι δυσκολίες των μαθητών σε σχέση με τη συμμετρία και τις ιδιότητές της.

Η βιβλιογραφική επισκόπηση φώτισε τα εξής σημεία:

- Τόσο ο χελωνόκοσμος, όσο και κάποια DGS αναδεικνύονται ως κατάλληλα εργαλεία, ώστε οι μαθητές να μαθαίνουν να σκέφτονται σωστά για την συμμετρία και μάλιστα, να γενικεύσουν τα νοήματά τους και σε άλλα περικείμενα (Hoyles & Healy, 1997; Ng & Sinclair, 2015).
- Προτείνονται διαθεματικές προσεγγίσεις σε συνδυασμό με DGS, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν την αξονική συμμετρίας (Knuchel, 2004).
- Οι μαθητές δεσμεύονται ισχυρότερα με δραστηριότητες στις οποίες μπορούν να ενσωματώσουν προσωπικές τους εμπειρίες (Healy, 2003).
- Μόνο αν αντιληφθούν, οι μαθητές, την αξονική συμμετρία ως σχέσεις γωνιών θα μπορέσουν να την γενικεύσουν (Seah & Horne, 2019).
- Παρατηρείται έλλειψη ερευνών που εμπεριέχουν και διδακτικές μεθόδους που υποστηρίζουν τις δεξιότητες του 21ου αιώνα, όπως, κριτική σκέψη, συνεργασία, δημιουργικότητα και άλλες.

Η έρευνα

Το πλαίσιο της έρευνας

Έχοντας ως βάση τα παραπάνω συμπεράσματα της βιβλιογραφίας, οργανώθηκε έρευνα, η οποία στόχευσε στον εντοπισμό ενδείξεων για το πώς σκέφτονται και ποια νοήματα αναπτύσσουν οι μαθητές για την αξονική συμμετρία, όσο προγραμματίζουν και χειρίζονται δυναμικά γεωμετρικά μοντέλα σε ένα ψηφιακό περιβάλλον. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε το πώς νοηματοδοτούν οι μαθητές τις σχέσεις γωνιών στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας. Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκε μικρόκοσμος, στο εργαλείο Malt2 που ενσωματώνει την Γεωμετρία της χελώνας και τον δυναμικό χειρισμό (Kynigos & Grizioti, 2018).

Η παρούσα έρευνα οργανώθηκε στα πρότυπα της έρευνας σχεδιασμού (Wang & Hannafin, 2005). Σκοπός της ήταν να διερευνηθεί αν ένας συνδυασμός δραστηριοτήτων που στηρίζονται σε θεωρητικά πλαίσια μάθησης και σε διδακτικές μεθόδους είναι ικανός να υποστηρίξει την διερεύνηση των σχέσεων γωνιών στο πλαίσιο της αξονικής συμμετρίας, ώστε να αποτελέσει καλή πρακτική παρουσίασης του αντικειμένου σε μαθητές Γυμνασίου. Εργαλεία της έρευνας αποτέλεσαν δραστηριότητες σε μικρόκοσμους που αναπτύχθηκαν από την ερευνήτρια.

Για την ανάπτυξη του μικρόκοσμου επιλέχθηκε το υπολογιστικό περιβάλλον MaLT2, ώστε μέσω του δυναμικού χειρισμού και του γραπτού κώδικα οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με τις ιδιότητες των γεωμετρικών εννοιών που ενσωματώθηκαν σε αυτόν, να πειραματιστούν, να αναστοχαστούν και να τις γενικεύσουν.

Για την υποστήριξη της διαθεματικότητας, επιχειρήθηκε να δημιουργηθεί ένα δόμημα που θα παρουσιάζει την αξονική συμμετρία ενσωματωμένη σε μια καθημερινή κατάσταση ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές σκέψης, που θα είναι ανεξάρτητες από συνηθισμένα μαθηματικά περικείμενα. Για να εξυπηρετηθεί αυτή η σκοπιμότητα, επιλέχθηκε το ανθρώπινο σώμα ως σύστημα σημειωτικής διαμεσολάβησης της γνώσης. Τα χέρια του ανθρώπου σε κατάλληλες θέσεις, ορίζοντας ίσες γωνίες με την σπονδυλική στήλη, μπορούν να θεωρηθούν συμμετρικά ως προς την σπονδυλική του στήλη. Έτσι η αίσθηση και η αιτιολόγηση περί συμμετρίας γίνεται ενσώματη, καθώς οι ζητούμενες συμμετρικές κινήσεις των μαθητών και του ψηφιακού σώματος ταυτίζονται.

Αναφορικά με την ανάπτυξη δεξιοτήτων 21ου αιώνα στοχεύεται η κριτική σκέψη, σε δύο άξονες. Τόσο μέσω του ΡΡ, όσο και μέσω της υπολογιστικής σκέψης.

- Για την υποστήριξη του ΡΡ επιλέχθηκε η συνολική δράση να δομηθεί σε ένα πλαίσιο ΡΡ (Kontorovich & Koichu, 2009) και η τελική δραστηριότητα να ζητά από τους μαθητές να θέσουν ένα πρόβλημα. Το πλαίσιο ΡΡ, που αξιοποιήθηκε, έχει τέσσερεις πτυχές: Τους πόρους (μαθηματικά γεγονότα, ορισμοί, αλγοριθμικές διαδικασίες, διαδικασίες ρουτίνας και σχετικές ικανότητες του μαθηματικού λόγου), τις στρατηγικές (γενίκευση, αποσύνθεση του προβλήματος, δημιουργία ενός μοντέλου, δημιουργία παραλλαγής, what-if-notting, αλυσιδοποίηση και στόχευση σε συγκεκριμένη λύση), την ευστοχία (πεποιθήσεις και αυτορρύθμιση) και το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο εφαρμόζεται το ΡΡ. Καθώς ζητούμενο ήταν η κατανόηση και εφαρμογή της μαθηματικής έννοιας, επιλέχθηκε για το ΡΡ μια δομημένη και μια ημιδομημένη κατάσταση. Συγκεκριμένα, οι πρώτες δραστηριότητες χρησιμοποιήθηκαν ώστε οι μαθητές να «συλλέξουν» πόρους, ενώ μέσω της διατύπωσης της τελικής δραστηριότητας καθοδηγήθηκαν οι μαθητές στην στόχευση σε συγκεκριμένη λύση.
- Για την υπολογιστική σκέψη επιλέχθηκε μια από τις δραστηριότητες να είναι η αποσφαλμάτωση του κώδικα.

Ο μαθησιακό σχεδιασμός των δραστηριοτήτων οργανώθηκε με βάση το μοντέλο της Νέας Μάθησης (Kalantzis & Cope, 2012), ώστε οι μαθητές να περάσουν από τις γνωσιακές διαδικασίες του «Βιώνοντας το νέο», «Νοηματοδοτώντας με θεωρία», «Αναλύοντας λειτουργικά» και «Εφαρμόζοντας δημιουργικά».

Ερευνητικά ερωτήματα

- Πώς οι μαθητές διερευνούν τις κινήσεις του ψηφιακού ανθρώπινου σώματος όταν καλούνται να συνδυάσουν την ενσώματη αντίληψη της κίνησης με τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των αντικειμένων, που παρέχει το MaLT2;
- Πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την έννοια της αξονικής συμμετρίας, όταν έχουν λύσει προβλήματα με το ψηφιακό ανθρώπινο σώμα;
- Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν οι μαθητές για να περιγράψουν ένα νέο πρόβλημα στηριγμένοι στα προβλήματα που έλυσαν;

Συλλογή δεδομένων

Οι μαθητές που αποτέλεσαν το δείγμα του διδακτικού πειράματος, ήταν 4 μαθητές που φοιτούσαν στην Β' Γυμνασίου, Πρότυπου Σχολείου της Αθήνας. Ήταν μαθητές του ίδιου τμήματος, καθώς επιβάλλονταν η τήρηση των υγειονομικών πρωτόκολλων λόγω Covid 19. Οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι στη χρήση του προγράμματος MaLT2. Δούλεψαν σε ομάδες των δύο ατόμων. Η παρέμβαση έγινε στην τάξη των μαθητών σε εξωδιδακτικό ωράριο.

Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν ένα πρόγραμμα καταγραφή οθόνης του υπολογιστή και οι σημειώσεις της ερευνήτριας. Το πρόγραμμα καταγραφής οθόνης του υπολογιστή θεωρήθηκε σημαντικό μέσο συλλογής δεδομένων, καθώς τα ερευνητικά ερωτήματα και η στόχευση της έρευνας αφορούσαν τόσο το πώς σκέφτονται και ενεργούν οι μαθητές όσο και το μαθησιακό αποτέλεσμα. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκε η δυνατότητα καταγραφής που προσφέρει το ψηφιακό μέσο διασύνδεσης zoom, το οποίο επιτρέπει τόσο την καταγραφή της οθόνης του υπολογιστή, όσο και του ήχου, δηλαδή των συζητήσεων των μαθητών. Οι σημειώσεις της ερευνήτριας, που γράφονταν μετά το πέρας κάθε συνάντησης, χρησιμοποιήθηκαν για να καταγραφούν στάσεις και κινήσεις των μαθητών που δεν μπορούσαν να καταγραφούν με το άλλο μέσο συλλογής δεδομένων.

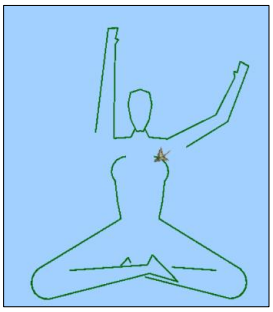
Οι μαθητές απάντησαν ένα pre test, για τον εντοπισμό της πρότερης γνώσης τους και οι μαθητές της μιας ομάδας παραχώρησαν μια σύντομη ημιδομημένη συνέντευξη.

Υλοποίηση

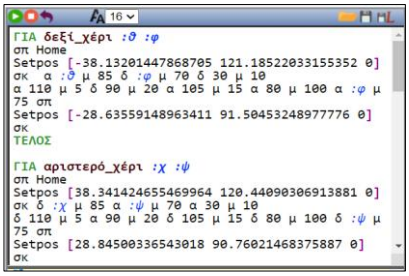
Οι μαθητές απάντησαν σε ένα pre test στο οποίο φάνηκε πως η στρατηγική ελέγχου της αξονικής συμμετρίας είναι ο έλεγχος ταύτισης των δύο μερών μετά από τσάκιση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας.

Οι μαθητές είχαν στην διάθεσή τους:

- Αρχεία σε Malt2 όπου ήταν προγραμματισμένο ένα ψηφιακό ανθρώπινο σώμα (Εικόνα 1), το οποίο περιείχε μεταβλητές στους ώμους και στους αγκώνες. Τα αρχεία ανοίγουν στον μικρόκοσμο του Malt2 όπου είναι διαθέσιμος ο κώδικας του δομήματος (Εικόνα 2) και οι μεταβολείς των μεταβλητών(Εικόνα 3).



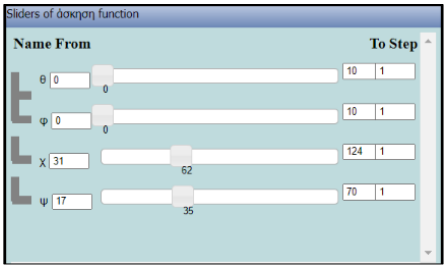
Εικόνα 1: Ψηφιακό σώμα



```
ΓΙΑ δεξί_χέρι :θ :φ
σπ Home
Setpos [-38.13201447868705 121.18522033155352 0]
σκ  α :θ μ 85 δ :φ μ 70 δ 30 μ 10
α 110 μ 5 δ 90 μ 20 α 105 μ 15 α 80 μ 100 α :φ μ
75 σπ
Setpos [-28.63559148963411 91.50453248977776 0]
σκ
ΤΕΛΟΣ

ΓΙΑ αριστερό_χέρι :χ :ψ
σπ Home
Setpos [38.341424655469964 120.44090306913881 0]
σκ δ :χ μ 85 α :ψ μ 70 α 30 μ 10
δ 110 μ 5 α 90 μ 20 δ 105 μ 15 δ 80 μ 100 δ :ψ μ
75 σπ
Setpos [28.84500336543018 90.76021468375887 0]
σκ
```

Εικόνα 2: Κώδικας



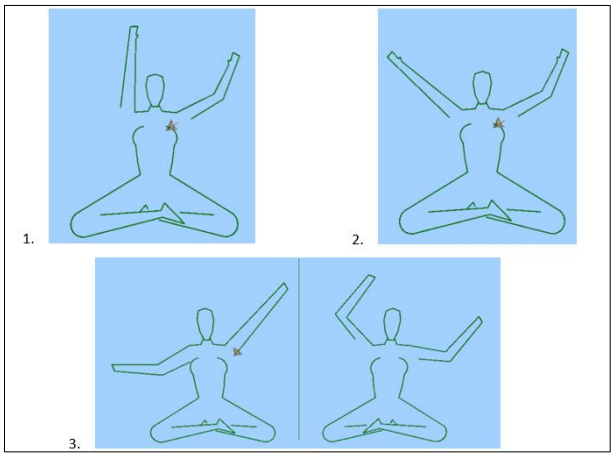
Εικόνα 3: Μεταβολείς μεταβλητών

- ένα video στο οποίο ένας άνθρωπος έκανε τις κινήσεις που καλούνταν να μιμηθεί το ψηφιακό σώμα
- φύλλα εργασίας που καθοδηγούσαν τους μαθητές να ανοίξουν και να επεξεργαστούν συγκεκριμένο αρχείο ανά δραστηριότητα και να καταγράψουν παρατηρήσεις για τις σχέσεις των γωνιών που «δημιουργούν» συμμετρία ή «κανόνες συμμετρίας»

Η παρέμβαση οργανώθηκε σε τρία σκέλη τα οποία επιμερίστηκαν, ως ακολούθως:

Στο 1ο σκέλος οι μαθητές κλήθηκαν μετακινώντας τους δρομείς να φέρουν τα χέρια του σώματος συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη, καταγράφοντας παράλληλα τις σχέσεις γωνιών που δημιουργούν συμμετρικές κινήσεις. Αυτό ολοκληρώθηκε με τρία διαφορετικά δομήματα, τα οποία φαίνονται στην Εικόνα 4. Για την ολοκλήρωση του 1ου σκέλους οι μαθητές έπρεπε να γράψουν ένα κανόνα συμμετρίας των χεριών ως προς την σπονδυλική στήλη.

Σε αυτό το σκέλος υπήρχε στόχευση στην κατανόηση. Δηλαδή, επιδιώκονταν οι μαθητές, προοδευτικά να εντοπίσουν το επαναλαμβανόμενο μοτίβο των ίσων γωνιών που ορίζουν τα χέρια με τη σπονδυλική στήλη ώστε να δημιουργηθεί η αξονική συμμετρία. Αρχικά να το καταγράφουν σαν παρατήρηση και τελικά να διατυπώσουν τον κανόνα συμμετρίας.

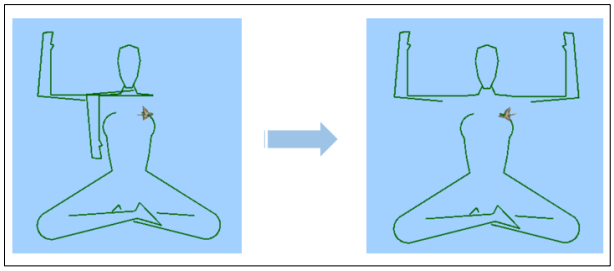


Εικόνα 4: Τα δομήματα του 1ου σκέλους

Εδώ οι μαθητές και των δύο ομάδων, αρχικά παρατηρούσαν το video, ώστε να εντοπίσουν το τελικό ζητούμενο και χρησιμοποιούσαν την μετακίνηση των δρομέων των μεταβλητών προκειμένου να το πετύχουν. Στη συνέχεια, άρχισαν να εντοπίζουν πως όταν το τελικό αποτέλεσμα παράγεται, οι τιμές των μεταβλητών δεξιού και αριστερού χεριού είναι ίσες. Εντοπίζοντας αυτό, άρχισαν να «κατασκευάζουν» τις συμμετρικές θέσεις των χεριών ως προς την σπονδυλική στήλη χωρίς να μετακινούν τους μεταβολείς, αλλά με αλλαγή των τιμών των μεταβλητών. Αυτός ήταν και ο κανόνας συμμετρίας που διατύπωσαν, χωρίς βέβαια να χρησιμοποιούν επίσημο λεξιλόγιο σε αυτόν.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι μαθητές την ομάδας Β εντόπισαν το επαναλαμβανόμενο μοτίβο πολύ γρήγορα και χωρίς να χρειαστεί να το συζητήσουν, ενώ οι μαθητές της ομάδας Α έκαναν εκτενείς διαπραγματεύσεις για τις διατυπώσεις των παρατηρήσεών και έλεγχαν ξανά και ξανά το αν το τελικό τους παραγόμενο, κάθε φορά, είναι σωστό.

Στην πρώτη δραστηριότητα του 2ου σκέλους οι μαθητές, φαινομενικά, κλήθηκαν να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία, όμως αυτή τη φορά ο κώδικας ήταν προγραμματισμένος να παράγει συμμετρικές κινήσεις των χεριών με αντίθετες γωνίες. Στην δεύτερη δραστηριότητα, να παρέμβουν στον κώδικα του προγράμματος, ώστε να διορθώσουν την εντολή του προγράμματος που άλλαζε τον κανόνα της συμμετρίας. Για το 2ο σκέλος χρησιμοποιήθηκε το δόμημα της Εικόνας 5. Σε αυτό το σκέλος υπήρχε στόχευση στην ανάλυση.



Εικόνα 5: Το δόμημα του 2ου σκέλους

Στην πρώτη δραστηριότητα αυτού του σκέλους, δόθηκε στους μαθητές το ψηφιακό δόμημα με αλλαγμένο κανόνα στις σχέσεις γωνιών που παράγουν συμμετρία, ώστε να καταφέρουν να γενικεύσουν τον κανόνα που είχαν διατυπώσει. Να περάσουν, δηλαδή, από το επαναλαμβανόμενο μοτίβο που είχαν εντοπίσει στο κρυμμένο μήνυμα του μοτίβου, δηλαδή τις σχέσεις γωνιών. Η αλλαγή του κανόνα ήταν το πέρασμα από γωνίες ίσου μέτρου και φοράς σε γωνίες ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς. Αυτό είναι πολύ μακριά από την γνώση και την εμπειρία μαθητών της Β Γυμνασίου, αλλά η ενσώματη αντίληψη των κινήσεων που παρέχει το MaLT2, επέτρεψε την προσέγγιση.

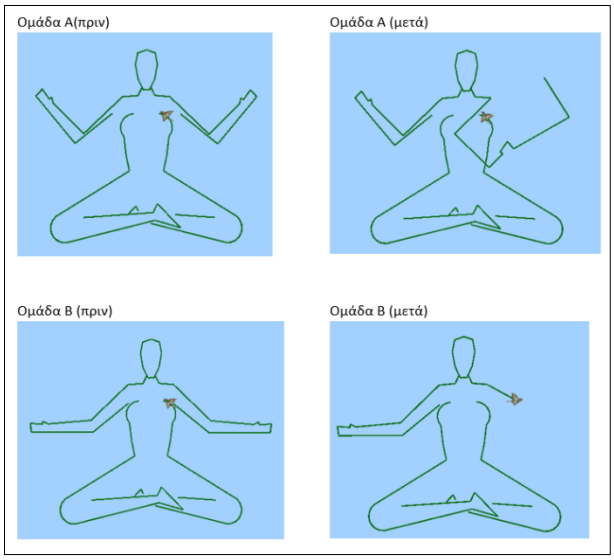
Εδώ αρχικά οι μαθητές και των δύο ομάδων επιχείρησαν να εφαρμόσουν το μοτίβο. Όταν κατάλαβαν πως αυτό δεν δούλευε, κατέφυγαν στους μεταβολείς των μεταβλητών. Εκεί, στηριζόμενοι στην εικόνα ξανά εντόπισαν το πώς θα φέρουν τα χέρια συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη. Οι μαθητές της ομάδας Β, όπως πριν, δεν αφιέρωσαν χρόνο στον να διατυπώσουν την παρατήρησή τους, ενώ οι μαθητές της ομάδας Α προσπαθούσαν για ώρα να εντοπίσουν γιατί καταφέρνουν να δημιουργήσουν συμμετρία, ενώ δεν ισχύει ο κανόνας που είχαν διατυπώσει. Αυτή η προσπάθεια απέδωσε καρπούς όταν ο ένας μαθητής άρχισε να επαναλαμβάνει με το χέρι του την κίνηση του δομήματος.

Στην δεύτερη δραστηριότητα του 2ου σκέλους οι μαθητές κλήθηκαν να κάνουν αποσφαλμάτωση. Να διορθώσουν, δηλαδή, τον κώδικα ώστε η συμμετρία να παράγεται με βάση τον κανόνα που είχαν διατυπώσει. Οι μαθητές της ομάδας Α που είχαν αφιερώσει πολύ χρόνο στο να καταλάβουν την προηγούμενη δραστηριότητα, εντόπισαν πολύ γρήγορα «το σφάλμα» του κώδικα. Βέβαια, δυσκολεύτηκαν να τον διορθώσουν. Αυτό ανέδειξε πως οι μαθητές δεν είχαν μεγάλη άνεση με την χρήση του MaLT2. Οι μαθητές της ομάδας Β, παρανόησαν το ζητούμενο. Αντιλήφθηκαν πως έπρεπε να κάνουν τα χέρια να κινούνται συγχρονισμένα. Έτσι, έκαναν αυτή την αλλαγή στον κώδικα. Η αλλαγή που έκαναν οι μαθητές της ομάδας Β είναι μακράν απαιτητικότερη από την ζητούμενη. Αναδείχθηκε, λοιπόν, πως αυτοί οι μαθητές είχαν πολύ υψηλές δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης. Αυτό σε συνδυασμό με την χαμηλού επιπέδου διερευνητική δραστηριότητα, δεν τους επέτρεψε να στρέψουν την προσοχή τους στην συμμετρία και στις σχέσεις γωνιών.

Στο 3ο σκέλος ζητήθηκε από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα πρόβλημα στην συμμετρική θέση που είχαν τα χέρια ως προς σπονδυλική στήλη, ώστε να προκαλέσουν την άλλη ομάδα να το διορθώσει. Στην Εικόνα 6, φαίνονται τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι ομάδες στα δομήματά τους. Στόχος της δραστηριότητας αυτού του σκέλους ήταν η σύνθεση. Δηλαδή, οι μαθητές αξιοποιώντας την προηγούμενη εμπειρία τους να καταφέρουν να δημιουργήσουν ένα νέο πρόβλημα.

Οι μαθητές ενθουσιάστηκαν με αυτή τη δραστηριότητα. Συζήτησαν και δοκίμασαν πολλές ιδέες προκειμένου να δυσκολέψουν την άλλη ομάδα. Άντλησαν ιδέες από τα ζητούμενα των προηγούμενων δραστηριοτήτων και τελικά παρέδωσαν στην άλλη ομάδα ένα «πρόβλημα» που θεωρούσαν απαιτητικό.

Οι μαθητές της ομάδας Β παραχώρησαν μια σύντομη συνέντευξη. Από την συνέντευξη αναδείχθηκε ότι οι μαθητές θεωρούσαν πως ο κανόνας συμμετρίας που διατύπωσαν στην διάρκεια της δραστηριότητας αφορούσε μόνο το δόμημα που επεξεργάζονταν και όχι έναν γενικό κανόνα συμμετρίας.



Εικόνα 6: Τα δομήματα του 3ου σκέλους

Ανάλυση των δεδομένων

Για ανάλυση των δεδομένων έγινε απομαγνητοφώνηση και οργάνωση των συζητήσεων των μαθητών σε πίνακα, ανά ερευνητικό ερώτημα και ανά σκέλος δραστηριότητας. Ο πίνακας εμπλουτίστηκε από στιγμιότυπα της δράσης της οθόνης.

Ευρήματα

Τα ευρήματα της έρευνα δείχνουν πως οι μαθητές διευκολύνονται πολύ στην διερεύνηση των κινήσεων των χεριών του σώματος από την δυνατότητα δυναμικού χειρισμού που τους παρέχει το ψηφιακό εργαλείο.

Από την απομαγνητοφώνηση και την παρακολούθηση των μαγνητοσκοπήσεων του καταγραφέα οθόνης, παρατηρείται πως ο τρόπος που οι μαθητές διερεύνησαν τις κινήσεις του ψηφιακού σώματος εξελισσόταν όσο προχωρούσαν οι δραστηριότητες. Αρχικά, οι μαθητές συζητούσαν για ζητήματα προσανατολισμού και για τον λόγο αυτό κατέφευγαν στο υποστηρικτικό video. Στη συνέχεια, δεν είχαν την ανάγκη της οπτικής υποστήριξης˙ ένδειξη του ότι άρχισαν να συνδέουν τον προσανατολισμό τους με τον κώδικα του προγράμματος και τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κάθε χέρι. Αντιλαμβανόμενοι αυτή την σύνδεση, άρχισαν να συνδέουν τις διερευνήσεις των κινήσεων του ψηφιακού σώματος με τις τιμές των μεταβλητών. Η σύνδεση αυτή εξελίχθηκε σε δύο στάδια. Αρχικά, άλλαζαν τις οριακές τιμές, ενώ στη συνέχεια συνδύαζαν αλλαγή οριακών τιμών με μετακίνηση μεταβολέων για να καταλάβουν πως λειτουργεί η κίνηση των χεριών. Βεβαίως, η μετακίνηση των μεταβολέων χρησιμοποιήθηκε εξαρχής από τους μαθητές. Ωστόσο άρχισε να επιδρά στον τρόπο που αντιλαμβάνονται τις κινήσεις, μόνο όταν έχουν μεταφράσει την κίνηση σε στροφές γωνιών και τιμές μεταβλητών. Η πορεία του πώς συζήτησαν οι μαθητές τις κινήσεις του ψηφιακού σώματος φαίνεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1: Εξέλιξη της διερεύνησης των κινήσεων.

Ποιο είναι το αριστερό χέρι; Βάλε το video	Ποιες είναι οι μεταβλητές του αριστερού χεριού; Για δοκίμασε.	Βάλε x=0.	Βάλε x=0 και μετακίνησε.

Αυτή η διαδοχή των σταδίων στις συζητήσεις, των μαθητών, αναδεικνύει πως τα νοήματα των μαθητών μέσα από την ενασχόλησή τους με το δόμημα εξελίσσονται. Η αρχική οπτική ταύτιση μετατρέπεται σε στροφές ίσων γωνιών. Κάτι που είναι ζητούμενο για την σωστή αντίληψη της συμμετρίας (Seah & Horne, 2019). Σημαντική ένδειξη του ότι ο δυναμικός χειρισμός των αντικειμένων αλληλοεπιδρά με την ενσώματη αντίληψη της κίνησης προκύπτει από το ότι ένας μαθητής της ομάδας Α στην διάρκεια της αποσφαλμάτωσης, του κώδικα, επαναλάμβανε με το σώμα τους την κίνηση του δομήματος για να αντιληφθεί το πώς λειτουργεί ο κώδικας για το δόμημα και να εντοπίσει το σφάλμα.

Ταυτόχρονα με την εξέλιξη των διερευνήσεων των κινήσεων του ψηφιακού σώματος, εξελισσόταν το πώς αντιλαμβάνονται, οι μαθητές, την έννοια της συμμετρίας.

Η ομάδα Β εστίασε εξ ’αρχής στις μεταβλητές. Η ομάδα Α, από την άλλη, έκανε πολλές συζητήσεις για την κατασκευή της συμμετρίας, αλλά κυρίως για την διατύπωση των κανόνων. Αυτές οι συζητήσεις και διαπραγματεύσεις δίνουν την εικόνα του πώς τα υπάρχοντα νοήματα μετασχηματίζονται και εξελίσσονται. Οι μαθητές της ομάδας Α, όταν αναζητούσαν τη συμμετρία στις δύο πρώτες κινήσεις συζητούσαν: «Να κάνουμε και το άλλο χέρι όπως αυτό», «Πρέπει να συμπίπτει αν το διπλώσουμε στην σπονδυλική στήλη», «Τα χέρια είναι ίσα, στρίβουν ίσες μοίρες, άρα ισαπέχουν από την σπονδυλική στήλη». Στην πορεία, όμως, της δραστηριότητας συζητούν «Μετακίνησε την μεταβλητή α, να δούμε σε ποιο χέρι αντιστοιχεί για να βρούμε την αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου χεριού». Αρχίζουν, δηλαδή, να στηρίζονται στις τιμές της γωνίας στροφής των χεριών και να αποδεσμεύονται από την οπτική ταύτιση, χωρίς βέβαια να την απορρίπτουν. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τους κανόνες που διατυπώνουν για το τί πρέπει να συμβαίνει, ώστε τα χέρια του ψηφιακού σώματος να είναι συμμετρικά ως προς την σπονδυλική στήλη.

Έχοντας ολοκληρώσει το διερευνητικό κομμάτι της παρέμβασης, οι μαθητές προχώρησαν στην δραστηριότητα PP, όπου αξιοποίησαν τα συμπεράσματα των διερευνήσεών τους.

Η στρατηγική που ακολούθησαν οι μαθητές για να θέσουν ένα νέο πρόβλημα ήταν να χρησιμοποιήσουν τις προβληματικές καταστάσεις που διόρθωσαν στην διάρκεια της παρέμβασης. Οι ιδέες που πρόσθεσαν οι μαθητές στα προβλήματά τους, ήταν αλλαγές στα μήκη των χεριών και εισαγωγή άσκοπων μεταβλητών για να αποπροσανατολίσουν την άλλη ομάδα. Η μίμηση των ζητουμένων είναι μια καλή ένδειξη, τόσο για το ότι, οι μαθητές, κατάλαβαν την δομή και το νόημα της προβληματικής, που θέτουν οι δραστηριότητες, όσο και για το ότι είναι σε θέση να την εφαρμόσουν. Το ερέθισμα για την δραστηριότητα του PP, το να θέσουν, οι μαθητές, ένα πρόβλημα με το οποίο να προκαλέσουν την άλλη ομάδα, φάνηκε να λειτουργεί καταλυτικά στην εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα. Οι μαθητές και των δύο ομάδων προβληματίζονταν για την ευστοχία και την καταλληλότητα των προβλημάτων όσο τα προετοίμαζαν, αλλά ένιωσαν ικανοποιημένοι από τα τελικά παραγόμενά τους. Η διάθεση των μαθητών να δημιουργήσουν απαιτητικά προβλήματα, για την άλλη ομάδα, οδήγησε στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης σε ζητήματα που σχετίζονται με την υπολογιστική σκέψη, αλλά όχι με το γνωστικό αντικείμενο. Παρά το γεγονός ότι οι μαθητές κατανόησαν την προβληματική των ζητουμένων, δεν κατάφεραν να εμβαθύνουν στην έννοια της συμμετρίας. Δεν αναδείχθηκε από τα τελικά παραγόμενα των ομάδων κάποια «νέα εφαρμογή» της συμμετρίας των χεριών του ανθρώπου ως προς την σπονδυλική

στήλη. Πιθανόν, αυτό το εύρημα να ήταν διαφορετικό, αν στους μαθητές είχαν δοθεί περισσότερα ερεθίσματα για τις συμμετρικές κινήσεις των χεριών ως προς την σπονδυλική στήλη. Αν, δηλαδή, ένας γυμναστής είχε προπονήσει, επικουρικά, τους μαθητές σε συμμετρικές κινήσεις χεριών ως προς την σπονδυλική στήλη για καλύτερη στάση του σώματος, ίσως τότε, έχοντας περισσότερα ερεθίσματα, να κατάφερναν να εμβαθύνουν στην έννοια της συμμετρίας και κατά συνέπεια να θέσουν προβλήματα με μαθηματικό ενδιαφέρον. Βεβαίως, παρά το ότι ο μαθηματικός στόχος δεν επιτεύχθηκε, είναι μία διαδικασία η οποία αξίζει να ενσωματώνεται, ώστε οι μαθητές, σε θετικό κλίμα, να επεξεργάζονται τα συμπεράσματά τους και τα νοήματα που δημιουργούν θέτοντας νέα προβλήματα και ερωτήσεις.

Συμπεράσματα - Επεκτάσεις

Οι Seah και Horne πρότειναν την παρουσίαση της έννοιας της συμμετρίας σαν σχέσεις γωνιών προκειμένου οι μαθητές να την γενικεύουν και συζήτησαν την ανάγκη έρευνας σχετικά με τα μέσα σημειωτικής διαμεσολάβησης που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν κατανόηση της έννοια της συμμετρίας. Στην παρούσα έρευνα, παρά την μικρή της κλίμακα, εμφανίζονται ενδείξεις για το ότι το ανθρώπινο σώμα αποτελεί ένα αποτελεσματικό μέσο σημειωτικής διαμεσολάβησης της γνώσης στην προσέγγιση της έννοιας της αξονικής συμμετρίας ως σχέσεις γωνιών.

Αναφορικά με τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των αναπαραστάσεων, από την μια εντοπίστηκαν ενδείξεις για το ότι συνέβαλε τη διερεύνηση των εννοιών αλλά και την επέκταση των νοημάτων από τους μαθητές της ομάδας Α, επιβεβαιώνοντας παρόμοια ερευνητικά ευρήματα (Healy, 2003; Ng & Sinclair, 2015). Από την άλλη, όμως, δεν φάνηκε να επιδρά στην αντίληψη που είχαν οι μαθητές της ομάδας Β για την έννοια της συμμετρίας ,όπως φάνηκε από την συνέντευξη. Για μαθητές σαν αυτούς, οι οποίοι χαρακτηρίζονται ως άτομα με υψηλές δεξιότητες υπολογιστικής σκέψης, δεν φάνηκαν κατάλληλες οι δραστηριότητες που στηρίζονται στον δυναμικό χειρισμό των αναπαραστάσεων, επιβεβαιώνοντας πως προγράμματα χαμηλών απαιτήσεων δεν οδηγούν στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (Grover & Pea, 2017).

Τα ευρήματα της έρευνας φανέρωσαν πως ο συνδυασμός της χρήσης του ανθρώπινου σώματος με τις δυνατότητες του MaLT2 οδήγησε στο να καταφέρουν οι μαθητές να κάνουν αποσφαλμάτωση του κώδικα, να αναπτύξουν δηλαδή μια σημαντική πτυχή της υπολογιστικής σκέψης. Πράγματι, οι μαθητές κατάφεραν να κάνουν αποσφαλμάτωση του κώδικα όταν συντόνισαν τις κινήσεις τους με αυτές του δομήματος. Αυτό αποτελεί μια από τις πτυχές που ενσωματώθηκαν στην Γεωμετρία της χελώνας από τον Papert.

Για την επέκταση της έρευνας προτείνεται η αξιοποίηση του ίδιου ψηφιακού σώματος και στην τρίτη διάσταση˙ μια δυνατότητα που ενσωματώνεται στο MaLT2. Δηλαδή το ψηφιακό σώμα να κινεί τα χέρια του στον χώρο και να παράγει συμμετρίες. Ο προγραμματισμός για να κινείται το ψηφιακό σώμα στον χώρο, χρειάζεται μια πολύ μικρή παρέμβαση. Δηλαδή, προσθήκη δύο έως τεσσάρων ακόμα μεταβλητών. Μεταβλητές περιστροφής των χεριών δεξιά – αριστερά και πάνω - κάτω. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαν να οριστούν συμμετρικές θέσεων των χεριών του ανθρώπινου σώματος ως προς επίπεδο, τις οποίες θα καλούνταν να σχηματίσουν οι μαθητές, ως προς άξονα και κέντρο. Βεβαίως, μια τέτοια πρόταση θα είχε νόημα να εφαρμοστεί σε μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας και εφόσον εξασφαλίζονταν η ικανότητα αιτιολόγησης της συμμετρίας στο επίπεδο. Επιπλέον, σε μια τέτοια επέκταση που αυξάνεται η πολυπλοκότητα τον νοημάτων και των διερευνήσεων που πρέπει να κάνουν οι μαθητές, θα έπρεπε κάθε δραστηριότητα να υποστηρίζεται από διδασκαλία.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ackermann, E. (2001). Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the difference? *Constructivism: Uses and Perspectives in Education, 1.2.* Ανακτήθηκε από http://learning.media.mit.edu/content/publications/EA.Piaget%20_%20Papert.pdf

Battista, M. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (σσ. 341-362). Information Age Publishing Charlotte, NC.

Beal, C., & Cohen, P. (2012). Teach Ourselves: Technology to Support Problem Posing in the STEM Classroom. *Creative Education, 3*(4), σσ. 513-519. doi:10.4236/ce.2012.34078

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Goldenberg, P., & Cuoco, A. (1998). *What is dynamic geometry? Designing learning environments for developing undestanding of geometry and space* (σσ. 365-386). Routledge. doi:https://doi.org/10.4324/9780203053461

Grizioti, M., & Kynigos, C. (2021). Code the mime: A 3D Programmable Charades Game for Computational Thinking in MaLT2. *British Journal of Educational Technology, 52*(3), σσ. 1004-10023. doi:10.1111/bjet.13085

Grover, S., & Pea, R. (2017). Computational Thinking: A Competency Whose Time Has Come. Στο *Computer Science Education.* doi:10.5040/9781350057142.ch-003

Healy, L. (2003). From symmetry as a property to reflection as a geometrical transformation: evolving meanings and computational tools. *Third computer algebra in mathematics.* Reims, France. Ανακτήθηκε από https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00001334/document

Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding Meanings for Reflective Symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*(2), σσ. 27–59. doi:https://doi.org/10.1023/A:1009721414546

Kalantzis, M., & Cope, B. (2012). *New learning: Elements of a science of education.* Cambridge University Press.

Knuchel, C. (2004). Teaching Symmetry in the Elementary Curriculum. *The Mathematics Enthusiast, 1*(1). Ανακτήθηκε από https://scholarworks.umt.edu/tme/vol1/iss1/2

Kontorovich, I., & Koichu, B. (2009). Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing. *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 3*, σσ. 401-408. PME.

Kynigos, C., & Grizioti, M. (2018). Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. *Informatics in Education, 17*(2), σσ. 321-340. doi:10.15388/infedu.2018.17

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.* Sense Publishers.

Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, G. (2000). Learning Through Teaching: The Case of Symmetry. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), σσ. 18-36. doi:10.1007/BF03217072

Mishra, S., & Iyer, S. (2013). Problem Posing Exercises (PPE): An instructional strategy for learning of complex material in introductory programming courses. *IEEE Fifth International Conference on Technology for Education*, (σσ. 151-158). Kharagpur, India. doi:https://doi.org/10.1109/T4E.2013.45

Ng, O.-L., & Sinclair, N. (2015). Young Children Reasoning About Symmetry in a Dynamic Geometry Environment. *ZDM Mathematics Education, 47*(3), σσ. 421-434. doi:10.1007/s11858-014-0660-5

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas.* Basic Books.

Sarama, J., & Clements, D. (2002). Design of Microworlds in Mathematics and Science Education. *Journal of Educational Computing Research*, 27(1), σσ. 1-5. doi:https://doi.org/10.2190/P9GT-RN11-3AY3-WBG6

Seah, R., & Horne, M. (2019). An exploratory study on students' reasoning about symmetry. *Proceedings of the 42nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (σσ. 628-635). MERGA.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A framework for research into students' problem posing. In *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Clarkson.

Wing, J. (2011). Research Notebook: Computational Thinking--What and Why? The Link Magazine. Ανακτήθηκε από https://www.cs.cmu.edu/link/research-notebook-computational-thinking-what-and-why