ePublishing
ΕΘΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗΣ NATIONAL DOCUMENTATION CENTRE

Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Vol 1 (2017)

5ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Αράχνη εναντίον μύγας: Προσομοίωση με λογισμικό τριών διαστάσεων και κίνησης στο σχολικό περιβάλλον

Κωνσταντίνος Ζυγούρης

To cite this article:

Ζυγούρης K. (2022). Αράχνη εναντίον μύγας: Προσομοίωση με λογισμικό τριών διαστάσεων και κίνησης στο σχολικό περιβάλλον. *Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση*, *1*, 915–920. Retrieved from https://eproceedings.epublishing.ekt.gr/index.php/cetpe/article/view/4145

https://epublishing.ekt.gr | **e-Publisher:** EKT | **Downloaded at:** 21/05/2026 14:57:00

Αράχνη εναντίον μύγας: Προσομοίωση με λογισμικό τριών διαστάσεων και κίνησης στο σχολικό περιβάλλον

Ζυγούρης Κωνσταντίνος
kostaszig@mac.com
3ο Γυμνάσιο Καστοριάς

Περίληψη

Η εργασία αυτή διαπραγματεύεται μια δραστηριότητα (εδώ ταυτόσημη με την έννοια του problem solving και ορατά τα στάδια κατά Polya), η οποία μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών σε τμήματα της Β' τάξης Λυκείου με τη συμβολή ενός δυναμικού μαθηματικού λογισμικού, όπως του Geogebra 3D. Η δραστηριότητα εστιάζεται στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με διαδικασίες επαγωγικής συλλογιστικής (διαδικασίες άλλωστε, που αποτελούν και τους στόχους αυτής της εργασίας): αντιμετωπίζονται δηλαδή πρώτα κάποιες ειδικές περιπτώσεις και έπειτα αναζητούνται επεκτάσεις και γενικεύσεις του προβλήματος. Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές οδηγούνται στη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος για τον υπολογισμό της συντομότερης διαδρομής. Το Geogebra διευκολύνει την οπτικοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων των εννοιών και βοηθά στην γραφική διερεύνηση των προβλημάτων. Οι μαθητές αναλύουν, αλλά και τροποποιούν την σκέψη τους έως ότου συνάγουν ένα κατάλληλο συμπέρασμα. Η χρήση διερευνητικών μεθόδων στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων και η ενεργής συμμετοχή των μαθητών σε ομάδες κάνοντας χρήση του υπολογιστή, στοχεύει σε βελτίωση της στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στη βελτίωση βαθμιαία της γόνιμη μαθηματικής παρατηρητικότητας και δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Σκοπός και ελπίδα είναι, να αυξηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

Λέξεις κλειδιά: Μύγα, problem solving, Geogebra

Εισαγωγή

Το έγγραφο Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και της τρισδιάστατης γεωμετρικής αντίληψης των μαθητών αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο πολλών αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών και συνδέεται με πληθώρα καταστάσεων της καθημερινής ζωής (Jones & Mooney 2003). Σύμφωνα με απόψεις πολλών καθηγητών μαθηματικών αλλά και πολλών ερευνητών, όπως για παράδειγμα του Schoenfeld (1994), η λύση προβλημάτων αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα των αποτελεσματικών αναλυτικών προγραμμάτων. Η οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου, η ανάπτυξη και ο χειρισμός νοητικών αναπαραστάσεων που σχετίζονται με δυσδιάστατα και τρισδιάστατα αντικείμενα αποτελεί σημαντικό παράγοντα της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης (NCTM 2000). Πολλοί άνθρωποι αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στο να χειριστούν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο οπτικά, αν και θεωρούν την αντίστοιχη διαδικασία με δισδιάστατα αντικείμενα φυσική ενέργεια.

Ο προσανατολισμός στην καθημερινή μας ζωή, σημαίνει με απλά λόγια, ότι αντιλαμβανόμαστε τη θέση αντικειμένων στον περιβάλλοντα χώρο, για παράδειγμα σ' ένα δωμάτιο, αλλά και σε ευρύτερους χώρους.

Κ. Παπανικολάου, Α. Γόγουλου, Δ. Ζυμπίδης, Α. Λαδιάς, Ι. Τζωρτζάκης, Θ. Μπράτιτσης, Χ. Παναγιωτακόπουλος (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία», σ. 915-920, Ανώτατη Σχολή ΠΑΙδαγωγικής & Τεχνολογικής Εκπαίδευσης, 21-23 Απριλίου 2017.ISSN 2529-0924, ISBN 978-618-83186-0-1.

Θεωρητικό πλαίσιο

Διδακτική των Μαθηματικών αναφέρεται κυρίως στη χρήση των νέων υπολογιστικών εργαλείων και των υπολογιστών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η διαδικασία ένταξής τους, προχωρά με γρήγορους ρυθμούς και με την οργάνωση και υλοποίηση προγραμμάτων επιμόρφωσης πρώτου και δεύτερου επιπέδου. Παρέχεται η δυνατότητα ενός διαφορετικού τρόπου οργάνωσης και σχεδίασης της μαθησιακής διαδικασίας, με στόχο την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε προβληματικές καταστάσεις που έχουν προσωπικό νόημα γι' αυτούς. Ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο κυριαρχεί η χρήση της τεχνολογίας, παρέχει πολλά ερεθίσματα και ευκαιρίες εμπλοκής στα Μαθηματικά. Οι μαθητές αυτενεργούν, πειραματίζονται, εκφράζονται ελεύθερα, κάνουν εικασίες και επανεξετάζουν αρχικές τους σκέψεις και στρατηγικές. Στο επίκεντρο βρίσκεται η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από τις υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2006). Κατά τον Papert (1991), το ζητούμενο στην διδακτική των μαθηματικών είναι ο μαθητής να «κάνει μαθηματικά» ο ίδιος.

Η "διατύπωση προβλήματος", όσο και η επίλυση του συνιστούν σημαντικά πεδία μελέτης της μαθηματικής εκπαίδευσης, με την έννοια της δημιουργίας νέων προβλημάτων (problem posing), όσο και στον επανασχηματισμό δοθέντος προβλήματος (Silver 1994). Σημαντικοί ερευνητές στο χώρο των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως οι Polya (1954), Freudenthal (1973), έχουν αποδείξει ότι η διατύπωση προβλήματος είναι ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών.

Η παρούσα εμπειρική δραστηριότητα και μελέτη εστιάζει στην εμπλοκή μαθητών Λυκείου σε δραστηριότητες ειδικά σχεδιασμένες με ψηφιακά εργαλεία τρισδιάστατων αναπαραστάσεων και σε δραστηριότητες προγραμματιστικών κατασκευών, στις οποίες καλούνται να προσομοιώσουν αντικείμενα της καθημερινής ζωής στο τρισδιάστατο περιβάλλον του εργαλείου αυτού διερευνώντας έτσι, τη μαθηματική δομή των υπό κατασκευή τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων.

Ο εμπλουτισμός της αναπαράστασης, η ανατροφοδότηση και οι λειτουργικότητες ενός σύγχρονου ψηφιακού εργαλείου δε μειώνουν τη σημασία του φορμαλισμού στη μαθηματική έκφραση (Kynigos et al, 1997), αντίθετα η χρήση νέων τεχνολογιών στη μαθησιακή διαδικασία μπορεί να ενδυναμώσει ταυτόχρονα και τα δύο είδη μαθηματικών αναπαραστάσεων και να κάνει εφικτή την εστίαση στην κατασκευή παιδαγωγικών περιβαλλόντων μάθησης με στόχο την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων (Κυνηγός, 2006).

Ο σχεδιασμός νέων υπολογιστικών εργαλείων που αφορούν τη γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου βοήθησε σημαντικά ερευνητές ώστε να άρουν πολλά υπάρχοντα εμπόδια αναπαράστασης, διαθέτοντας παράλληλα νέα μέσα και λειτουργικότητες στους μαθητές που αφορούν:

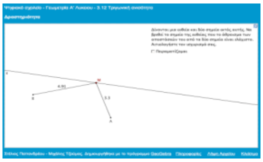
- τη δυνατότητα πλοήγησης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στον τρισδιάστατο χώρο
- την πολλαπλή –συμβολική και γραφική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών
- τον άμεσο χειρισμό μαθηματικών αναπαραστάσεων
- το σχεδιασμό περιβαλλόντων διερευνητικής μάθησης όπου ευνοείται η ανάπτυξη εικασιών, υποθέσεων και αφαιρετικής ικανότητας των παιδιών
- τη σημασία της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Παρουσίαση εργασίας

Στους μαθητές, οι οποίοι καλούνται να δουλέψουν σε ομάδες, δίνονται τμηματικά δύο εισαγωγικά προβλήματα στα οποία ο διδάσκων κάνει χρήση των ΤΠΕ για παρουσίασή τους και την ανάπτυξη σχετικού σεναρίου και μαζί φύλλων εργασίας.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά την εύρεση της μικρότερης διαδρομής μεταξύ δύο σημείων (ευθεία γραμμή) αλλά και της συμμετρίας για την εύρεση αυτής (καθοριστικός παράγοντας και στρατηγική στο problem solving). Εμφανίζεται ως εφαρμογή 4η της παραγράφου 3.12 του σχολικού βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Αργυρόπουλου κ.α., 2001) και ως διαδραστική εφαρμογή πάλι στο βιβλίο από τους Στέλιο Παπανδρέου και Μιχάλη Τζούμα (http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGLA101/574/3720,16299/ όπως ανακτήθηκε στις 10/08/2014 και ώρα 04:40 μ.μ.).

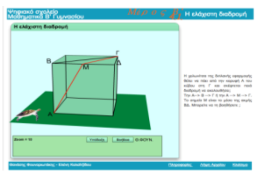
Το πρόβλημα είναι: Δοθέντος μιας ευθείας και δυο σημείων εκτός αυτής και προς το ίδιο μέρος της, να βρεθεί σημείο της ευθείας ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα δυο σημεία να είναι ελάχιστο. (σχήμα 1)



Σχήμα 1. Αρχικό πρόβλημα

Το δεύτερο πρόβλημα, που προσεγγίζει καλύτερα και την εκδοχή του τελικού προβλήματος αφορά την εύρεση της ελάχιστης διαδρομής μιας χελωνίτσας, μεταξύ δύο σημείων σε "απέναντι" κορυφές ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και σε διαφορετικές βάσεις, κινούμενοι όμως πάνω στο επίπεδο του παραλληλεπιπέδου. Το συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχει στο διαδραστικό ψηφιακό βιβλίο της Β΄ γυμνασίου στο κεφάλαιο 4 , παράγραφος 1 της γεωμετρίας και δίνεται ως διαδραστική εφαρμογή από τους Φουναριωτάκη Αθανάσιο και Καλαϊτζίδου Ελένης (http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYMB105/386/2552,9996/ όπως ανακτήθηκε στις 10/08/2014 και ώρα 05:50 μ.μ.).

Στην παρούσα εργασία δίνεται ως ένα ενδιάμεσο πρόβλημα εργασίας, που θα βοηθήσει τους μαθητές να συνδέσουν το πυθαγόρειο θεώρημα με το τρίτο πρόβλημα, να αντιληφθούν την έννοια της κίνησης <u>πάνω</u> στο παραλληλεπίπεδο, της οπτικής ενός προβλήματος τριών διαστάσεων σε δυο διαστάσεις (ανάπτυγμα παραλληλεπιπέδου), με την εύρεση της αντίστοιχης ευθείας καθώς και των αναπτυγμάτων ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχήμα 2).



Σχήμα 2. Ενδιάμεσο πρόβλημα

Το τελικό πρόβλημα που ουσιαστικά είναι και αντικείμενο της παρούσας εργασίας, αφορά την μελέτη εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής μιας μύγας από μια αράχνη που βρίσκονται πάνω σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, διαστάσεων 30,12,12 και σε αντικριστές έδρες (η αράχνη 1 μέτρο κάτω από την επάνω ακμή της έδρας και η μύγα αντίστοιχα 1 μέτρο πάνω από την κάτω ακμή της αντικριστής έδρας, επί των μεσοκαθέτων, σχήμα 3). Είναι ένα γνωστό πρόβλημα που δίνεται στο βιβλίο του Eli Maor, The Pythogorean Theorem-A 4.000 Year History (κυκλοφορεί και σε μετάφραση στα ελληνικά, από τις εκδόσεις Κάτοπτρο).

Σχήμα 3. Τελικό πρόβλημα

Το συγκεκριμένο πρόβλημα περιλαμβάνει και ο διάσημος συγγραφέας μαθηματικών προβλημάτων Martin Gardner στο βιβλίο του: “The second Scientific book of mathematical puzzles and diversion” (1961), στο οποίο περιγράφει και την ιστορία του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι πρωτοεμφανίστηκε σε μια εφημερίδα το 1903, χωρίς όμως να του δοθεί ιδιαίτερη σημασία, μέχρι να εμφανιστεί ξανά δύο χρόνια αργότερα στην London Daily Mail. Για την διερεύνηση του προβλήματος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα λογισμικά Geogebra (3D), MaLT (τρισδιάστατος χελωνόκοσμος), Cabri3D αλλά και του Google SketchUp.

Χρησιμοποιήθηκε από εμάς το Geogebra 3D. Στους μαθητές, δίνονται αρχεία geogebra 3D για την διερεύνηση του προβλήματος, των οποίων παρουσιάζονται εδώ κάποιες εικόνες από τα διάφορα στάδια διερεύνησης και στα πλαίσια της αντίστοιχης παρουσίασης της εργασίας θα γίνει παρουσίαση με όλα τα χαρακτηριστικά τους.

Το φύλλο εργασίας που προτείνουμε να δοθεί στους μαθητές, περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

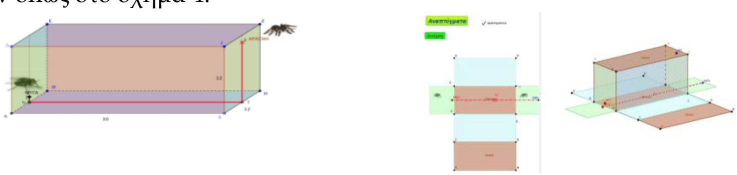
(1ο) Δίνεται το αρχικό σχήμα του geogebra 3D, με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, αλλά χωρίς να έχει τοποθετηθεί, η μύγα και η αράχνη. Ζητάμε από τους μαθητές να μελετήσουν για να κατανοήσουν το πρόβλημα, (πρώτο βήμα σύμφωνα με τον Polya), πριν προσπαθήσουν να το επεξεργαστούν. Για αυτόν επιπλέον τον λόγο θα κληθούν να τοποθετήσουν στις θέσεις που νομίζουν, την αράχνη και την μύγα.

(Εδώ έχουμε αναπαράσταση του προβλήματος, πιθανόν και εξέταση ειδικών ή ακραίων περιπτώσεων, απλοποίηση του προβλήματος.)

(2ο) Αφού κατανοήσουν τα δεδομένα του προβλήματος (πρόκειται για ανοικτό πρόβλημα), να επινοήσουν ένα σχέδιο (δεύτερο βήμα κατά Polya). Μια “καλή” στρατηγική είναι οι μαθητές να υποθέσουν (θετική σκέψη) ότι έλυσαν το πρόβλημα. Βρήκαν την μικρότερη διαδρομή! Γιατί είναι η μικρότερη; Έχει κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό; Έχει σχέση με άλλες συντομότερες διαδρομές που συνάντησαν στο παρελθόν;

(3ο) Κατά την ανάπτυξη του σχεδίου ή αν δεν υπάρχει, ζητάμε να αλλάξει η οπτική γωνία με κατάλληλες ερωτήσεις, όπως με ποιό τρόπο θα είμαστε βέβαιοι ότι η διαδρομή που σχεδιάσαμε είναι η μικρότερη; Επιδιώκουμε οι μαθητές να οδηγηθούν στην σχεδίαση μιας

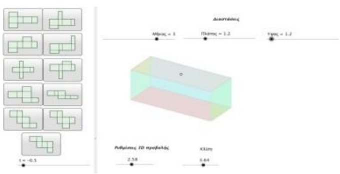
ευθείας, πιθανόν όπως στο σχήμα 4:



Σχήμα 4. Καλύτερη Διαδρομή= Ευθεία

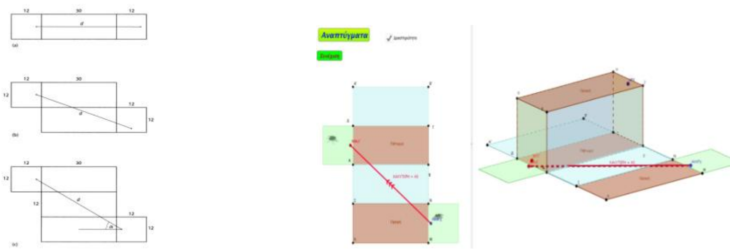
Οι μαθητές αντιλαμβάνονται, πιθανόν, αυτή ως καλύτερη διαδρομή (άρα εκτελούν πλέον ένα σχέδιο, τρίτο βήμα κατά Polya), αφού αποτελείται από δυο τμήματα ευθειών (πιθανή απάντηση) και μάλλον είναι η πλέον προσιτή: γίνεται πάνω στο παραλληλεπίπεδο, όπως εύκολα φανερώνει το σχήμα. Εξάλλου, ήδη κατά την κατανόηση του προβλήματος οι μαθητές θα έχουν σχεδιάσει τις μεσοκαθέτους των αντίστοιχων ακμών. Οι επόμενες ερωτήσεις μας επομένως, πρέπει να στοχεύουν, στην πρόβλεψη των μαθητών της ύπαρξης, πιθανόν και άλλης ευθείας που να συνδέει τα δυο σημεία, καθώς και το γιατί τα ευθύγραμμα τμήματα μαζί τα θεωρούν ως βέλτιστη λύση (νοητής ευθείας). Έτσι με κατάλληλες ερωτήσεις, όπως: Γιατί θεωρείτε ότι είναι η συντομότερη διαδρομή; Γράψτε την σκέψη σας......Μπορείτε να τροποποιήσετε το σχήμα ώστε να "φαίνεται" καλύτερα ότι πρόκειται για ευθεία γραμμή;....Μήπως το αρχικό παραλληλεπίπεδο δεν μπορεί να μας δώσει όλες τις απαιτούμενες πληροφορίες;....Μπορείτε να το "απλοποιήσετε" ;....

Σε κάθε περίπτωση μετά από τις αντίστοιχες ερωτήσεις, μπορεί να δοθεί το δεύτερο αρχείο geogebra που περιλαμβάνει τα δυνατά αναπτύγματα ενός παραλληλεπιπέδου(σχήμα 5).



Σχήμα 5. Αναπτύγματα Παραλληλεπιπέδου

Ένα τελευταίο πρόβλημα μετά την κατανόηση της πιθανούς ύπαρξης και της ανάγκης εμφάνισης των αναπτυγμάτων του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πιθανόν, να είναι η αλλαγή της θέσης της μύγας και της αράχνης και της σχεδίασης της αντίστοιχης ευθείας αφού το κάθε ανάπτυγμα τις "οδηγεί" σε διαφορετική θέση. Σε αυτή την περίπτωση τους ζητάμε να μελετήσουν προσεκτικά την θέση που θα βρίσκονται τα δυο έντομα μετά την ανάπτυξη του παραλληλεπιπέδου. Τέλος τους ζητάμε να βρουν την ελάχιστη απόσταση φέρνοντας τα αντίστοιχα "γνωστά" ευθύγραμμα τμήματα και εφαρμόζοντας το κατάλληλο τρόπο (θεώρημα ....). Η διερεύνηση γίνεται δυναμικά μέσα από το περιβάλλον του geogebra 3D και οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να παρατηρούν την κίνηση του παραλληλεπιπέδου και από διαφορετικές γωνίες (σχήμα 6).



Σχήμα 6. Καλύτερη Διαδρομή

Στο τέλος της εργασίας τους, καλούνται οι μαθητές να κάνουν μια ανασκόπηση και έλεγχο της διαδικασίας που ακολούθησαν για την λύση του προβλήματος, τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν καθώς και τις προτάσεις που έγιναν ώστε να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες.

Συζήτηση - Συμπεράσματα

Η εμπλοκή των μαθητών σε προβλήματα τρισδιάστατης γεωμετρίας και η χρησιμοποίηση αντίστοιχα ΤΠΕ, εκτιμούμε, ότι συνεπάγεται μια βελτίωση της ικανότητας των μαθητών, αντίληψης εννοιών του χώρου. Υπάρχουν ενδείξεις (Γαβρίλης κ.α, 1997) ότι η πλοήγηση στο εικονικό περιβάλλον του λογισμικού εφοδιάζει τους μαθητές με διαισθήσεις, οι οποίες, μετασχηματίζονται σταδιακά σε δομή του τρισδιάστατου χώρου. Σε αυτή την άποψη οδηγηθήκαμε και εμείς, μέσα από την εργασία μαθητών μας στο πρόβλημα που παρουσιάστηκε, καθώς και σε άλλα παρόμοια.

Επίσης, διακρίναμε στοιχεία εξοικείωσης και θετικής στάσης των μαθητών στις διαδικασίες του problem solving και της διερεύνησης προβλημάτων. Το συγκεκριμένο πρόβλημα παρουσιάστηκε μέσα σε φύλλα εργασίας που δόθηκαν τα σχολικά έτη 2014 και 2015.

Βιβλιογραφία

Freudenthal, J. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht, Netherlands: Reidel.

Gardner, M. (1961). *The 2nd Scientific American book of mathematical puzzles & diversions, a new selection,* Simon and Schuster. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I.Thompson Ed.), *Enhancing Primary Mathematics Teaching and Learning* (pp3-15). London: Open University Press.

Kynigos, C., Koutis, M., Hadzilakos, T. (1997). Mathematics with component oriented exploratory software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 229 – 250.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lerch, C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 21-36.

Maor Eli (2007). *The Pythagorean Theorem : A 4,000 Year History*, Princeton University Press

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: Va, NCTM.

Polyá, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Jurdak, M., & Sahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: The case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics,* 47, 297–315.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13, 55-80

Αργυρόπουλος, Η. κ.α. (2001): *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα, Ο.Ε.Δ.Β.

Γαβρίλης Κ., Κεΐσογλου Σ., Κυνηγός, Χ.(2007) «Πλοήγηση» και μαθηματικοποίηση σε 3D εικονικά περιβάλλοντα. Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στο Χ. Σακονίδης, Δ., Δεσλή, (επιμ), *Πρακτικά Πανελλήνιου Συνέδρου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών,* (σ. 446-458), Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Σχολή Επιστημών της Αγωγής, Τυπωθήτω.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη.* Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Λεμονίδης, Χ. (2003). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου*, Αθήνα: Πατάκης