Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2011)

2ο Πανελλήνιο Συνέδριο: «Ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Ένα διαδικτυακό παιχνίδι ως περιβάλλον επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων από μαθητές των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού

Α. Κολοβού , M. Van den Heuvel-Panhuizen

Ένα διαδικτυακό παιχνίδι ως περιβάλλον επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων από μαθητές των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού

Α. Κολοβού[1], M. van den Heuvel-Panhuizen[2]

Freudenthal Institute of Science and Mathematics Education, Utrecht University
[1]a.kolovou@uu.nl, [2]m.vandenheuvel-panhuizen@uu.nl

Περίληψη

Η εργασία αυτή περιγράφει μια έρευνα γύρω από τη δραστηριότητα μαθητών Δ΄, Ε΄και Στ΄Δημοτικού με ένα διαδικτυακό παιχνίδι τοξοβολίας. Οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν μια σειρά προβλημάτων με συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές με τη βοήθεια του παιχνιδιού στο σπίτι. Πιο συγκεκριμένα, η εργασία διερευνά τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές χρησιμοποίησαν το περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή και τις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος που εφάρμοσαν. Τα αποτελέσματα της έρευνας κατέδειξαν ότι η διαδικτυακή δραστηριότητα σχετίζεται με την επιτυχημένη επίλυση προβλημάτων στην τελική δοκιμασία. Επιπλέον, το περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή ενθάρρυνε την εφαρμογή στρατηγικών και προσέφερε στους μαθητές την ευκαιρία να διερευνήσουν τη δομή των προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά: *πρώιμη άλγεβρα, διαδικτυακό παιχνίδι, στρατηγικές επίλυσης προβλήματος*.

1. Εισαγωγή

Η διδασκαλία των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο εστιάζεται κυρίως στην ανάπτυξη αριθμητικών εννοιών και υπολογιστικών δεξιοτήτων. Ωστόσο, διάφοροι ερευνητές (π.χ. Goldenberg, Shteingold, & Feurzeig, 2003) επισημαίνουν ότι τα μαθηματικά περιλαμβάνουν τρόπους σκέψης όπως η αναζήτηση και διερεύνηση μοτίβων, η διατύπωση και έλεγχος υποθέσεων και η εφαρμογή ευρετικών, η ανάπτυξη των οποίων πρέπει να αποτελεί βασικό μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο. Παρόμοια, οι Kaput, Carraher και Blanton (2007) προτείνουν οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης να εμπλέκονται σε αλγεβρικές δραστηριότητες μέσω των οποίων τους δίνεται η ευκαιρία να αναπτύξουν βασικές αλλά και πιο πολύπλοκες δεξιότητες συλλογισμού, όπως η διατύπωση γενικεύσεων. Με την ενσωμάτωση της αλγεβρικής σκέψης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση τα σχολικά μαθηματικά αποκτούν μεγαλύτερη συνοχή και οι μαθητές προετοιμάζονται για τη μελέτη της άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Kaput, 2007).

Η εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση δε συνεπάγεται την προσθήκη της τυπικής άλγεβρας στο αναλυτικό πρόγραμμα του Δημοτικού σχολείου. Η ανάπτυξη πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (early algebraic reasoning) μπορεί να επιτευχθεί μέσω δραστηριοτήτων οι οποίες διαπραγματεύονται έννοιες που ήδη περιλαμβάνονται στο αναλυτικό πρόγραμμα με ένα πιο βαθύ και συνεκτικό τρόπο

(Kaput et al., 2007). Για παράδειγμα, δραστηριότητες με μοτίβα μπορούν να στηρίξουν τη διατύπωση γενικών κανόνων και την κατανόηση συναρτησιακών σχέσεων (NCTM, 2000). Ειδικότερα, οι Carraher και Schliemann (2007) τονίζουν το ρόλο τον οποίο παίζει το πλαίσιο του μαθηματικού προβλήματος στην παραγωγή αφηρημένης γνώσης μέσα από εμπειρίες και μελέτη συγκεκριμένων καταστάσεων.

Παρόλο που πίνακες (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2001) και 'συναρτησιακές μηχανές' (Warren, Cooper, & Lamb, 2006) έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, οι νέες τεχνολογίες μπορούν να προσφέρουν περισσότερες δυνατότητες για την κατανόηση αλγεβρικών εννοιών όπως η συμμεταβολή μεγεθών. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές μπορούν να εκτελέσουν γρήγορα υπολογισμούς δίνοντας την ευκαιρία στους μαθητές να εστιάσουν στη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ αριθμών και ποσοτήτων. Επιπλέον, τεχνολογικά εργαλεία μπορούν να ξεπεράσουν τους περιορισμούς στατικών μέσων παρέχοντας δυναμικές αναπαραστάσεις και άμεση ανατροφοδότηση (Roschelle, Pea, Hoadley, Gordin, & Means, 2000).

Σε αυτή τη μελέτη δόθηκε σε μαθητές Δημοτικού ένα διαδικτυακό περιβάλλον που περιλαμβάνει ένα παιχνίδι με το οποίο οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να λύσουν προβλήματα με συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές (αλγεβρικά προβλήματα). Συγκεκριμένα, επιδιώξαμε να απαντήσουμε τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

1. *Πώς μαθητές των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού επιλύουν αλγεβρικά προβλήματα σε ένα διαδικτυακό περιβάλλον;*

2. *Πώς η διαδικτυακή δραστηριότητα επηρεάζει την επίδοση των μαθητών σε μια γραπτή δοκιμασία με αλγεβρικά προβλήματα;*

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Άλγεβρα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση

Σύμφωνα με την Kieran (2004) η αλγεβρική σκέψη μπορεί να καλλιεργηθεί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μέσα από μαθηματικές δραστηριότητες, οι οποίες έχουν νόημα για τους μαθητές και για τις οποίες δεν είναι απαραίτητη η χρήση συμβολικής άλγεβρας, όπως η επίλυση προβλημάτων, η διατύπωση γενικεύσεων, η ανάλυση σχέσεων και η μελέτη μεταβολών. Παρόμοια, η Van Amerom υποστηρίζει ότι μέσω της επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν αλγεβρική σκέψη πριν τη διδασκαλία της συμβολικής άλγεβρας. Άτυπες στρατηγικές όπως δοκιμή και λάθος μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα (Johanning, 2004).

2.2 Θεωρία της διαφοροποίησης

Σύμφωνα με τη θεωρία της διαφοροποίησης (variation theory) ο τρόπος με τον οποίο βιώνουμε ένα φαινόμενο είναι καθοριστικός για τη μάθηση (Runesson, 2005). Οι διαφορετικοί τρόποι δε με τους οποίους μπορούμε να βιώσουμε ένα φαινόμενο εξαρτώνται από το ποια χαρακτηριστικά του φαινομένου είμαστε σε θέση να διακρίνουμε ταυτόχρονα. Διαφοροποιήσεις σε ορισμένα χαρακτηριστικά ενός φαινομένου επιτρέπουν τη διάκρισή τους και κατ' επέκταση τη μάθηση αυτού του φαινομένου (Marton & Tsui, 2004). Ειδικότερα, η διάκριση διαφοροποιήσεων παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης καθώς η διατύπωση γενικών κανόνων προϋποθέτει την αντιδιαστολή των χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται από αυτά που παραμένουν αμετάβλητα. Σύμφωνα με τους Watson και Mason (2006), μαθηματικές δραστηριότητες που εμπεριέχουν συστηματική διαφοροποίηση μπορούν να στηρίξουν τους μαθητές στον εντοπισμό κανονικοτήτων και τη διατύπωση γενικεύσεων.

2.3 Ο ρόλος των ΤΠΕ στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών

Η τεχνολογία επηρεάζει όχι μόνο το πώς αλλά και το πότε οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να διδαχτούν. Τεχνολογικά εργαλεία καθιστούν δυνατή την πρόσβαση σε ισχυρές οπτικές αναπαραστάσεις και τη γρήγορη εκτέλεση υπολογισμών, επιτρέποντας έτσι πιο πολύπλοκες νοητικές διαδικασίες όπως η κατασκευή μοντέλων (NCTM, 2000). Ειδικότερα, περιβάλλοντα προσομοίωσης προσφέρουν την ευκαιρία στους μαθητές να διερευνήσουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών (NCTM, 2000). Παρόμοια, ο Nathan (1998) έδειξε ότι ένα δυναμικό περιβάλλον μπορεί να συμβάλλει στην επιτυχημένη επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Σε αυτή την έρευνα καθοριστικό ρόλο θεωρείται ότι έπαιξε το είδος της ανατροφοδότησης που λαμβάνουν οι μαθητές. Κατά τη διαδικασία επίλυσης οι μαθηματικές εκφράσεις που εισάγουν οι μαθητές θέτουν σε κίνηση την εικονική αναπαράσταση της κατάστασης η οποία περιγράφεται στο πρόβλημα κι έτσι οι μαθητές ελέγχουν και τροποποιούν –αν χρειαστεί– τις λύσεις τους.

3. Μέθοδος

3.1 Διαδικασία

Ο ρόλος του διαδικτυακού παιχνιδιού στην επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων διερευνήθηκε μέσω μιας πειραματικής διαδικασίας με αρχική και τελική δοκιμασία. Στην αρχή δόθηκε στους μαθητές μια γραπτή δοκιμασία με αλγεβρικά προβλήματα στο σχολείο. Στη συνέχεια κάθε μαθητής έλαβε ένα μοναδικό όνομα χρήστη και ένα συνθηματικό για να συνδεθεί στο διαδικτυακό περιβάλλον από το σπίτι. Οι μαθητές δούλεψαν στο διαδικτυακό περιβάλλον εθελοντικά για τρεις εβδομάδες με τρία σετ προβλημάτων (συνολικά οχτώ προβλήματα). Οι μαθητές είχαν μια εβδομάδα στη διάθεσή τους για να λύσουν κάθε σετ προβλημάτων και στο τέλος κάθε εβδομάδας παρουσίαζαν τις λύσεις τους στην τάξη. Μετά το πέρας της ερευνητικής παρέμβασης μια τελική γραπτή δοκιμασία με αλγεβρικά προβλήματα έλαβε μέρος στο σχολείο. Η αρχική και η τελική γραπτή δοκιμασία περιείχαν τα ίδια ακριβώς προβλήματα.

3.2 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα κλήθηκαν να συμμετάσχουν 318 μαθητές Δ΄, Ε΄ και Στ΄ δημοτικού από πέντε σχολεία σε πέντε διαφορετικές περιοχές ενός αστικού κέντρου στην Ολλανδία. Οι μαθητές αυτοί ανήκαν σε διαφορετικά κοινωνικο-οικονομικά περιβάλλοντα.

3.3 Γραπτή δοκιμασία

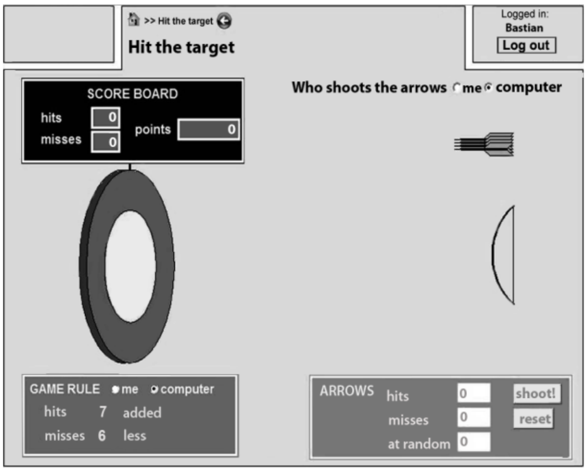
Η γραπτή δοκιμασία αποτελούνταν από επτά προβλήματα με συμμεταβαλλόμενες ποσότητες, όπως το παρακάτω:

Σε ένα παιχνίδι γνώσεων κερδίζεις δύο πόντους για κάθε σωστή απάντηση. Αν δε δώσεις απάντηση ή απαντήσεις λάθος ένας πόντος αφαιρείται από το σκορ σου. Το παιχνίδι περιλαμβάνει 10 ερωτήσεις. Το σκορ της Ιωάννας είναι 8 πόντοι. Πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά η Ιωάννα;

Τα προβλήματα αυτά μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση συμβολικής άλγεβρας ή την εφαρμογή μιας αριθμητικής προσέγγισης όπου βασικό ρόλο παίζει η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων του προβλήματος. Επειδή στην Ολλανδία η συμβολική άλγεβρα εισάγεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αναμέναμε ότι οι μαθητές σε αυτή την έρευνα μπορούσαν να εφαρμόσουν μόνο αριθμητικές προσεγγίσεις.

3.4 Το διαδικτυακό περιβάλλον

Το περιβάλλον το οποίο αναπτύξαμε για να προσφέρουμε στους μαθητές εμπειρίες με συμμεταβαλλόμενες μεταβλητές περιλαμβάνει μια προσομοίωση ενός παιχνιδιού τοξοβολίας, το *Πέτυχε το στόχο*[1] (Εικόνα 1). Ο αριθμός των βελών (εύστοχα και άστοχα βέλη) ο κανόνας του παιχνιδιού (πόντοι ανά εύστοχη βολή και πόντοι ανά άστοχη βολή) και το σκορ συνδέονται δυναμικά· κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού οι μαθητές μπορούν να παρακολουθήσουν στον πίνακα με το σκορ πώς ο αριθμός των επιτυχημένων και αποτυχημένων βολών και το σκορ συμμεταβάλλονται. Με αυτό τον τρόπο δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να επισημάνουν ότι ο αριθμός των βελών, ο κανόνας του παιχνιδιού και το σκορ σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους· οποιαδήποτε αλλαγή σε μια από αυτές τις μεταβλητές έχει άμεση επίδραση στις άλλες μεταβλητές. Επιπλέον, το παιχνίδι προσφέρει άμεση ανατροφοδότηση στους μαθητές παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα των ενεργειών τους.



Εικόνα 1: *Οθόνη παιχνιδιού*

Τα προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές για να λύσουν στο διαδικτυακό περιβάλλον ποικίλλαν από την αναζήτηση του αριθμού των εύστοχων και άστοχων βολών που παράγουν ένα δεδομένο σκορ στην αναζήτηση μιας γενικής λύσης συστηματοποιώντας όλες τις πιθανές απαντήσεις. Τέσσερα από αυτά τα προβλήματα είναι τα παρακάτω:

Πρόβλημα 3: Ποιος είναι ο κανόνας του παιχνιδιού για να κερδίσεις 15 πόντους με 15 εύστοχες και 15 άστοχες βολές; Υπάρχουν άλλοι κανόνες για να πάρεις το αποτέλεσμα 15 εύστοχες βολές, 15 άστοχες βολές, 15 πόντοι;

Πρόβλημα 4: Ποιος είναι ο κανόνας του παιχνιδιού για να κερδίσεις 16 πόντους με 16 εύστοχες και 16 άστοχες βολές; Υπάρχουν άλλοι κανόνες για να πάρεις το αποτέλεσμα 16 εύστοχες βολές, 16 άστοχες βολές, 16 πόντοι;

Πρόβλημα 5: Ποιος είναι ο κανόνας του παιχνιδιού για να κερδίσεις 100 πόντους με 100 εύστοχες και 100 άστοχες βολές; Υπάρχουν άλλοι κανόνες για να πάρεις το αποτέλεσμα 100 εύστοχες βολές, 100 άστοχες βολές, 100 πόντοι; Μπορείς να εξηγήσεις την απάντησή σου;

Πρόβλημα 8: Για κάθε εύστοχη βολή κερδίζεις 2 πόντους και για κάθε άστοχη βολή 1 πόντος αφαιρείται από το σκορ σου. Έχεις συνολικά 10 βέλη. Πόσες εύστοχες και πόσες άστοχες βολές πρέπει να ρίξεις για να κερδίσεις 5 πόντους; Υπάρχουν άλλες λύσεις;

Στόχος αυτών των προβλημάτων ήταν να στηρίξουν τους μαθητές στον εντοπισμό κανονικοτήτων και στη διατύπωση γενικεύσεων και να τους εμπλέξουν σε καταστάσεις όπου πολλαπλές συνθήκες πρέπει να λαμβάνονται ταυτόχρονα υπόψη. Η διαφοροποίηση των τιμών στα προβλήματα είχε ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να συλλάβουν τη δομή του προβλήματος η οποία παραμένει αμετάβλητη ανεξάρτητα από το γεγονός ότι οι συγκεκριμένες τιμές μπορούν να μεταβάλλονται. Το διαδικτυακό περιβάλλον προσέφερε την ευκαιρία στους μαθητές να λύσουν αυτά τα προβλήματα μέσα από έλεγχο υποθέσεων και άμεση ανατροφοδότηση. Επιπλέον, ειδικό λογισμικό, το *Digital Mathematics Environment (DME)*[2], κατέγραψε τη δραστηριότητα των μαθητών (Εικόνα 2). Ένα σχήμα για την κωδικοποίηση των στρατηγικών αναπτύχθηκε σε διαδοχικές φάσεις. Στη συνέχεια, σε κάθε συμβάν δόθηκε ένας κωδικός για το πρόβλημα το οποίο ο μαθητής προσπάθησε να απαντήσει και ένας ή περισσότεροι κωδικοί για τις στρατηγικές που χρησιμοποίησε.

4. Αποτελέσματα

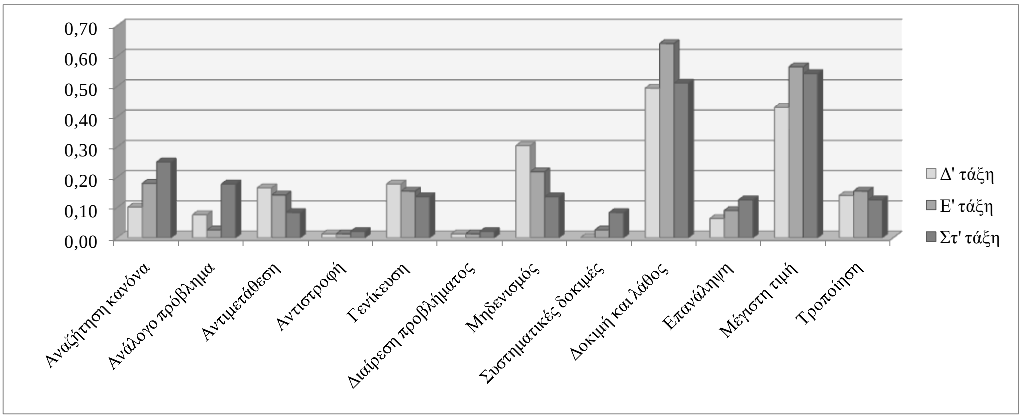
Από το σύνολο των μαθητών, 253 συνδέθηκαν στο διαδικτυακό περιβάλλον έστω για μία φορά. Οι συχνότητες των συνδεδεμένων μαθητών στη Δ΄, Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού ήταν 74%, 88% και 78% αντίστοιχα. Οι συνδεμένοι μαθητές δε διέφεραν στην αρχική επίδοση από τους μη συνδεδεμένους μαθητές: $t(113.527)=1.72$, $p>.05$. Επίσης το ποσοστό των συνδεμένων αγοριών και κοριτσιών ήταν παρόμοιο (78% και 81% αντίστοιχα). Οι στατιστικές αναλύσεις που σχετίζονται με την επίδοση των μαθητών στη γραπτή δοκιμασία είναι βασισμένες στους 232 μαθητές που έλαβαν μέρος και στην αρχική και στην τελική δοκιμασία. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει το σκορ στην αρχική και τελική δοκιμασία, το χρόνο σύνδεσης, τον αριθμό συμβάντων, τον αριθμό στοχευμένων συμβάντων (συμβάντα στοχευμένα στην απάντηση των προβλημάτων) και το ποσοστό των στοχευμένων συμβάντων (λόγος στοχευμένων συμβάντων προς συμβάντα) και τον αριθμό των προβλημάτων που επιχείρησαν να λύσουν οι μαθητές στο διαδικτυακό περιβάλλον ανά τάξη. Η διαφορά μεταξύ της τελικής και αρχικής δοκιμασίας είναι στατιστικά σημαντική σε όλες τις τάξεις με μικρά προς μεσαία μεγέθη επίδρασης (Δ΄ τάξη: $t(74)=2.46$, $p<.05$, $d=.16$, Ε΄τάξη: $t(72)=3.17$, $p<.01$, $d=.24$, Στ΄τάξη: $t(83)=5.19$, $p<.001$, $d=.43$). Οι τυπικές αποκλίσεις φανερώνουν διαφοροποιήσεις στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποίησαν το διαδικτυακό περιβάλλον. Οι μαθητές της Ε΄ τάξης υπερτερούν σε όλα τα χαρακτηριστικά της διαδικτυακής δραστηριότητας.

Πίνακας 1: *Αρχική και τελική επίδοση και χαρακτηριστικά διαδικτυακής δραστηριότητας*

	Δ΄ τάξη (*N*=75)		Ε΄ τάξη (*N*=73)		Στ΄ τάξη (*N*=84)	
	M	ΤΑ	*M*	ΤΑ	*M*	ΤΑ
Αρχική δοκιμασία*	.06	.14	.23	.26	.38	.30
Τελική δοκιμασία*	.11	.20	.30	.33	.48	.36
Χρόνος σύνδεσης (λεπτά)	35.70	41.63	25.75	18.69	32.22	54.46
Συμβάντα	17.04	14.77	17.81	13.12	13.34	9.90
Στοχευμένα συμβάντα	5.68	7.61	9.60	8.15	7.48	8.07
% στοχευμένα συμβάντα	.27	.27	.51	.31	.46	.34
Προβλήματα	3.10	3.82	4.92	3.71	4.46	3.91

**ποσοστό σωστών απαντήσεων*

Οι μαθητές εφάρμοσαν μια ποικιλία στρατηγικών κατά τη λύση των προβλημάτων (Γράφημα 1). Η πιο δημοφιλής στρατηγική ήταν η *δοκιμή και λάθος* (49%–64% των μαθητών). Ένα υψηλό ποσοστό μαθητών (43%–58%) εφάρμοσε τη στρατηγική της *μέγιστης τιμής*· μηδενίζοντας μία από τις μεταβλητές (π.χ. 0 πόντοι ανά άστοχη βολή) η άλλη μεταβλητή (πόντοι ανά εύστοχη βολή) μπορεί να λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή.



Γράφημα 1: *Σχετικές συχνότητες εφαρμογής στρατηγικών*

Στρατηγικές όπως *ανάλογο πρόβλημα* (π.χ., ρίψη 10 εύστοχων και 10 άστοχων βολών στο *Πρόβλημα 5*), *αντιμετάθεση* (αντιμετάθεση των τιμών των εύστοχων και άστοχων βολών με τις τιμές του κανόνα του παιχνιδιού), *διαίρεση προβλήματος* σε υποπροβλήματα (π.χ., πρώτα ρίψη 100 εύστοχων και 0 άστοχων βολών, κατόπιν 0 εύστοχων και 100 άστοχων βολών και πρόσθεση των μερικών σκορ για να υπολογιστεί το συνολικό σκορ στο *Πρόβλημα 5*) χρησιμοποιήθηκαν λιγότερο συχνά. Η εφαρμογή αυτών των στρατηγικών ενθαρρύνεται από το γεγονός ότι ο μέγιστος αριθμός (εύστοχων και άστοχων) βολών ανά ρίψη δε μπορεί να είναι μεγαλύτερος από 150 βολές. Εξαιτίας αυτού του περιορισμού, το *Πρόβλημα 5* μπορεί να λυθεί στο διαδικτυακό περιβάλλον με την εφαρμογή μίας από αυτές τις τρεις στρατηγικές.

Στρατηγικές όπως *δοκιμή και λάθος, επανάληψη* της σωστής λύσης, *μέγιστη τιμή* και *τροποποίηση* στοιχείων του προβλήματος δείχνουν ότι ο μαθητής είναι περισσότερο επικεντρωμένος στην αναζήτηση της (σωστής) απάντησης. Αντίθετα, η χρήση στρατηγικών όπως *αναζήτηση κανόνα*, *ανάλογο πρόβλημα*, *αντιμετάθεση*, *αντιστροφή* (ο μαθητής αντιστρέφει τις τιμές μιας σωστής απάντησης π.χ. τους πόντους ανά εύστοχη βολή και τους πόντους ανά άστοχη βολή), *γενίκευση* (εφαρμογή γενικού κανόνα), *μηδενισμός* του σκορ (όταν το άθροισμα των μερικών σκορ είναι ίσο με 0) και *συστηματικές δοκιμές* συνιστά ένδειξη της διερεύνησης της δομής των προβλημάτων.

Επιπλέον, διακρίναμε τρία επίπεδα διαδικτυακής δραστηριότητας: ελεύθερη δραστηριότητα, αναζήτηση απαντήσεων και διερεύνηση δομής προβλημάτων (Πίνακας 2). Το πρώτο επίπεδο περιλαμβάνει τους μαθητές που κατέβαλαν ελάχιστη ή καθόλου προσπάθεια για τη λύση των προβλημάτων (λιγότερα από τρία στοχευμένα συμβάντα ή λιγότερα από τρία προβλήματα). Το δεύτερο επίπεδο περιλαμβάνει τους μαθητές των οποίων η δραστηριότητα ξεπέρασε το όριο της ελάχιστης προσπάθειας και οι οποίοι στόχευαν κατά κύριο λόγο στην αναζήτηση απαντήσεων όπως φανερώνει το είδος των στρατηγικών που εφάρμοσαν. Το τρίτο επίπεδο περιλαμβάνει τους μαθητές που ξεπέρασαν το όριο ελάχιστης προσπάθειας και χρησιμοποίησαν στρατηγικές οι οποίες υποδηλώνουν τη διερεύνηση της δομής των προβλημάτων.

Πίνακας 2. *Ποσοστά μαθητών που εφάρμοσαν τα τρία επίπεδα δραστηριότητας*

	Δ΄ τάξη	Ε΄ τάξη	Στ΄ τάξη	Σύνολο
Ελεύθερη δραστηριότητα (επίπεδο 1)	60.8	29.5	39.6	43.1
Αναζήτηση απαντήσεων (επίπεδο 2)	12.7	41.0	28.1	27.3
Διερεύνηση δομής (επίπεδο 3)	26.6	29.5	32.3	29.6

Το υψηλότερο ποσοστό των μαθητών που επιδόθηκαν σε ελεύθερη δραστηριότητα παρατηρήθηκε στη Δ΄ τάξη, ενώ η πλειονότητα των μαθητών της Ε΄ τάξης κατατάσσεται στο επίπεδο της αναζήτησης απαντήσεων. Μικρή αύξηση παρατηρείται από τάξη σε τάξη στο ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στο επίπεδο της διερεύνησης της δομής των προβλημάτων. Στη συνέχεια μελετήσαμε με μια ανάλυση συνδιακύμανσης (ANCOVA) την επίδραση των επιπέδων διαδικτυακής δραστηριότητας στην τελική επίδοση λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της αρχικής επίδοσης. Στη Δ΄τάξη το επίπεδο δραστηριότητας είχε στατιστικά σημαντική επίδραση στην τελική δοκιμασία, F(2, 71)=3.46, *p*<.05. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε αύξηση στην τελική επίδοση μεταξύ των επίπεδων 1 και 2 και των επιπέδων 2 και 3. Επιπλέον, η διαφορά μεταξύ των επιπέδων 1 και 3 ήταν στατιστικά σημαντική (*p*<.05), ενώ η διαφορά μεταξύ των επιπέδων 1 και 2 δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Στην Ε΄τάξη η επίδραση του επιπέδου δραστηριότητας δεν ήταν στατιστικά σημαντική, *F*(2, 69)=.54, *p* =.583. Στη Στ΄τάξη το επίπεδο δραστηριότητας είχε στατιστικά σημαντική επίδραση στην τελική δοκιμασία, *F*(2, 80)=4.82, *p*<.05. Η μεγαλύτερη όμως αύξηση στην επίδοση παρατηρήθηκε στο επίπεδο 2 παρά στο επίπεδο 3. Η διαφορά μεταξύ των επιπέδων 1 και 2 ήταν στατιστικά σημαντική, όχι όμως και η διαφορά μεταξύ των επιπέδων 1 και 3.

Η Εικόνα 2 παρουσιάζει τη δραστηριότητα μιας μαθήτριας που οδήγησε στην ανακάλυψη του γενικού κανόνα. Η μαθήτρια βρήκε μία λύση στο *Πρόβλημα 3* μέσα από *δοκιμή και λάθος*. Στη συνέχεια, στο *Πρόβλημα 4* κατέληξε στο γενικό κανόνα (το άθροισμα των πόντων ανά εύστοχη βολή και των πόντων ανά άστοχη βολή είναι ίσο με 1), τον οποίο εφάρμοσε στη λύση του *Προβλήματος 5*.

σύνδεση: 1 ημερομηνία: 2008/11/17 04:13:58 διάρκεια: 00:05:59 συμβάντα: 2
συμβάν: 1
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 15 άστοχες βολές: 15 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 2 (εύστοχες βολές: 2 άστοχες βολές: 1)
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 4 περισσότερα άστοχη βολή: 2 λιγότερα
συμβάν: 2
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 15 άστοχες βολές: 15 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 1 περισσότερα άστοχη βολή: 1 λιγότερα
σύνδεση: 2 ημερομηνία: 2008/11/17 04:20:43 διάρκεια: 00:02:52 συμβάντα: 1
συμβάν: 1
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 15 άστοχες βολές: 15 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 5 περισσότερα άστοχη βολή: 4 λιγότερα
Πρόβλημα 3
σύνδεση: 3 ημερομηνία: 2008/11/25 04:02:24 διάρκεια: 00:36:03 συμβάντα: 6
συμβάν: 1
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 16 άστοχες βολές: 16 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 2 περισσότερα άστοχη βολή: 1 λιγότερα
συμβάν: 2
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 16 άστοχες βολές: 16 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 3 περισσότερα άστοχη βολή: 2 λιγότερα
συμβάν: 3
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 16 άστοχες βολές: 16 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 32 (εύστοχες βολές: 16 άστοχες βολές: 16)
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 100 περισσότερα άστοχη βολή: 99 λιγότερα
Πρόβλημα 4
συμβάν: 4
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 10 άστοχες βολές: 10 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 2 περισσότερα άστοχη βολή: 1 λιγότερα
συμβάν: 5
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 10 άστοχες βολές: 10 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 1000 περισσότερα άστοχη βολή: 999 λιγότερα
συμβάν: 6
ρίψη βελών: υπολογιστής εύστοχες βολές: 10 άστοχες βολές: 10 τυχαίες βολές: 0 απομακρυσμένες: 0
κανόνας παιχνιδιού: μαθητής εύστοχη βολή: 50 περισσότερα άστοχη βολή: 49 λιγότερα
Πρόβλημα 5

Εικόνα 2: *Αρχείο διαδικτυακής δραστηριότητας μαθητή*

4. Συζήτηση

Η μελέτη αυτή διερεύνησε τον τρόπο με τον οποίο ένα μαθησιακό περιβάλλον, το οποίο αποτελείται από ένα παιχνίδι ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου οι μαθητές μπορούν να βιώσουν τη συμμεταβολή μεγεθών και μια σειρά προβλημάτων όπου οι τιμές των ποσοτήτων διαφοροποιούνται συστηματικά, συμβάλλει στην επίλυση προβλημάτων με συμμεταβαλόμενες μεταβλητές. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι, παρόλο που η παρέμβαση ήταν σύντομη, η διαδικτυακή δραστηριότητα συνδέεται με επιτυχημένη επίδοση στην τελική δοκιμασία, ειδικά για τους μαθητές της Δ΄και Στ΄τάξης. Επίσης, η επίδοση των μαθητών όλων των τάξεων στη γραπτή δοκιμασία βελτιώθηκε, ενώ οι μαθητές της Στ΄ τάξης φαίνεται ότι επωφελήθηκαν περισσότερο από τη διαδικτυακή δραστηριότητα. Επιπλέον, το μαθησιακό περιβάλλον ενθάρρυνε την εφαρμογή ποικίλλων στρατηγικών και τη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων.

Θα πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη μας ότι αν και τα αρχεία με τη διαδικτυακή δραστηριότητα δίνουν σημαντικές πληροφορίες για τον τρόπο σκέψης των μαθητών αυτά ενδέχεται να μην αποτυπώνουν πλήρως τις νοητικές διαδικασίες τους (για παράδειγμα, νοερούς υπολογισμούς). Επίσης, όπως ο Lannin (2005) αναφέρει, είναι πιθανό ότι το παιχνίδι ευνοεί την εφαρμογή πολλαπλών δοκιμών χωρίς όμως οι μαθητές να αναστοχάζονται ή να κατανοούν γιατί ένας γενικός κανόνας είναι έγκυρος.

Επίσης, καθώς η δραστηριότητα έλαβε μέρος στο σπίτι, δε μπορούμε να ελέγξουμε αν οι μαθητές δούλεψαν στον υπολογιστή αυτόνομα ή με τη βοήθεια κάποιου μέλους της οικογένειας. Θεωρούμε όμως πολύ πιθανό ότι μιας και η δραστηριότητα δεν ήταν υποχρεωτική ούτε συνδεόταν με τη σχολική αξιολόγηση, οι μαθητές δεν ένιωσαν την ανάγκη να ζητήσουν βοήθεια. Επιπλέον, στην περίπτωση γονεϊκής εμπλοκής, είναι περισσότερο πιθανό ότι οι μαθητές θα κατέβαλαν μεγαλύτερη προσπάθεια για την επίλυση των προβλημάτων.

Γενικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορεί να υποστηριχτεί μέσα από περιβάλλοντα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Επίσης, ο οικιακός υπολογιστής μπορεί να υποστηρίξει και να διευρύνει τη σχολική μάθηση. Πέρα από τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα, περαιτέρω διερεύνηση του ρόλου των νέων τεχνολογιών στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι αναγκαία. Συγκεκριμένα, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η επίδραση του παιχνιδιού ως υποχρεωτική δραστηριότητα μέσα στην τάξη.

Σημειώσεις

[1]Το παιχνίδι *Πέτυχε το στόχο* προγραμματίστηκε από τον Huub Nilwik.
[2]Το *Digital Mathematics Environment* έχει αναπτυχθεί από τον Peter Boon.

Βιβλιογραφία

Carraher, D.W., & Schliemann, A.D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and*

Learning (Vol. 2, pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Goldenberg, E. P., Shteingold, N., & Feurzeig, N. (2003). Mathematical habits of mind for young children. In F. K. Lester & R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: Prekindergarten-Grade 6* (pp. 15–29). Reston, VA: NCTM.

Johanning, D. I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: A closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371–388.

Kaput, J. (2007). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.) *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–18). New York: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., Carraher, D. W., & Blanton, M. (Eds.). (2007). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*, 139–151.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258.

Marton, F., & Tsui, A.B.M. (2004). *Classroom Discourse and the Space of Learning*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum.

Nathan, M.J. (1998). Knowledge and situational feedback in a learning environment for algebra story problem solving. *Interactive Learning Environments*, *5*, 135–159.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Roschelle, J. M., Pea, R. D., Hoadley, C. M., Gordin, D. N., & Means, B. M. (2000). Changing how and what children learn in school with computer-based technologies. *The Future of children*, *10*(2), 76–101.

Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: A critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education*, *35*(1), 69–87.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 145–152). Utrecht: Freudenthal Institute.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational studies of Mathematics*, *54*, 63–75.

Warren, E. A., Cooper, T. J., & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 208–223.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 91–111.