Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2012)

8ο Πανελλήνιο Συνέδριο ΕΤΠΕ

Διαφορική προσέγγιση του κύκλου από μαθητές Γ' Γυμνασίου

Ιωάννης Ζάντζος , Χρόνης Κυνηγός

Διαφορική προσέγγιση του κύκλου από μαθητές Γ΄ Γυμνασίου

Ζάντζος Ιωάννης, Κυνηγός Χρόνης

izantzos@math.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Ε.Κ.Π.Α

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται μερικά από τα αποτελέσματα μιας ερευνητικής μελέτης που αναφέρεται σε 15 μαθητές Γ' γυμνασίου και στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια. Οι μαθητές εργάστηκαν χρησιμοποιώντας ένα 3D υπολογιστικό περιβάλλον που συνδυάζει το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων και τη συμβολική έκφραση μέσα από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo. Στη παρούσα ανάλυσή μας θα εστιάσουμε στον τρόπο με τον οποίο δυο ομάδες μαθητών αναπτύσσουν μια διαφορική προσέγγιση για τον κύκλο με βάση την έννοια της καμπυλότητας στο χώρο. Το συγκεκριμένο σχήμα που οι μαθητές ανέπτυξαν περιλαμβάνει τα εξής: την έννοια της καμπύλης ως πολύγωνο με 'εκμηδενισμένες γωνίες' και την προσέγγιση του κύκλου μέσω της έννοιας της καμπυλότητας.

Λέξεις κλειδιά: Καμπυλότητα, κύκλος, πολυγωνική προσέγγιση

Εισαγωγή

Ένα από τα βασικά προβλήματα στη Γεωμετρία είναι να προσδιορίσουμε εκείνα τα γεωμετρικά μεγέθη που μας επιτρέπουν να διακρίνουμε ένα γεωμετρικό αντικείμενο από ένα άλλο ή να ξέρουμε πότε τα αντικείμενα αυτά είναι ίδια. Για παράδειγμα, τα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται μονοσήμαντα από τα μήκη τους και τα τρίγωνα από τη γνώση των πλευρών τους. Αποδεικνύεται ότι παρόμοια προβλήματα υπάρχουν και στην περίπτωση των κανονικών καμπυλών στο επίπεδο αλλά και στο χώρο γενικότερα. Συγκεκριμένα μια καμπύλη ορίζεται κατά ένα και μοναδικό τρόπο (εκτός από τη θέση της στο χώρο) από δυο συναρτήσεις του μήκους τόξου της: την καμπυλότητα και τη στρέψη (Lipschutz, 1969).

Η έννοια της καμπύλης και η μελέτη των ιδιοτήτων της και των τρόπων προσέγγισής της, αποτελεί σημαντικό θέμα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και αντικείμενο μελέτης σε πολλούς τομείς όπως για παράδειγμα στη διαφορική γεωμετρία. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όμως, τουλάχιστον στην Ελλάδα, η γεωμετρία περιλαμβάνει μόνο απλές καμπύλες: ευθεία, κύκλο και κωνικές τομές, ενώ στην ανάλυση αναφέρονται καμπύλες συναρτήσεων που είναι αφηρημένες αναπαραστάσεις μαθηματικών σχέσεων παρά γεωμετρικά σχήματα (Kynigos and Psycharis, 2003), χωρίς να γίνεται μια διαισθητική εισαγωγή της έννοιας της καμπύλης ως 'η διαδρομή ενός κινητού σημείου'. Αλλά σε κάθε είδος πρακτικής δραστηριότητας, αντιμετωπίζουμε καμπύλες διαφόρων μορφών και μάλιστα τρισδιάστατες όπως για παράδειγμα η σύντομη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια επιφάνεια. Πως μπορούν όμως να μελετηθούν τέτοιες έννοιες χωρίς τη χρήση εννοιών διαφορικής γεωμετρίας και τι σημαίνει για παράδειγμα ευθεία γραμμή και τι σύντομη διαδρομή;

Η εμφάνιση περιβαλλόντων δυναμικού χειρισμού και ιδιαίτερα των εμφανισθέντων τα τελευταία χρόνια 3D περιβαλλόντων, δείχνει να αλλάζει το τοπίο για έννοιες σχετικές με την καμπύλη. Οι δυνατότητες για διερεύνηση και η χρήση του δυναμικού χειρισμού που παρέχουν σήμερα οι ψηφιακές τεχνολογίες, μπορούν: α) να δώσουν τη δυνατότητα απόκτησης εμπειριών εκ μέρους των μαθητών με τέτοιες αφηρημένες έννοιες γενικά στο χώρο, τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο, πριν φτάσουν στους πολύπλοκους τύπους της διαφορικής γεωμετρίας, β) να μεσολαβήσουν στη μετάβαση από το διαισθητικό στο θεωρητικό επίπεδο (Jones, 2000), γ) να αποτελέσουν τη βάση για μια αναδόμηση της περιοχής (restructuration, Wilensky, 2010) όπως στη περίπτωση που μελετάμε για την έννοια της καμπύλης και της προσέγγισής της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Σύμφωνα με τους Yerushalmy and Schwartz (1999), μαθητές με τη χρήση κατάλληλων ψηφιακών εργαλείων ασχολήθηκαν με ένα πλήθος εννοιών αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα μελέτης της καμπυλότητας μιας επίπεδης συνάρτησης και το επίπεδο αφαίρεσης που οι μαθητές είχαν φτάσει ήταν πολύ υψηλό και το επίπεδο κατανόησης βαθύτερο. Ιδιαίτερα, με τη χρήση της γεωμετρίας της χελώνας και τα γραφικά της, έχουμε τη δυνατότητα για μια εναλλακτική και ευρύτερη προσέγγιση των καμπυλών. Η προσέγγιση με τη χελώνα μας δίνει τη δυνατότητα να γυρίσουμε στον πραγματικό γεωμετρικό ορισμό των καμπύλων και να αναπτύξουμε αναπαραστάσεις που είναι συχνά πιο καθαρές και πιο κοντά στον αυθεντικό ορισμό (Loethe, 1992). Έρευνες επίσης έχουν δείξει ότι ακόμα και μικροί μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν νοήματα για έννοιες όπως η καμπυλότητα στο επίπεδο ασχολούμενοι με κατάλληλα υπολογιστικά περιβάλλοντα που συνδυάζουν τη γλώσσα προγραμματισμού (Logo) με το δυναμικό χειρισμό (e.g Kynigos & Psycharis, 2003).

Για μια αναδόμηση (restructuration, υπό την έννοια του Wilensky, 2010) του τρόπου προσέγγισης της έννοιας της καμπύλη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιήσαμε ένα 3D λογισμικό (MaLT) και σχεδιάσαμε ένα μικρόκοσμο για μια διαφορική προσέγγιση της έννοιας της καμπύλης. Η μέθοδος 'Local Turning and Twisting' (Τοπική στροφή και περιστροφή) (LTT) που αναπτύξαμε αντανακλά τον τρόπο που μια καμπύλη σχεδιάζεται στο χώρο με όρους διαφορικής γεωμετρίας και δίνει τη δυνατότητα ακόμη και σε μικρούς μαθητές να διερευνήσουν και να εκφράσουν συμβολικά αυτόν τον τρόπο μέσω της γλώσσας Logo τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο, πριν φτάσουν στους αυστηρούς και πολύπλοκους τύπους της διαφορικής γεωμετρίας. Αναφερόμαστε παρακάτω συνοπτικά στη μέθοδο LTT που αφορά μια καμπύλη στο επίπεδο (Για λεπτομέρειες: Ζάντζος και Κυνηγός, 2011α).

Για την κατασκευή μιας καμπύλης στο επίπεδο είναι αρκετό να γνωρίζουμε την καμπυλότητα σε κάθε σημείο της που εξ ορισμού είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της κατεύθυνσης της εφαπτομένης , δηλαδή:

$\kappa = \lim\limits_{\Delta\chi \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}, (1)$, όπου Δφ είναι η γωνία μεταξύ των εφαπτόμενων της καμπύλης σε δυο διαδοχικές θέσεις και Δχ το αντίστοιχο μήκος τόξου. Είναι γνωστό επίσης ότι όταν το Δχ γίνεται αρκετά μικρό, ο αριθμητής του πηλίκου της σχέσης (1) γίνεται σχεδόν ίσος προς το γινόμενο κ.Δχ. Δηλαδή οι ποσότητες Δφ και κ.Δχ είναι σχεδόν ίσες για αρκετά μικρές τιμές του Δχ. Έτσι, προσεγγιστικά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ένα μικρό τόξο Δχ μιας καμπύλης μπορεί να αντικατασταθεί από την εφαπτομένη της (γραμμική προσέγγιση) και η γωνία μεταξύ των εφαπτόμενων σε δυο διαδοχικά σημεία δίνεται από τη σχέση: Δφ=κ*ΔΧ, όπου κ είναι η καμπυλότητα.

Χρησιμοποιώντας τώρα τη μεταφορά της χελώνας, για μπροστινή κίνηση Δχ (πολύ μικρή) η στροφή στο επίπεδό της, θα είναι κατά γωνία : (κ*:Δχ) και με τη δυνατότητα που υπάρχει στο χρησιμοποιούμενο λογισμικό για δυναμική μεταβολή του Δχ, μπορούμε να έχουμε και την επιθυμητή προσέγγιση μέσω των εφαπτόμενων της καμπύλης. Αν συνδυάσουμε τα παραπάνω με τις εντολές της γλώσσας Logo όπως το repeat ή το make ή ακόμα με μια απλή αναδρομή, μπορούμε να έχουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τη γραφική παράσταση μιας οποιαδήποτε κανονικής καμπύλης στο επίπεδο, όπως για παράδειγμα του κύκλου ή ενός spiral.

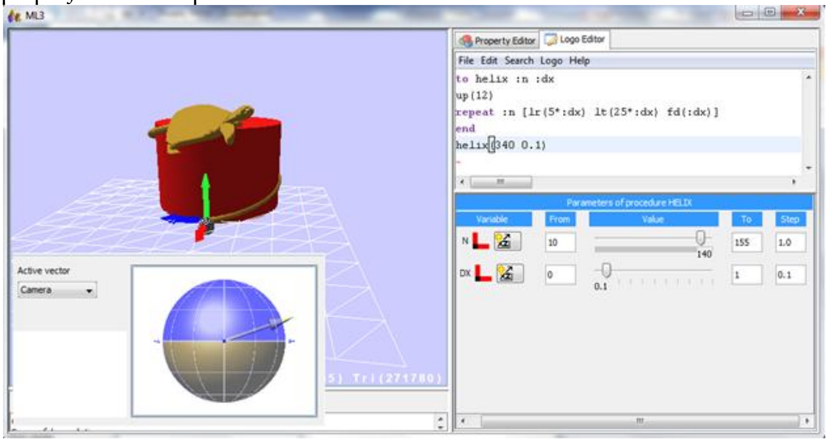
Θεωρητικό πλαίσιο

Ο Vergnaud (1988), εισήγαγε την έννοια του εννοιολογικού πεδίου (conceptual field) ως ένα σύνολο καταστάσεων, η γνώση των οποίων απαιτεί γνώση πολλών εννοιών διαφορετικής φύσης. Υποστήριξε ότι έχει νόημα η θεώρηση μιας έννοιας σε σχέση με άλλες συγγενείς έννοιες, με καταστάσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις της και δεν έχει νόημα η αντίληψή της σε απομόνωση. Με βάση το σχεδιασμό μας, δώσαμε στους μαθητές ένα πρόβλημα που αφορούσε την εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια. Θεωρήσαμε ότι δεν έχει νόημα να μελετήσουμε στο πλαίσιο στο οποίο αναφερόμαστε μόνο την έννοια της μικρότερης απόστασης μιας και συνδέεται άμεσα με έννοιες όπως, η καμπυλότητα και η στρέψη στο χώρο, ο ρυθμός μεταβολής και το μήκος τόξου, δηλαδή έννοιες του εννοιολογικού πεδίου της καμπυλότητας στο χώρο.

Έχοντας ως βασικό στόχο τη διερεύνηση των νοημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές σχετικά με έννοιες του παραπάνω εννοιολογικού πεδίου, σχεδιάσαμε δραστηριότητες στηριζόμενοι στη θεωρία μάθησης μέσω κατασκευών (constructionism, Kafai and Resnick, 1996). Ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της μεθόδου που θεωρήσαμε κατάλληλο για τη συγκεκριμένη περίπτωση, ήταν να τους δώσουμε να ξεκινήσουν με έναν «μισοψημένο» μικρόκοσμο (Kynigos, 2007) με την ονομασία 'σύντομος δρόμος'. Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι είναι λογισμικά σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν μαθητές αλλά και εκπαιδευτικούς να κατασκευάσουν κάτι με αυτούς ή ακόμα να τους αλλάξουν αλλά και να τους αποδομήσουν. Δεν αποτελούν έτοιμα περιβάλλοντα για να κατανοηθούν από τους εκπαιδευτικούς και μετά να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές. Ενσωματώνουν διάφορες έννοιες και προσφέρουν στο μαθητή τα εργαλεία για να αλληλεπιδράσει με το μικρόκοσμο. Στόχος τους είναι να λειτουργούν ως σημεία εκκίνησης, και ο χρήστης να οικειοποιηθεί τις ιδέες που βρίσκονται πίσω από τη διαδικασία κατασκευής τους.

Το υπολογιστικό περιβάλλον

Το υπολογιστικό περιβάλλον που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα έρευνα είναι το MaLT (http:/etl.ppp.uoa.gr) το οποίο συνδυάζει τη συμβολική έκφραση μέσα από μια γλώσσα προγραμματισμού (Logo) και το δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων. Είναι επέκταση της Γεωμετρίας της Χελώνας του 'Χελωνόκοσμου' στον τρισδιάστατο γεωμετρικό χώρο, κατάλληλο για κατασκευή και εξερεύνηση γεωμετρικών αντικειμένων. Οι κινήσεις της χελώνας καθορίζονται από τις εξής εντολές: fd(:n) και bk(:n) οι οποίες δίνουν εντολή στη χελώνα να κινηθεί n βήματα μπροστά ή πίσω, lt(:n) και rt(:n) κινούν τη χελώνα n μοίρες αριστερά ή δεξιά στο επίπεδό της (εγγύτατο επίπεδο), dp(:n) και up(:n) στρέφουν τη χελώνα προς τα κάτω ή προς τα πάνω και rr(:n) , lr(:n) περιστρέφουν τη χελώνα γύρω από την ευθεία της κίνησή της. Τα βασικά εργαλεία του MaLT είναι (Εικόνα 1): Ο απλός μεταβολέας ο οποίος παρέχει στο χρήστη τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των τιμών των μεταβλητών σε ένα αναπαριστώμενο σχήμα και ο δισδιάστατος μεταβολέας ο οποίος είναι ένα δυσδιάστατο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η συμμεταβολή δύο μεταβλητών. Δυο ακόμη χαρακτηριστικά είναι η δυνατότητα που έχει ο χρήστης να χειρίζεται δυναμικά την κάμερα μέσω του ενεργού διανύσματος και να παρατηρεί το αντικείμενο στη σκηνή από όποια πλευρά και κατεύθυνση επιθυμεί, και τη δυνατότητα για εισαγωγή έτοιμων 3d αντικειμένων στη σκηνή, όπως σφαίρας και κυλίνδρου.



Εικόνα 1: Το περιβάλλον του MaLT

Το πρόβλημα

Στους μαθητές δόθηκε το εξής πρόβλημα:

«Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια».

Για τους πειραματισμούς, αναφέραμε στους μαθητές ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν όποια υλικά θέλουν (π.χ χαρτί, ψαλίδι), και τον παρακάτω μισοψημένο μικρόκοσμο με την ονομασία ‘σύντομος δρόμος’:

to σύντομος δρόμος :n :s :dx :c
repeat :n [lr(:s) lt(:c) fd(:dx)]
end

Ο παραπάνω μικρόκοσμος περιλαμβάνει ένα πρόγραμμα με τέσσερις παραμέτρους με την κάθε μια να εκφράζει το εξής: n-πλήθος επαναλήψεων, s-στροφή της χελώνας γύρω από την κατεύθυνση της κίνησής της (καθορίζει τη στρέψη) , dx-καθορίζει το μήκος του βήματος της χελώνας και c- στροφή της χελώνας στο επίπεδό της (εγγύτατο επίπεδο, καθορίζει την καμπυλότητα). Η εκτέλεση του παραπάνω κώδικα δίνει μια πολυγωνική γραμμή (στο χώρο ή στο επίπεδο) ή μια ευθεία γραμμή. Στη περίπτωση όμως που το dx θεωρηθεί πολύ μικρό (να τείνει στο μηδέν), από τον παραπάνω μικρόκοσμο μπορούν να προκύψουν τριών ειδών καμπύλες, που ουσιαστικά αντιπροσωπεύουν τις γεωδαισιακές του κυλίνδρου:

Για s=0 και c=0, Ευθείες

Για s=0 και $c \neq 0$, Κύκλοι

Για $s \neq 0$ και $c \neq 0$, Έλικες

Γνωστοποιήσαμε στους μαθητές ότι το πρόγραμμα αυτό θα τους ήταν χρήσιμο για την εύρεση του τρόπου σχεδίασης μιας τέτοιας διαδρομής και ότι στο τέλος θα μπορούσαν να τον χρησιμοποιήσουν για να φτιάξουν τα δικά τους μοντέλα.

Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα είναι μια έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) με τη συμμετοχή 15 μαθητών Γ γυμνασίου και με διάρκεια 25 ωρών. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ήδη εξοικειωθεί με κατασκευές στη γλώσσα Logo στο περιβάλλον του Micro World Pro. Για την καταγραφή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα λογισμικό ήχου και εικόνας (Hypercam 2) το οποίο έδωσε τη δυνατότητα καταγραφής των ενεργειών των μαθητών με το λογισμικό και των συζητήσεων μεταξύ των συμμετεχόντων. Για την ανάλυση της μαθηματικής σκέψης των μαθητών ενδιαφερθήκαμε για τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αλληλεπιδρούσαν με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις του λογισμικού και τους τρόπους με τους οποίους κατασκεύαζαν και δομούσαν τα μαθηματικά νοήματα. Σε αυτό το σημείο μας φάνηκε χρήσιμο το δόμημα των εγκαθιδρυμένων αφαιρέσεων (situated abstractions, Noss & Hoyles, 1996). Δηλαδή, να περιγράψουμε το πώς οι μαθητές κατασκευάζουν μαθηματικές ιδέες στηριζόμενοι στις λειτουργικότητες του συγκεκριμένου λογισμικού που χρησιμοποιούν και στις μεταξύ τους συζητήσεις. Ένα σημείο στο οποίο επίσης εστιάσαμε, ήταν το πώς οι μαθητές προσπαθούσαν να αλλάξουν τις λειτουργικότητες του ελαττωματικού μικρόκοσμου που τους δόθηκε με στόχο να φτιάξουν έναν άλλο, αυτόν δηλαδή που θα δίνει αυτόματα τη καμπύλη με το μικρότερο μήκος (instrumentalization, Guin and Trouche, 1999).

Αποτελέσματα

Στους αρχικούς πειραματισμούς με τα χειραπτικά υλικά, οι μαθητές διέκριναν τρείς περιπτώσεις σχετικά με τη θέση των δυο σημείων στην επιφάνεια του κυλίνδρου:
1) Όταν τα σημεία ανήκουν στην ίδια γενέτειρα του κυλίνδρου άρα σχηματίζουν ευθεία
2) Όταν τα σημεία ανήκουν στην ίδια βάση του κυλίνδρου, δηλαδή όταν σχηματίζουν ένα τόξο κύκλου, και τέλος
3) Σε μια τυχαία θέση και άρα, σχηματίζουν ένα τμήμα έλικας
Έτσι, το πρόβλημα μετατοπίστηκε στην εύρεση του τρόπου σχεδίασης μιας πλήρους στροφής μιας έλικας και ενός κύκλου. Η εκτέλεση του κώδικα για τιμές με s=0 δίνει μια επίπεδη πολυγωνική καμπύλη και με κατάλληλες τιμές του n δίνει ένα κανονικό πολύγωνο.
Παρακάτω θα αναφερθούμε στον τρόπο με τον οποίο δυο ομάδες μαθητών αναπτύσσουν μια διαφορική προσέγγιση για τον κύκλο με βάση την έννοια της καμπυλότητας στο χώρο.

Η έννοια της καμπύλης ως 'πολύγωνο με εκμηδενισμένες γωνίες'.

Οι μαθητές εκτελούν τον κώδικα για τυχαίες τιμές και προκύπτει μια πολυγωνική γραμμή στο επίπεδο. Το χαρακτηριστικό είναι ότι και οι δυο ομάδες μαθητών θεωρούν ότι για να προσεγγίζει αυτό το πολύγωνο ένα κύκλο, πρέπει πρώτα να είναι λεία καμπύλη, με απαραίτητη προϋπόθεση την 'εκμηδένιση των γωνιών'. Η μια ομάδα θεωρεί απαραίτητη επιπλέον προϋπόθεση και την έννοια του παραδοσιακού ορισμού του κύκλου ως γεωμετρικού τόπου σημείων που ισαπέχουν. Συγκεκριμένα (Ε ερευνητής, Μ1,Μ2 μαθητές):
Ε: πότε τώρα το συγκεκριμένο πολύγωνο μπορεί να θεωρηθεί ως κύκλος;
Μ1: καταρχήν, όταν δεν έχει γωνίες
Μ2: όταν εκμηδενιστούν οι γωνίες
Μ1: και να έχουν και ένα κέντρο
Μ2: όταν εκμηδενιστούν οι γωνίες και όλα τα σημεία να ισαπέχουν από το κέντρο
Αρχικά και οι δυο ομάδες πειραματίζονται με τους μεταβολείς και θέτοντας τυχαίες, αλλά συνεχώς μικρότερες τιμές στο dx, με στόχο να πετύχουν τη γραμμή να είναι λεία. Η εκμηδένιση των γωνιών θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση και για την άλλη ομάδα, αλλά η αναφορά στον παραδοσιακό ορισμό γίνεται μετά από την παρακάτω ερώτηση του ερευνητή:
Ε: δηλαδή με dx μικρό δεν μπορεί να είναι ένα άλλο τυχαίο ελλειπτικό σχήμα και όχι κύκλος;
Στην προσπάθεια τους όμως οι δυο ομάδες να δώσουν απάντηση, καταφεύγουν στην εισαγωγή ενός στερεού κυκλικού δίσκου (έτοιμου αντικειμένου από τη βιβλιοθήκη του λογισμικού) και ο στόχος τους είναι η πολυγωνική γραμμή να περιελίσσεται σε αυτόν. Αν

αυτό επιτευχτεί, τότε κατά τα λεγόμενά τους θα είναι κύκλος. Η προσπάθεια τους όμως ανέδειξε ζητήματα όπως: πως θα εκμηδενιστούν οι γωνίες, ποια θα είναι η καλύτερη προσέγγιση μιας και όσο μικραίνει το dx η πολυγωνική γραμμή προσεγγίζει καλύτερα τον στερεό κύκλο, και ποιο θα είναι το μήκος αυτού του κύκλου.

Ο κύκλος με βάση την έννοια της καμπυλότητας

Πειραματιζόμενοι οι μαθητές με τους μεταβολείς, προσπαθούν να πετύχουν (αν είναι εφικτό), η πολυγωνική γραμμή που σχηματίζει ο κώδικας να περιελίσσεται στον στερεό κύκλο. Ο ερευνητής τους παροτρύνει ταυτόχρονα να καταγράφουν τα συμπεράσματα τους σε φύλλο εργασίας. Όταν παίρνει τη διαβεβαίωση από τους μαθητές ότι πράγματι συμβαίνει το παραπάνω, τους θέτει την εξής ερώτηση:

Ε: και τι μήκος έχει τώρα η συντομότερη διαδρομή μεταξύ αυτών των δυο σημείων;

Η μια ομάδα δεν θυμόταν τον τύπο που έδινε το μήκος ενός κύκλου, ενώ η άλλη αν και φάνηκε αργότερα από τη συζήτηση ότι γνώριζαν τον τύπο, εντούτοις κατέφυγαν στην εύρεση του μήκους με βάση τον κώδικα και όχι με βάση τον τύπο:

Μ: η ακτίνα είναι 2 μέτρα . Αφού ν=127, επί 0.1 [κοιτάζει τους μεταβολείς όπου είναι: ν=127. dx=0.1], άρα 12.7

Ε: αυτό το μήκος όμως το βρίσκουμε με τη βοήθεια του πολυγώνου. Μήπως όμως θυμάστε έναν τύπο που να μας δίνει το μήκος αυτού του κύκλου;

*Μ: 2*π*ρ*

Στη συνέχεια οι μαθητές υπολογίζουν το μήκος του κύκλου με βάση τον τύπο και θέτοντας π=3.14 (12.56), και διακρίνουν μια απόκλιση στους δυο τρόπους υπολογισμού.

Ε: μπορείτε τώρα εσείς με τη βοήθεια αυτού του κώδικα να φτιάξετε κύκλο που να προσεγγίζει καλύτερα αυτό εδώ το μήκος; [δείχνει το 12.56]

Οι μαθητές με τη βοήθεια των μεταβολέων μικραίνουν τη τιμή του dx από dx=1 σε dx=0.1 και κατόπιν κάνουν το ίδιο για dx=0.01 ενώ ταυτόχρονα τροποποιούν και την τιμή του c για να συνεχίσει ο κύκλος να περιελίσσεται στον στερεό κύκλο, ενώ φαίνεται αρχικά να λαμβάνουν υπόψη το σχήμα και όχι το μήκος που παίρνουν κάθε φορά.

Μ: Α!! είναι όλα δια 10 [κοιτάζουν τις τιμές στο φύλλο εργασίας τους]

Ε: τι σχέση έχουν οι μεταβλητές ;

Μ: είναι ανάλογα [c/dx=29]

Οι μαθητές με τη παρότρυνση του ερευνητή γράφουν τη σχέση στο τετράδιό τους, την αντικαθιστούν στο αρχικό πρόγραμμα και προκύπτει ο παρακάτω κώδικας:

```
to σύντομος δρόμος :n :dx
repeat :n [lt(29*:dx) fd(:dx)]
end
```

Ο διάλογος συνεχίζεται και όπως αποκαλύπτεται, η αναλογική σχέση δεν σημαίνει ότι από μόνη της δίνει την επιθυμητή λύση.

Ε: Για ποιες τιμές ο κώδικας που ανακαλύψατε δίνει τον ζητούμενο κύκλο;

Μ1: για dχ μικρό, για παράδειγμα 0.1

Ε: δηλαδή για dχ = 0.1 θα έχουμε κύκλο;

Μ2: πολύγωνο πάλι θα έχουμε

Ε: και ποιες μπορεί να είναι οι ζητούμενες τιμές;

Μ2: δεν μπορούμε να πούμε ακριβώς γιατί όσο θα βάζουμε μικρότερες τιμές θα πλησιάζει καλύτερα τον στερεό κύκλο

Στην πραγματικότητα, ο κώδικας προσεγγίζει ικανοποιητικά τον κύκλο με το dx να τείνει στο μηδέν.

Κίνηση της χελώνας πάνω στην εφαπτομένη του κύκλου

Η έννοια της καμπυλότητας όμως από άποψη διαφορικής γεωμετρίας, απαιτεί το 'κινητό σημείο' να κινείται στη κατεύθυνση της εφαπτομένης. Θέλοντας ο ερευνητής να φέρει στην επιφάνεια τις απόψεις των μαθητών για τη συγκεκριμένη περίπτωση, τους έθεσε την εξής ερώτηση:

Ε: Μπορείτε τώρα με βάση το παραπάνω συμπέρασμα να σχεδιάσετε αυτόν τον κύκλο αλλά να έχει κέντρο την αρχή των αξόνων;

Η σχεδίαση όμως ενός τέτοιου κύκλου με τη χρήση του συγκεκριμένου κώδικα απαιτεί πρώτα η χελώνα να έρθει στην περιφέρεια του στερεού κύκλου μετά στροφή 90 μοίρες για να κινηθεί πάνω στην εφαπτομένη, και κατόπιν θεωρώντας πολύ μικρό το dx (θεωρητικά να τείνει στο μηδέν) παίρνουμε τη ζητούμενη προσέγγιση.

Στην παραπάνω ερώτηση, η πρώτη ομάδα εκτελεί πρώτα την εντολή fd(2) όσο η ακτίνα του στερεού κύκλου και κατόπιν τον κώδικα του σύντομου δρόμου. Διαπιστώνει ότι δεν παίρνει το επιθυμητό αποτέλεσμα και η επόμενη κίνηση είναι να εκτελέσει τις εξής εντολές: fd(2), lt(90) και τον κώδικα. Η άλλη ομάδα χωρίς να πειραματιστεί, εκτελεί κατευθείαν τις παραπάνω εντολές που δίνουν ουσιαστικά και την απάντηση, θεωρώντας αυτονόητο ότι έτσι θα έπρεπε να γίνει. Αναφέρω μέρος της συζήτησης που ακολούθησε :

Ε: γιατί 90 μοίρες

Ομάδα 1:

Μ2: για να μας βγει ο κύκλος γύρω -γύρω

Μ1: Διότι η διάμετρος πρέπει να πέφτει σαν ύψος στον κύκλο , να είναι κάθετη προς τον κύκλο

Ομάδα 2:

Μ: ουσιαστικά φτιάχνουμε δυο παράλληλες , κάπως τη λένε [δείχνει την παράλληλη προς τον άξονα Ζ του συστήματος αξόνων και κατόπιν ο ερευνητής τους θυμίζει την έννοια της εφαπτομένης]

Ε: άρα για να δημιουργήσει η χελώνα αυτόν τον κύκλο πρέπει πρώτα να την βάλω στην περιφέρεια του κύκλου και μετά τι θα πρέπει να τις πω;

Μ1: να συνεχίσει να εφάπτεται

Μ2: ουσιαστικά εμείς κάναμε πολλές εφαπτόμενες μαζί πάνω στον κύκλο

Ε: πολύ σωστά

Μ: και αν αυτές οι εφαπτόμενες είναι πολύ-πολύ μικρές σχηματίζουν κύκλο

Συμπεράσματα

Ένας από τους βασικούς στόχους της παρούσας έρευνας ήταν να μελετήσει τα νοήματα που αναπτύσσουν μαθητές Γ γυμνασίου στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια κυλινδρική επιφάνεια. Οι συγκεκριμένοι μαθητές ανέπτυξαν νοήματα για ένα πλήθος εννοιών τόσο του διαφορικού λογισμού (π.χ ρυθμός μεταβολής) όσο και για έννοιες διαφορικής γεωμετρίας (π.χ καμπυλότητα, πολυγωνική προσέγγιση) που ερευνητικά έχει αποδειχτεί ότι αποτελούν έννοιες δύσκολες να προσεγγιστούν ακόμα και από φοιτητές μαθηματικών. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά τη στρατηγική που οι συγκεκριμένοι μαθητές ακολούθησαν για να διαπιστώσουν ότι ο κώδικας του σύντομου δρόμου τους δίνει προσεγγιστικά ένα κύκλο. Δηλαδή, δεν χρησιμοποίησαν τεχνικές για να διαπιστώσουν ότι όλα τα σημεία πρέπει να ισαπέχουν από το κέντρο, αλλά εισάγουν έναν έτοιμο κυκλικό δίσκο και προσπαθούν να επαληθεύσουν ότι η γραμμή που τους δίνει ο κώδικας περιελίσσεται στον στερεό κύκλο. Η στρατηγική αντιμετώπισης του προβλήματος μας δείχνει ότι για αυτούς τους μαθητές δεν είναι απαραίτητα στοιχεία το κέντρο του κύκλου και το ότι πρέπει όλα τα σημεία να ισαπέχουν από αυτό (αν και αυτό επικαλούνται για την επίλυση του προβλήματος). Το συγκεκριμένο περιβάλλον όμως και ο μικρόκοσμος που σχεδιάστηκε τους οδήγησαν σε μια διαφορετική αντιμετώπιση από αυτή του παραδοσιακού τρόπου (Situated abstraction, Noss and Hoyles, 1996), δηλαδή σε μια καθαρά διαφορική προσέγγιση. Έτσι οδηγηθήκανε και στη δημιουργία μιας διαφορετικής ‘εικόνας’ για την έννοια του κύκλου από εκείνη του παραδοσιακού ορισμού με τη βοήθεια της χελώνας (ενός κινητού) και αφορά στα εξής: α) ο κύκλος μπορεί να εκληφτεί ως πολύγωνο με ‘εκμηδενισμένες γωνίες’ και β) μπορεί να προσεγγιστεί μέσω της έννοιας της καμπυλότητας, που έχει σχέση με την οριακή πολυγωνική προσέγγιση, και την κίνηση της χελώνας πάνω στην εφαπτομένη του κύκλου. Τα ευρήματα της συγκεκριμένης έρευνας όπως και άλλα σχετικά με την έννοια της καμπυλότητας (π.χ Kynigos and Psycharis, 2003; Ζάντζος και Κυνηγός, 2011β), μας δίνουν βάσιμες ενδείξεις ότι οι ψηφιακές τεχνολογίες και ειδικότερα αυτές που συνδυάζουν το δυναμικό χειρισμό και τη συμβολική έκφραση μέσω της γλώσσας Logo , μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για μια αναδόμηση (restructuration, Wilensky, 2010) γενικότερα της έννοιας της καμπύλης και ειδικότερα του κύκλου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και χωρίς να είναι απαραίτητο να προσπεράσουμε την έννοια της καμπυλότητας.

Αναφορές

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher,* Vol. 32-1, 9-13.

Guin, D. and Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3(3): 195–227.

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: students' interpretations when using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1-2), 55-85.

Kafai, Y. and Resnick, M. (eds.) (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking and learning in a digital world*. Lawrence Erlbaum Publishers, Mahwah

Kynigos, C. (2007). Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design, *Informatics in Education*, 2007, Vol. 6, No. 2, 1–24, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year-olds meanings around intrinsic curves with a medium for symbolic expression and dynamic manipulation. In N. A. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Ed.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 165–172). Honolulu, Hawaii, U.S.A: PME.

Lipschutz, M. (1969). *Theory and Problems of Differential Geometry (Schaum's Outline Series).* New York: McGraw-Hill

Loethe H., (1992). Conceptually Defined Turtles, in: (Hoyles, D. and Noss, R. eds.), *Learning Mathematics and Logo,* The MIT Press,

Noss,R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wilensky, U. (2010). *Restructurations: Reformulating knowledge disciplines throw new representational forms.* In J. E. Clayson & I.Kalas (Ed), constructionism 2010 Paris, France

Yerushalmy, M., and Schwartz, J.L. (1999) A procedural approach to exploration in calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30 (6), 903-914.

Ζάντζος, Ι. και Κυνηγός, Χ. (2011α). Σχεδιάζοντας το Συντομότερο Δρόμο Μεταξύ δυο Σημείων σε μη Επίπεδη Επιφάνεια με τη Χρήση Κατάλληλων 3D Ψηφιακών Εργαλείων.*6ο πανελλήνιο συνέδριο των εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ, ‘Αξιοποίηση των τεχνολογιών της πληροφορίας και της επικοινωνίας στη διδακτική πράξη’* Σύρος, 2011

Ζάντζος, Ι. και Κυνηγός, Χ. (2011β) Η σχεδίαση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δυο σημείων μιας κυλινδρικής επιφάνειας από μαθητές Γ Γυμνασίου, με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας. *4ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών 'Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας'* Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1 - 4 Δεκεμβρίου 2011