Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2010)

7ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΤΠΕ «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση»

Νοήματα που παράγονται κατά τη διαδικασία ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου χρησιμοποιώντας εργαλεία μεταβολής

Ιωάννης Ζάντζος, Χρόνης Κυνηγός

Νοήματα που παράγονται κατά τη διαδικασία ισοδιαμέρισης ενός ορθογωνίου χρησιμοποιώντας εργαλεία μεταβολής

Ιωάννης Ζάντζος, Χρόνης Κυνηγός
izantzos@math.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης που αφορά τα νοήματα που παράγονται από μαθητές 12-13 γύρω από την έννοια της αντίστροφης αναλογίας. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ζεύγη χρησιμοποιώντας ένα υπολογιστικό περιβάλλον που συνδυάζει τον δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων και την συμβολική έκφραση μέσα από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Ως αφετηρία στους πειραματισμούς, τους δόθηκε ο μισοψημένος μικρόκοσμος «ισοδιαμέριση» που θα τους ήταν χρήσιμος για την ισοδιαμέριση ενός ορθογωνίου σε ίσα μέρη. Στα ευρήματα μεταξύ άλλων καταγράφεται η αξιοποίηση των εργαλείων μεταβολής από τους μαθητές ως μέσο πειραματισμού, αναγνώρισης και έκφρασης σχέσεων μεταξύ μεταβλητών μεγεθών. Το άπειρο ως διαδικασία μέσω του κιβωτισμού διαστημάτων και το γεγονός ότι το αποτέλεσμα της παραπάνω οριακής διαδικασίας είναι ένας δεκαδικός περιοδικός αριθμός, είναι μερικά από τα νοήματα που αναπτύχθηκαν.

Λέξεις κλειδιά: αντίστροφη αναλογία, εργαλεία μεταβολής, ισοδιαμέριση, κιβωτισμός διαστημάτων, μισοψημένος μικρόκοσμος

Εισαγωγή

Έρευνες σχετικές με την έννοια της αναλογίας, έχουν αναδείξει την ύπαρξη σημαντικών προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόησή της (π.χ. Behr et al., 1992). Η έννοια της αναλογίας αποτελεί μέρος του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου που σύμφωνα με τον Vergnaud (1988), αποτελείται από όλες τις προβληματικές καταστάσεις των οποίων η λύση εμπλέκει πολλαπλασιασμό ή διαίρεση και ταξινόμησε αυτές τις καταστάσεις σε τρεις κατηγορίες: απλή αναλογία , γινόμενο μέτρων και πολλαπλή αναλογία. Ο Vergnaud εισήγαγε την έννοια του εννοιολογικού πεδίου ως ένα σύνολο καταστάσεων, η γνώση των οποίων απαιτεί γνώση πολλών εννοιών διαφορετικής φύσης. Υποστήριξε ότι έχει νόημα η θεώρηση μιας έννοιας σε σχέση με άλλες συγγενείς έννοιες, με καταστάσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις της και δεν έχει νόημα η αντίληψή της σε απομόνωση. Στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο, εκτός από την έννοια της αναλογίας (ευθεία και αντίστροφη) μεταξύ άλλων περιέχονται και έννοιες όπως: ρητοί αριθμοί, κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί. Στο παραπάνω εννοιολογικό πεδίο συμπεριλαμβάνουμε και την έννοια της ισοδιαμέρισης η οποία συνδέεται άμεσα τόσο με τους ρητούς αριθμούς όσο και ειδικότερα με την έννοια της αντίστροφης αναλογίας. Για παράδειγμα στην ισοδιαμέριση ενός ορθογωνίου, ο αριθμός των μερών στα οποία πρέπει να χωριστεί και το μήκος του κάθε μέρους αποτελούν αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Α. Τζιμογιάννης (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
με Διεθνή Συμμετοχή «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», τόμος II, σ. 417-424
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Κόρινθος, 23-26 Σεπτεμβρίου 2010

Η ισοδιαμέριση (partitioning) ορίζεται ως ο χωρισμός μιας ποσότητας σε ένα αριθμό ίσων μερών ενώ συγχρόνως η ποσότητα παραμένει σαν ένα όλο (Olive & Lobato, 2008). Η ισοδιαμέριση έχει αναγνωριστεί σαν ένας σημαντικός μηχανισμός για την κατανόηση των ρητών αριθμών και ως μέρος της ανεπίσημης γνώσης των μαθητών ακόμα και πριν την είσοδό τους στο σχολείο. Επίσης η ισοδιαμέριση είναι μια διαδικασία που παίζει σημαντικό ρόλο στην παραγωγή των υποκατασκευών (subconstructs) των ρητών αριθμών(μέρος-όλου, μέτρο, πηλίκο, τελεστή και αναλογία) και συνδέεται άμεσα με την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων (Lamon, 2007). Ευρήματα από διάφορες έρευνες πάνω στην κατανόηση των κλασμάτων δείχνουν ότι οι μαθητές που αποτυγχάνουν να επεκτείνουν τις γνώσεις τους σε έννοιες σχετικές με τα κλάσματα, συνήθως έχουν έλλειψη στην κατανόηση της ισοδιαμέρισης (Behr et al., 1983). Οι ίδιοι ερευνητές προτείνουν ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν ένα ευρύ φάσμα εμπειριών σε δραστηριότητες ισοδιαμέρισης έτσι ώστε να μπορέσουν να παρατηρήσουν την αντισταθμιστική σχέση μεταξύ του μεγέθους και του αριθμού των μερών στα οποία χωρίζεται το όλο. Παρόλα αυτά οι εκπαιδευτικοί τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούν σχήματα κατά την εισαγωγή της έννοιας του κλάσματος που είναι ήδη χωρισμένα σε ίσα μέρη, στερώντας έτσι από τους μαθητές την ευκαιρία για πειραματισμό (Κολέζα, 2000).

Η αναπαραστασιακή βάση των υπολογιστικών περιβαλλόντων μας παρέχει εργαλεία για να αναθεωρήσουμε τον ρόλο μερικών πτυχών σχετικών με τα κλάσματα και να γίνουν πιο προσιτές και κατανοητές από τους μαθητές (Psycharis et al., 2007). Ένας τρόπος που η τεχνολογία μπορεί να ενισχύσει τη μάθηση εννοιών σχετικές με τους ρητούς είναι ότι με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν και να εφαρμόσουν ενέργειες οι οποίες είναι δύσκολο να επιτευχθούν χωρίς τη χρήση τους. Οι Olive και Lobato (2008) τονίζουν ότι η χρήση κατάλληλων υπολογιστικών εργαλείων μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη εννοιών, όπως για παράδειγμα η ισοδιαμέριση και η επανάληψη (iteration) αφού 'επιτρέπει στους μαθητές να θέσουν σε εφαρμογή ψυχολογικές διεργασίες που είναι δύσκολο να εκτελεστούν με φυσικά υλικά'.

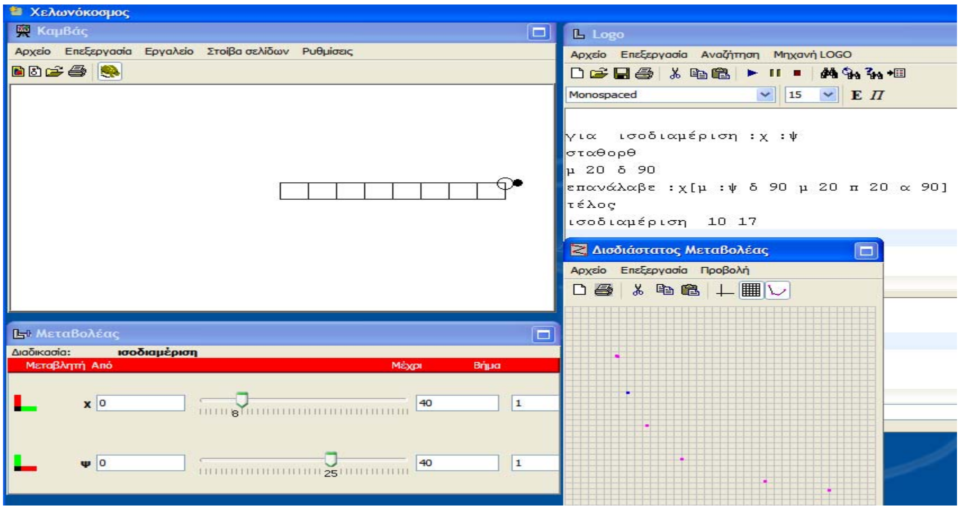
Ο Vergnaud (1988) και η Lamon (2007), τονίζουν ότι, το είδος των δραστηριοτήτων με αντίστροφη αναλογία είναι γνωστικά πιο απαιτητικά από εκείνα της ευθείας αναλογίας διότι μεταξύ άλλων εμπλέκονται τουλάχιστον τρεις χώροι μέτρου. Αν και έχουν αναφερθεί οφέλη από τη χρήση των υπολογιστικών περιβαλλόντων στις αναλογικές στρατηγικές των μαθητών (Hoyles & Noss, 1989; Psycharis & Kynigos, 2004) και στα κλάσματα (Psycharis et al., 2007), ωστόσο, λιγοστές είναι οι έρευνες σε δραστηριότητες με αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Η Lamon (2007), υπογραμμίζει την ανάγκη για τη μελέτη της αντίστροφης αναλογίας και καθορίζοντας την μελλοντική ατζέντα για τους ρητούς αριθμούς και την αναλογική σκέψη επισημαίνει: «Πολύ λίγα είναι γνωστά σχετικά με τη σκέψη των μαθητών σε πλαίσια με αντίστροφη αναλογία».

Το Υπολογιστικό περιβάλλον

Το υπολογιστικό περιβάλλον που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα είναι ο Χελωνόκοσμος ο οποίος στηρίζεται στη γλώσσα Logo και στις λειτουργικότητες της γεωμετρίας της χελώνας. Αποτελεί ένα συγκερασμό δυο ειδών λογισμικού: αυτό του εργαλείου συμβολικής έκφρασης μέσα από μια γλώσσα προγραμματισμού (Logo) και αυτό του δυναμικού χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων (Κυνηγός, 2006). Δύο βασικά εργαλεία του χελωνόκοσμου (Εικόνα 1) είναι ο απλός και ο δυσδιάστατος μεταβολέας. Ο απλός μεταβολέας παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των τιμών των μεταβλητών σε ένα αναπαριστώμενο σχήμα. Ενεργοποιείται όταν ο χρήστης κάνει «κλικ» σε οποιαδήποτε σημείο του ίχνους της χελώνας στο αναπαριστώμενο αντικείμενο, αφού προηγουμένως εκτελέσει την επιθυμητή διαδικασία. Εμφανίζεται έτσι ένα παράθυρο το οποίο περιέχει τις μεταβλητές και ένα εύρος στο οποίο κάθε μεταβλητή μπορεί να πάρει τιμές. Ο χρήστης έχει την δυνατότητα κάνοντας χρήση του ολισθητή να μεταβάλει τις τιμές της κάθε μεταβλητής να πειραματίζεται και να παρατηρεί ταυτόχρονα την αλλαγή που υφίσταται το σχήμα κατά την διάρκεια της μεταβολής. Ο δυσδιάστατος μεταβολέας είναι ένα δυσδιάστατο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η συμμεταβολή δύο μεταβλητών οι οποίες επιλέγονται από τον χρήστη και περιέχονται σε μια διαδικασία που δομείται τουλάχιστον από δύο μεταβλητές. Ο δυσδιάστατος μεταβολέας ενεργοποιείται μέσω του μονοδιάστατου και ο χρήστης επιλέγει τις δύο παραμέτρους έτσι ώστε η μια να κινηθεί στον άξονα των χ και η άλλη στον άξονα των ψ. Κάνοντας κλικ και σύροντας με πατημένο το κουμπί προκαλείται συμμεταβολή των δυο παραμέτρων αφήνοντας γραμμικό ίχνος στο επίπεδο του μεταβολέα. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα επίσης να επιλέξει ένα τυχαίο σημείο στον δυσδιάστατο μεταβολέα και μετακινώντας το να βλέπει τη συμμεταβολή των δυο μεταβλητών. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο και με άλλα σημεία, στο επίπεδο του δυσδιάστατου μεταβολέα σχηματίζεται η γραφική παράσταση των δυο μεταβλητών

Οι Δραστηριότητες

Για τη συγκεκριμένη μελέτη, αναπτύξαμε ένα μικρόκοσμο με βάση την κατασκευαστική θεώρηση (Kafai & Resnick, 1996) με την ονομασία 'ισοδιαμέριση' (Σχήμα 1).



Σχήμα 1. Ο μικρόκοσμος «ισοδιαμέριση»

Ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη των νοημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές, ήταν να τους δώσουμε να ξεκινήσουν με έναν «μισοψημένο» μικρόκοσμο (Kynigos, 2007). Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι είναι λογισμικά σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς ή ακόμα να τους αλλάξουν αλλά και να τους αποδομήσουν. Δεν αποτελούν έτοιμα περιβάλλοντα για να κατανοηθούν από τους εκπαιδευτικούς και μετά να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. Ενσωματώνουν διάφορες έννοιες και προσφέρουν στο μαθητή τα εργαλεία για να αλληλεπιδράσει με το μικρόκοσμο. Στόχος τους είναι να λειτουργούν ως σημεία εκκίνησης, και ο χρήστης να οικειοποιηθεί τις ιδέες που βρίσκονται πίσω από τη διαδικασία κατασκευής τους.

Ο μικρόκοσμος «ισοδιαμέριση» αποτελεί μια διαδικασία με δυο μεταβλητές χ και ψ. Η υποδιαδικασία με το όνομα 'σταθορθ' είναι ένα σταθερό ορθογώνιο διαστάσεων 20 επί 200 το οποίο είχαν φτιάξει οι μαθητές πριν τους πειραματισμούς τους με τον μισοψημένο μικρόκοσμο. Η μεταβλητή χ δηλώνει τον αριθμό των ορθογωνίων που η χελώνα δημιουργεί μέσα στο σταθερό ορθογώνιο-πλαίσιο, ενώ η μεταβλητή ψ το μήκος καθενός από τα ίσα αυτά ορθογώνια.

Στους μαθητές γνωστοποιήσαμε ότι ο στόχο τους ήταν η διόρθωση του μικρόκοσμου, δηλαδή το πρόγραμμα να περιέχει μόνο μία μεταβλητή και έτσι ώστε η εκτέλεση του να δίνει απευθείας ορθογώνιο χωρισμένο σε ίσα μέρη. Τους αφήσαμε να πειραματιστούν χωρίς να τους αποκαλύψουμε τη σχέση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και έτσι ώστε να τον μεταβάλουν με βάση τις προσωπικές τους απαιτήσεις.

Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα είναι μια έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) και πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο υπολογιστών ενός σχολείου της Αθήνας με είκοσι μαθητές της πρώτης τάξης Γυμνασίου. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ήδη εισαχθεί στην έννοια του κλάσματος στην παραδοσιακή αίθουσα διδασκαλίας και είχαν ήδη εξοικειωθεί με απλές κατασκευές στη γλώσσα Logo. Κάθε ζευγάρι μαθητών είχε το δικό του υπολογιστή. Η έρευνα διήρκησε 6 ώρες με τη συμμετοχή δυο εκπαιδευτικών, ένας ερευνητής και ο καθηγητής της τάξης. Για την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα λογισμικό ήχου και εικόνας το οποίο παρείχε στον ερευνητή τη δυνατότητα να παρατηρεί τις αυθόρμητες συζητήσεις των μαθητών και τις αλληλεπιδράσεις τους με τον υπολογιστή. Χρησιμοποιήθηκαν επίσης τα φύλλα εργασίας των μαθητών και οι σημειώσεις των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί έχοντας τον ρόλο συμμετοχικών παρατηρητών παρωθούσαν τους μαθητές να εκφράσουν τις σκέψεις τους χωρίς όμως να τους καθοδηγούν σε συγκεκριμένες λύσεις. Ο στόχος τους ήταν να εξετάσουν τα μαθηματικά νοήματα που αναπτύσσουν οι μαθητές γύρω από την έννοια της αντίστροφης αναλογίας καθώς επίσης και τους τρόπους που χρησιμοποιούσαν τα διαθέσιμα εργαλεία του χελωνόκοσμου.

Μελετήσαμε τα δεδομένα αναζητώντας περιστατικά κατά τα οποία το μαθηματικό νόημα γινόταν αντικείμενο συζήτησης μεταξύ των μαθητών, αλλά και περιστατικά τα οποία αφορούσαν τις χρήσεις των εργαλείων δυναμικού χειρισμού, των δυο μεταβολέων. Στόχος μας δεν ήταν να ελέγξουμε ή να επαληθεύσουμε υποθέσεις αλλά αφήσαμε τα δεδομένα να σχηματοποιήσουν τη δομή των αποτελεσμάτων και τη σταδιακή διαλεύκανση των ερευνητικών ζητημάτων υιοθετώντας μια στάση παραγωγής θεωρητικών δομημάτων (Goetz & Lecompte, 1984; Κυνηγός, 2006). Μονάδα ανάλυσης ήταν το επεισόδιο το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα που αφορούσε ενέργειες των μαθητών πάνω σε ένα συγκεκριμένο θέμα.

Αποτελέσματα

Άπειρες διαδικασίες και «κιβωτισμός διαστημάτων»

Μια ομάδα μαθητών πειραματίζονταν με πρώτο στόχο να ανακαλύψουν τον ρόλο των μεταβλητών χ, ψ και κατόπιν την σχέση τους η οποία θα τους βοηθούσε στη διόρθωση του προγράμματος. Οι συγκεκριμένοι μαθητές αρχικά εργάστηκαν με τον απλό μεταβολέα. Είχαν ολισθήσει την παράμετρο χ προς τις μεγαλύτερες τιμές και έκαναν την υπόθεση ότι: καθώς αυξάνουν οι τιμές του χ για να χωρίζεται το ορθογώνιο σε ίσα μέρη έπρεπε να αυξήσουν και την τιμή του ψ. Έτσι, υπέθεσαν, ότι τα ποσά είναι ανάλογα. Αν και στην γενική περίπτωση ο παραπάνω συλλογισμός τους είναι λανθασμένος, οι μαθητές βάζοντας στον ολισθητή του χ την τιμή 5 βρήκαν, σύροντας την ακίδα στον ολισθητή του ψ, ότι σε αυτήν την περίπτωση για να χωρίζεται το ορθογώνιο σε ίσα μέρη πρέπει το ψ να είναι 40. Στο τετράδιό τους γράφουν: *ψ/χ=40/5=8 και άρα ψ=8χ*. Στη συνέχεια τροποποίησαν τον κώδικα στον Logo Editor και αντικατέστησαν την τιμή του ψ με το 8*:χ χωρίς να πειράξουν την μεταβλητή χ. Εκτέλεσαν το πρόγραμμα και παρατήρησαν ότι μόνο για το συγκεκριμένο ζεύγος τιμών το ορθογώνιο χωρίζονταν αυτόματα για όλες τις τιμές του χ σε ίσα μέρη. Προσπαθώντας να βρουν το λάθος τους, δημιούργησαν ένα πίνακα με τις παρακάτω τιμές : (2, 100), (3, 67), (4, 50), (5, 40), τις οποίες βρήκαν χρησιμοποιώντας ξανά τον απλό μεταβολέα. Δεν παρατήρησαν όμως ότι στην περίπτωση του δεύτερου ζευγαριού το σχήμα δεν χωριζόταν ακριβώς σε ίσα μέρη. Στην ερώτηση του ερευνητή αν με βάση τις τιμές που βρήκαν ίσχυε η υπόθεση τους ότι τα ποσά είναι ανάλογα, ένας μαθητής απάντησε:

Μ1: είναι αντίστροφα αφού οι τιμές του χ αυξάνουν και του ψ μειώνονται.

Στην προσπάθειά τους να βρουν τη σχέση των χ και ψ για να διορθώσουν τον κώδικα, υπολόγισαν στο τετράδιό τους το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών και παρατήρησαν ότι το γινόμενο του ζεύγους (3, 67) δεν είναι το ίδιο με τα άλλα (δηλαδή 200). Συζητώντας μεταξύ τους, ο Μ2 συμφώνησε με τα λεγόμενα του Μ1 και φάνηκε να είναι σίγουροι για τη σχέση της αντίστροφης αναλογίας. Ρίχνουν έτσι την ιδέα να δοκιμάσουν τις υποθέσεις τους αλλά τώρα χρησιμοποιώντας τον δυσδιάστατο μεταβολέα (εισάγουν ένα σημείο στον δυσδιάστατο μεταβολέα και το σύρουν έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να χωρίζουν το ορθογώνιο σε ίσα μέρη, Εικόνα 1), (Μ1, Μ2: μαθητές, Ε: ερευνητής)

Μ1: Είναι υπερβολή για όλα τα ζεύγη. Έτσι αντίστροφα ποσά.
Ε: Και ποια είναι η σχέση που ικανοποιούν;
Μ2: Το ίδιο γινόμενο
Ε: Ισχύει αυτό για όλα τα ζεύγη τιμών του πίνακα;
Μ2:όχι.Μάλλον όταν χ=3 το ψ δεν πρέπει να είναι 67.
Ε: Και πόσο είναι το ψ;

Στην ερώτηση του ερευνητή, ο Μ1 κάνει στο τετράδιό του τη διαίρεση του 200 με το 3 και βρίσκει ότι το πηλίκο είναι 66 (αγνοώντας το υπόλοιπο), αλλά τονίζει ότι πάλι το γινόμενο δεν είναι 200. Ο ερευνητής τους προτρέπει να στραφούν στις λειτουργικότητες του περιβάλλοντος. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας ξανά τον απλό μεταβολέα και παρατηρώντας τον τρόπο που μεταβάλλεται το σχήμα στη σκηνή, βλέπουν ότι πράγματι όταν x = 3 και ψ=66 ή ψ=67 το σταθερό ορθογώνιο-πλαίσιο δεν χωρίζεται ακριβώς σε ίσα μέρη.

Μ1: Το ψ δεν είναι 67 αλλά ούτε 66. Αλλά η χελώνα δεν μπορεί να πάει στο 66,5 για να το δοκιμάσω. Προχωράει ανά ένα.

Ο ερευνητής τους εξηγεί τη λειτουργικότητα του απλού μεταβολέα που τους δίνει τη δυνατότητα να αλλάξουν το βήμα της χελώνας. Οι μαθητές πειραματίζονται βάζοντας ως βήμα της χελώνας το ένα δέκατο και ορίζουν ως άκρα στον ολισθητή τις τιμές 66 και 67. Η ανατροφοδότηση του υπολογιστή (βλέποντας το σχήμα στη σκηνή) και υπολογίζοντας το γινόμενο χ*ψ, τους οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι :

Μ2: Σε κάθε περίπτωση, το αποτέλεσμα θα είναι μεταξύ 66.6 και 66.7

Κατόπιν άλλαξαν την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή στο μεταβολέα του ψ σε 66.6 και 66.7 αντίστοιχα και έβαλλαν ως βήμα χελώνας το 0.01. Όπως και παραπάνω παρατήρησαν ότι ο αριθμός που ψάχνουν θα είναι μεταξύ 66.66 και 66.67 και άλλαξαν ξανά το βήμα της χελώνας σε ένα εκατοστό, και κατόπιν σε ένα χιλιοστό.

Μ1: (προς τον ερευνητή) Τι συμβαίνει εδώ τώρα; Συνεχώς πλησιάζουμε!
Μ2:Δεν θα τελειώσουμε ποτέ.

Μετά από λίγο, συνεχίζοντας τους πειραματισμούς με τον ίδιο τρόπο :

Μ1:Είναι όλα εξάρια!

Με τη βοήθεια του απλού μεταβολέα και τη δυνατότητα που τους παρέχει να αλλάζουν το βήμα της χελώνας, οι μαθητές πειραματίστηκαν με στόχο να ανακαλύψουν την τιμή του ψ στην περίπτωση που το χ=3. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές ασχολήθηκαν με την έννοια των δεκαδικών περιοδικών αριθμών, που στη χρονική στιγμή της έρευνας δεν είχαν διδαχτεί. Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τον απλό μεταβολέα και θέτοντας δεκαδικούς αριθμούς ως βήματα χελώνας θεώρησαν τα διαστήματα [66, 67], [66.6, 66.7], [66.66, 66.67], [66,666, 66,667] κ.τ.λ και έφτασαν στο συμπέρασμα *«Συνεχώς πλησιάζουμε. …..Είναι όλα εξάρια».*

Η μαθηματική έννοια με την οποία εργάστηκαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια αυτού του «θεωρήματος εν δράσει» (Vergnaud, 1988) είναι αυτή του 'κιβωτισμού διαστημάτων'. Και αυτό επειδή κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα περιέχει όλα τα επόμενα και τα μήκη τους σχηματίζουν μηδενική ακολουθία, ενώ το όριο των διαστημάτων είναι ο περιοδικός δεκαδικός αριθμός 66.666…. Η έννοια του «θεωρήματος εν δράσει» αναφέρεται στις ενέργειες των μαθητών και παρέχουν ενδείξεις της υπονοούμενης γνώσης μιας τυπικής ιδιότητας των μαθηματικών. Οι μαθητές με τους παραπάνω πειραματισμούς αναγνώρισαν ότι πρόκειται για μια άπειρη διαδικασία *(…Δεν θα τελειώσουμε ποτέ),* αλλά φαίνεται επίσης να διαισθάνονται ότι αυτή η διαδικασία οδηγεί σε έναν συγκεκριμένο αριθμό*(…Είναι όλα εξάρια)*, που από αυστηρά μαθηματικής άποψης είναι το ακριβές όριο ως αποτέλεσμα αυτής της οριακής διαδικασίας.

Ο δεκαδικός περιοδικός αριθμός ως κλάσμα και η διόρθωση του μικρόκοσμου

Το επόμενο επεισόδιο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η παραπάνω ομάδα μαθητών καταλήγει: α) στο συμπέρασμα ότι ένας δεκαδικός περιοδικός αριθμός ισούται με ένα κλάσμα και β) στη διόρθωση του μισοψημένου μικρόκοσμου. Η συναρτησιακή έκφραση της σχέσης μιας μεταβλητής με βάση μια άλλη μεταβλητή υπήρξε για πολλούς μαθητές μια δύσκολη μορφή συσχέτισης. Αυτό φάνηκε ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που προσπαθούσαν να επιβεβαιώσουν τη σχέση για όλες τις τιμές των μεταβλητών αφού τα εμπλεκόμενα αριθμητικά μεγέθη δεν έδιναν πάντα ακέραια πηλίκα αλλά και δεκαδικούς περιοδικούς αριθμούς.

Στην ερώτηση του ερευνητή πόσο είναι το ψ για χ =3, ο Μ2 φαίνεται να είναι διστακτικός με τα λεγόμενα του Μ1, δηλ. *'όλα εξάρια'* [εννοώντας 66,666…] και γράφει στο τετράδιο: *3*66.66666 (πολλά εξάρια) =200 άρα 66.66666 (πολλά εξάρια) =200/3*. Κατόπιν κάνει την διαίρεση του 200 με το 3 και 'επιβεβαιώνει' ότι *«και η διαίρεση βγάζει το ίδιο αποτέλεσμα με πολλά εξάρια»*.

Στην παραπάνω περίπτωση ο Μ2 δεν ικανοποιείται από το γεγονός ότι 66.66666…=200/3 και συνεχίζει το συλλογισμό του κάνοντας και τη διαίρεση του 200 με το 3 . Φαίνεται ότι τη συμμετρικότητα της ισότητας α=β στη συγκεκριμένη περίπτωση να μη τη θεωρεί έγκυρη. Στην ερώτηση του ερευνητή γιατί κάνει και τη διαίρεση αφού βρήκε ότι 66.6666…=200/3, ο μαθητής απαντάει:

> *Μ2: Δεν είναι σίγουρο ότι θα ισχύει και το ανάποδο* [εννοεί το αντίστροφο]

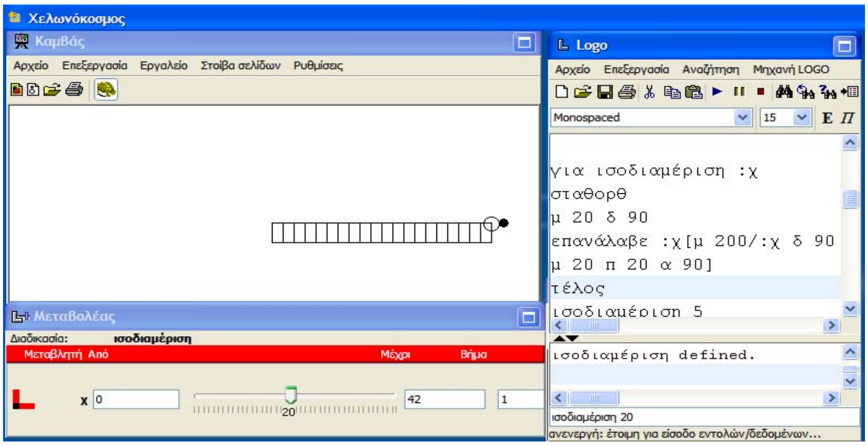
Στη συνέχεια αποφάσισαν να διορθώσουν τον πίνακα τιμών που είχαν φτιάξει αντικαθιστώντας το ζεύγος (3,67) με το ζεύγος (3,200/3):

> *Μ2: «έτσι τώρα όλα τα γινόμενα είναι 200».*

Στην ερώτηση του ερευνητή για το πως θα επιτευχθεί η διόρθωση του μικρόκοσμου, ο ένας μαθητής λέει:

> *Μ1: Είπαμε ότι έχουν το ίδιο γινόμενο, άρα θα είναι χ*ψ=200, και να την λύσουμε ως προς το ψ .*

Κατόπιν τροποποίησαν τον κώδικα στον Logo Editor αντικαθιστώντας την τιμή του ψ με το 200/χ, όπως φαίνεται στην Σχήμα 2.



Σχήμα 2. Ο διορθωμένος μικρόκοσμος «ισοδιαμέριση»

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα που παραθέσαμε αναφέρονται μόνο σε ένα ζεύγος μαθητών και κατά συνέπεια δεν επιδέχονται γενίκευση. Επιβεβαιώνουν όμως και άλλα ερευνητικά αποτελέσματα σύμφωνα με τα οποία σε μαθησιακές δραστηριότητες για τη δημιουργία μαθηματικών νοημάτων, οι μαθητές ασχολούνται με ένα πλήθος εννοιών οι οποίες δεν μπορούν να καθοριστούν από την αρχή (Κυνηγός, 2006). Στην παρούσα έρευνα η έννοια της αντίστροφης αναλογίας φάνηκε να αποτελεί τον πυρήνα γύρω από τον οποίο οι μαθητές δημιούργησαν ένα αριθμό νοημάτων χρησιμοποιώντας τα συμβολικά, γραφικά και τα εργαλεία μεταβολής του χελωνόκοσμου. Σημαντικές μαθηματικές έννοιες που συνδέονται με την έννοια της αντίστροφης αναλογίας όπως η έννοια του απείρου, των δεκαδικών περιοδικών αριθμών, των κλασμάτων και των οριακών διαδικασιών συνήθως δεν συμπεριλαμβάνονται στη μαθηματική δραστηριότητα γύρω από την έννοια των αντιστρόφως ανάλογων ποσών. Στην παρούσα έρευνα ωστόσο οι μαθητές δημιούργησαν νοήματα για τις παραπάνω έννοιες που μπορεί να φαίνονται ότι δεν έχουν σχέση με την αντίστροφη αναλογία αλλά το περιβάλλον που χρησιμοποιήθηκε και ο μισοψημένος μικρόκοσμος που σχεδιάστηκε τις κατέστησαν σχετικές.

Ένα επίσης σημαντικό εύρημα αυτής της μελέτης είναι ότι οι μαθητές με τη χρήση των λειτουργικοτήτων του χελωνόκοσμου εμφανίζονται όχι μόνο να διαισθάνονται ότι η διαδικασία του κιβωτισμού των διαστημάτων είναι άπειρη αλλά και να καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι αυτή η διαδικασία οδηγεί σε έναν συγκεκριμένο αριθμό. Γεγονός που έρχεται, εν μέρει, σε αντίθεση με τα ευρήματα του Fischbein (1978). Στη μελέτη του Fischbein ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών έδειξε να αντιλαμβάνεται ότι παρόμοιες διαδικασίες μπορεί μεν να είναι άπειρες αλλά δεν μπορούν να έχουν αποτέλεσμα έναν συγκεκριμένο αριθμό.

Χαρακτηριστικό είναι επίσης και το εξής: μερικές ομάδες μαθητών, στην προσπάθειά τους να ανακαλύψουν τη σχέση των δυο μεταβλητών ώστε το ορθογώνιο μήκους 200 μονάδων να χωρίζεται σε ίσα μέρη, αγνοούσαν τις περιπτώσεις όπου ο αριθμός των ορθογωνίων δεν ήταν διαιρέτης του 200 (ιδιαίτερα στην περίπτωση που το χ είναι 3), αφού όπως έλεγαν δεν τους «βόλευε» ή να στρογγυλοποιούν τους εμφανιζόμενους δεκαδικούς περιοδικούς αριθμούς. Έτσι καταλήγανε σε συμπεράσματα μόνο από συγκεκριμένα ζεύγη αριθμών που ικανοποιούσαν τις υποθέσεις τους χωρίς να λαμβάνουν υπόψη ότι στη διαδικασία γενίκευσης έπρεπε όλες οι τιμές να ικανοποιούν μια συγκεκριμένη σχέση. Η ανακάλυψη και χρήση όμως του τύπου y=k/x που απαιτούνταν για να διορθωθεί το πρόγραμμα και η χρήση του λογισμικού για έλεγχο των υποθέσεων, τους βοήθησε να τροποποιήσουν τις αρχικές υποθέσεις τους. Έτσι, οι μαθητές αύξησαν τη βάση των πειραματισμών τους από τους οποίους μπορούσαν να κάνουν γενικεύσεις και τροποποίησαν τις γνώσεις τους σχετικά με το ότι «όταν δυο ποσά αυξάνουν έχουμε ευθεία αναλογία και όταν το ένα αυξάνει και το άλλο μειώνετε έχουμε αντιστρόφως ανάλογα ποσά», και όταν κάνουμε γενικεύσεις αυτό το αποτέλεσμα θα πρέπει να εφαρμόζετε για όλα τα ζεύγη τιμών.

Αναφορές

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education, *Proceedings of the 2nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148-176). Osnabruck.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research.* Academic Press, London.

Hoyles, C., & Noss, R. (1989). The computer as a catalyst in children's proportion strategies. *Journal of Mathematical Behavior,* 8, 53-75.

Kafai, Y., & Resnick, M. (eds.) (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking and learning in a digital world.* Lawrence Erlbaum Publishers, Mahwah.

Kynigos, C. (2007). Half-baked Logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education*, 6(2), 1–24.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Olive, J., & Lobato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. In K. Heid & G. Blume (eds.), *Research on technology in the teaching and learning of mathematics: Volume I. Research syntheses.* Information Age Publishing, Inc.

Psycharis, G., & Kynigos, C. (2004). Normalising geometrical constructions: A context for generation of meaning for ratio and proportion. *Proceedings of the 28h PME Conference* (Vol. 4, pp. 65-72). Bergen, Norway.

Psycharis, G., Latsi M., & Kynigos C. (2007). Meanings for fraction as number-measure by exploring the number line. *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1499-1508). Larnaka, Cyprus.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.* Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη.* Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.