Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

Τόμ. 1 (2017)

5ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Οικοδόμηση προ-αλγεβρικών εννοιών μέσω γενίκευσης ψηφιακών μοτίβων: Μελέτη περίπτωσης σε μαθητές Ε' & ΣΤ Δημοτικού

Παύλος Γιαννακόπουλος, Γεώργιος Φεσάκης

Οικοδόμηση προ-αλγεβρικών εννοιών μέσω γενίκευσης ψηφιακών μοτίβων: Μελέτη περίπτωσης σε μαθητές Ε’ & ΣΤ Δημοτικού

Γιαννακόπουλος Παύλος, Φεσάκης Γεώργιος
psemdt14007@rhodes.aegean.gr, gfesakis@rhodes.aegean.gr
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περίληψη

Η αναγνώριση και η γενίκευση μοτίβων θεωρείται κεντρική Μαθηματική πρακτική και αποτελεί βασικό συστατικό της σύγχρονης Διδακτικής προσέγγισης της Άλγεβρας. Μέσω της γενίκευσης μοτίβων οι μαθητές οικοδομούν σταδιακά έννοιες όπως η μεταβλητή, οι σχέσεις και οι συναρτήσεις. Παρά την ευρεία αποδοχή της μαθησιακής αξίας των μοτίβων, οι έρευνες εντοπίζουν δυσκολίες σχετικά με το πέρασμα των μαθητών από την γενίκευση των μοτίβων στην έκφραση σχέσεων με αλγεβρικό συμβολισμό. Η παρούσα εργασία μελετά τη σύνδεση της γενίκευσης μοτίβων και της αλγεβρικής έκφρασης των ιδιοτήτων τους με την βοήθεια των ΤΠΕ. Ειδικότερα μελετάται η επίδραση ενός μαθησιακού σεναρίου, το οποίο αξιοποιεί τον μικρόκοσμο eXpresser, για τη γενίκευση εικονιστικών μοτίβων. Η ανάλυση της δραστηριότητας 4 δυάδων μαθητών, Ε’ & ΣΤ’ δημοτικού, διαφαίνεται ότι, με την κατάλληλη διαμεσολάβηση του εκπαιδευτικού, είναι εφικτή η οικοδόμηση κατανόησης για βασικές αλγεβρικές έννοιες και η νοηματοδοτημένη προσπάθεια αλγεβρικής έκφρασης ιδιοτήτων του μοτίβου, η οποία παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές.

Λέξεις κλειδιά: Μοτίβα, μικρόκοσμος eXpresser, γενίκευση μοτίβων, άλγεβρα

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της ικανότητας αναγνώρισης και επικοινωνίας μοτίβων (patterns) θεωρείται θεμελιώδους σημασίας για την ανθρώπινη νόηση επειδή κάθε τομέας της γνώσης αφορά σε μοτίβα διαφόρων ειδών. Η σημασία των μοτίβων στη Μαθηματική επιστήμη θεωρείται τόσο μεγάλη ώστε πολλοί χαρακτηρίζουν τα Μαθηματικά ως «*Η επιστήμη των μοτίβων*» (π.χ. Steen, 1988; Fujita & Yamamoto, 2011)). Η τυπική απάντηση στο ερώτημα «Τι είναι μοτίβο;» δεν είναι εύκολη. Η Steen (1988:190) αναφέρει για τα μοτίβα ότι είναι «*η διαδικασία αναζήτησης μαθηματικών κανονικοτήτων και δομών*» «*είναι κάτι περισσότερο από μια γνωστική περιοχή, είναι μια διαδικασία, ένας τομέας μελέτης και μια συνήθεια του νου*». Κατά τον Burton (1982:40) υπάρχουν τα τυπικά, τα οπτικά (μοτίβα που εμφανίζονται με αληθινά αντικείμενα, με εικόνες, ή με σύμβολα), τα ακουστικά (με παλαμάκια, χτυπήματα τυμπάνου, νότες, ήχους ζώων κ.α.) και τα κινητικά μοτίβα (ακουμπώντας για παράδειγμα κυκλικά πρώτα τη μύτη, μετά το σαγόνι και τέλος τα αυτιά). Ο Rivera (2013:9) κατηγοριοποιεί τα είδη των μοτίβων που παρουσιάζονται στα σχολικά μαθηματικά ως εξής: συνεχή, επαναλαμβανόμενα, αναπτυσσόμενα, μειούμενα, μαθηματικούς αλγόριθμους, μαθηματικές έννοιες, άλλα αναδρομικά μοτίβα και άλλα χωρικά σχεδιασμένα (spatially drawn). Ο Van de Walle (2007:268-275) τα κατηγοριοποιεί σε επαναλαμβανόμενα μοτίβα, πίνακες και άλλα αριθμητικά μοτίβα και αναπτυσσόμενα μοτίβα. Τα μοτίβα έχουν γίνει, πρόσφατα σχετικά, σημαντική έννοια και στην Διδακτική των Μαθηματικών. Η αναγνώριση και η ανάλυση μοτίβων θεωρούνται σημαντικές συνιστώσες της νοητικής ανάπτυξης των νεαρών μαθητών, επιπλέον αποτελούν τη βάση της αλγεβρικής σκέψης (Lannin, 2005) επειδή διευκολύνουν

Κ. Παπανικολάου, Α. Γόγουλου, Δ. Ζυμπίδης, Α. Λαδιάς, Ι. Τζωρτζάκης, Θ. Μπράτιτσης, Χ. Παναγιωτακόπουλος (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου «Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία», σ. 171-182, Ανώτατη Σχολή ΠΑΙδαγωγικής & Τεχνολογικής Εκπαίδευσης, 21-23 Απριλίου 2017.ISSN 2529-0924, ISBN 978-618-83186-0-1.

την κατάκτηση της ικανότητας αφαίρεσης και γενίκευσης σχέσεων (Threlfal, 2004). Επιπρόσθετα, το να βρίσκει και να χρησιμοποιεί κάποιος μοτίβα θεωρείται μια σημαντική στρατηγική στα μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων (Stacey, 1989). Οι έρευνες σχετικά με τον ρόλο των μοτίβων στην Μαθηματική εκπαίδευση αυξάνονται διαρκώς τα τελευταία χρόνια. Ιδιαίτερα η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών στη μάθηση των μοτίβων κεντρίζει το ενδιαφέρον των ερευνητών ανοίγοντας νέα ερωτήματα και κατευθύνσεις. Στο παρόν άρθρο αναλύεται μια μελέτη περίπτωσης για την επίδραση ενός μαθησιακού σεναρίου, ορισμού επαναλαμβανόμενων εικονιστικών μοτίβων, στην ανάπτυξη προ-αλγεβρικών εννοιών και δεξιοτήτων. Το σενάριο αναπτύσσεται με τη βοήθεια του eXpresser (Noss et al., 2009) ενός ειδικά σχεδιασμένου λογισμικού μικρόκοσμου επεξεργασίας μοτίβων, ενώ οι μαθητές καλούνται να εκφράσουν αλγεβρικά σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων των μοτίβων. Στα επόμενα περιγράφεται αρχικά η σχέση της μελέτης των μοτίβων με την μάθηση της Άλγεβρας και της γενίκευσης, στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη ανασκόπηση εκπαιδευτικών ερευνών για τα μοτίβα, ακολουθεί η παρουσίαση του πειραματικού μέρους και συζήτηση των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Άλγεβρα, πρώιμη-Άλγεβρα και μοτίβα

Ο Mason (1998) θεωρεί την έκφραση γενικεύσεων ως τη βάση και ως έναν από τους δρόμους που οδηγούν στην άλγεβρα. Η αλγεβρική συλλογιστική που περιλαμβάνει την αναπαράσταση, τη γενίκευση και την τυποποίηση καταστάσεων, βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών. Η αναγνώριση και η επέκταση των μοτίβων αποτελούν μία σημαντική διαδικασία αυτής της συλλογιστικής.

Μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1990, η μελέτη της άλγεβρας, στις περισσότερες χώρες, ξεκινούσε στο Λύκειο, σε μαθητές που προετοιμαζόταν να γίνουν φοιτητές (Kieran, 1992:390). Σήμερα επικρατεί η άποψη ότι οι βασικές έννοιες που συνθέτουν τη σχολική άλγεβρα είναι προσιτές στους μαθητές πριν τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (πρώιμη άλγεβρα) και πως η καλλιέργεια της πρώιμης άλγεβρας διευκολύνει την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών (Loewenberg, 2003; Kaput, 1998; Schoenfeld, 1995). Το ενδιαφέρον για την πρώιμη οικοδόμηση αλγεβρικών εννοιών (όπως η μεταβλητή, οι αλγεβρικές εκφράσεις και η συνάρτηση) μέσω της μελέτης των μοτίβων έχει αναπτυχθεί σχετικά πρόσφατα στην Μαθηματική εκπαίδευση.

Σημαντικό ορόσημο για την αναγνώριση της αξίας των μοτίβων στην διδακτική προσέγγιση της συνάρτησης αποτελεί η συμπερίληψη τους στο κείμενο αρχών και προτύπων για τα σχολικά μαθηματικά του NCTM (2000) όπου στην ενότητα για την Άλγεβρα αναφέρεται ότι: *η Άλγεβρα μαθαίνεται καλύτερα ως ένα σύνολο εννοιών και τεχνικών σχετικών με την αναπαράσταση ποσοτικών σχέσεων και ως ένα είδος μαθηματικής σκέψης για την τυποποίηση μοτίβων, συναρτήσεων και γενικεύσεων. Παρά το γεγονός ότι πολλοί ενήλικες πιστεύουν ότι η άλγεβρα είναι κατάλληλη για μαθητές Γυμνασίου και μεγαλύτερους, ακόμα και νεαρά παιδιά μπορούν να ενθαρρύνονται στην αλγεβρική σκέψη καθώς μελετούν τους αριθμούς και τις πράξεις και καθώς διερευνούν μοτίβα και σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα αριθμών.* Έτσι η κατανόηση μοτίβων, σχέσεων και συναρτήσεων αποτελεί διακριτή κατηγορία μαθησιακών στόχων της άλγεβρας όπως και η, πιο συνηθισμένη, κατηγορία της αναπαράστασης και ανάλυσης μαθηματικών καταστάσεων με αλγεβρικά σύμβολα.

Στη χώρα μας το μοτίβο εισάγεται για πρώτη φορά ως διδακτέα ενότητα των Μαθηματικών σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ, 2003) και με βάση το οποίο διαμορφώθηκε το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ).

Η αξιοποίηση των μοτίβων στην μαθηματική εκπαίδευση από νεαρές ηλικίες υποστηρίζεται από αρκετούς ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών (Κολέζα, 2006; Skoumpourdi, 2013; 2016; Σκουμπουρδή, 2014). Η αναγνώριση και η επέκταση απλών μοτίβων μπορούν εύκολα να διερευνηθούν νωρίς στην τυπική εκπαίδευση ακόμα και από παιδιά του Νηπιαγωγείου (Van de Walle, 2007). Πολλά παιδιά στο νηπιαγωγείο μπορούν να επεξεργαστούν μοτίβα με συμβάσεις όπως π.χ. "ABAB". Πού βρίσκεται όμως η άλγεβρα στα μοτίβα αυτά; Καθώς τα παιδιά χρησιμοποιούν γράμματα ως μεταβλητές (ένα πράγμα παίρνει τη θέση ενός άλλου) ή αναγνωρίζουν κοινά μοτίβα που αφορούν σε διαφορετικές φυσικές μορφές κάνουν βήματα προς την αλγεβρική έκφραση και αναπαράσταση. Στο Δημοτικό σχολείο τα μοτίβα αξιοποιούνται, σταδιακά, για την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες μαθησιακές δραστηριότητες (Blanton & Kaput, 2004). Οι μαθησιακές δραστηριότητες μπορεί να αναφέρονται σε ιεραρχία, ανακατασκευή, αναγνώριση, επέκταση, συμπλήρωση ενδιάμεσου κενού και μετάφραση μοτίβων. Για τη σύνδεση με τις συναρτήσεις συχνά οι μαθητές παρακινούνται να εκφράζουν σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων σε διαδοχικούς όρους του μοτίβου και να τις διατυπώνουν συμβολικά.

Παρά την εύλογη θεώρηση της ενασχόλησης με τα μοτίβα ως βοηθητική για την κατανόηση της άλγεβρας, είναι συχνά διαπιστωμένο διδακτικό πρόβλημα, το πέρασμα από την επεξεργασία των μοτίβων στην τυπική γενίκευση και την αλγεβρικοποίηση (Dörfler, 2008). Αυτό ακριβώς το διδακτικό πρόβλημα απασχολεί την παρούσα εργασία στην οποία μέσα από το προτεινόμενο εκπαιδευτικό σενάριο και το ειδικό λογισμικό τα μοτίβα συνδέονται με τις αλγεβρικές εκφράσεις με τρόπο συνεκτικό και νοηματικό.

Τύποι και στρατηγικές γενίκευσης για την επεξεργασία μοτίβων

Ο Rivera (2013) κάνει λόγο για 3 τύπους συλλογιστικής οι οποίοι μπορούν να ενεργοποιηθούν όταν εκφράζεται μια γενίκευση. Αυτοί είναι η απαγωγή (abduction), η επαγωγή (induction) και η αναγωγή (deduction). Η απαγωγή περιλαμβάνει την αρχική δημιουργία μιας ή περισσότερων υποθέσεων (ή εικασιών), που στη συνέχεια υφίστανται επαλήθευση με επαγωγή. Η απαγωγή αφορά σε δημιουργία αυθεντικών ιδεών και επηρεάζεται από τη φαντασία και τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες. Αντίθετα, η επαγωγή αποδεικνύει (ή απορρίπτει) έναν απαγωγικό συλλογισμό δοκιμάζοντάς τον συστηματικά σε όλες τις ειδικές περιπτώσεις. Η αναγωγή, τέλος, προσδιορίζει τη λογική αναγκαιότητα ενός έγκυρου συμπεράσματος εφαρμόζοντας, μηχανιστικά, γενικούς κανόνες σε ειδικές περιπτώσεις. Οι λογικοί μηχανισμοί της απαγωγής, της επαγωγής και της αναγωγής εμπλέκονται στη γενίκευση των μοτίβων από τους Μαθηματικούς και τους μαθητές και γίνονται «ορατοί» μέσω των στρατηγικών που εφαρμόζουν αυτοί όταν επιλύουν προβλήματα γενίκευσης μοτίβων.

Σχήμα 1: Ένα από τα εικονικά μοτίβα που χρησιμοποιεί ο Radford (2000) σε μελέτες του

Ο Radford (2010:56) αναφέρει τρία επίπεδα αλγεβρικών γενικεύσεων: πραγματολογικό (factual), σχετικό με τα συμφραζόμενα (contextual) και συμβολικό (symbolic). Στο πραγματολογικό, η γενίκευση στηρίζεται σε ενέργειες που πραγματοποιούνται σε αριθμούς και οι δράσεις γίνονται από λέξεις, χειρονομίες και αντιληπτικές δραστηριότητες. Για παράδειγμα, ο Rivera (2013) αναφέρει για την περίπτωση της αναγνώρισης του μοτίβου στο σχήμα 1, για το πρώτο επίπεδο, το πραγματολογικό, μια ομάδα μαθητών 8ης τάξης παρατηρεί ότι «προστίθεται κάθε φορά το επόμενο βήμα δηλ. 1 + 2, 2 + 3, 3 + 4 οπότε ερωτώμενοι για το 25ο βήμα παραθέτουν μια πραγματολογική δομή «25+26». Στο δεύτερο επίπεδο γενίκευσης που στηρίζεται στα συμφραζόμενα έχουμε από τους μαθητές εκφράσεις του τύπου «*το επόμενο σχήμα*», «*η πρώτη γραμμή*» κ.α. Μεταβαίνουν από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Στο συμβολικό επίπεδο τα αντικείμενα και οι πράξεις που τα συνδέουν εκφράζονται με το αλφαριθμητικό σημειωτικό σύστημα της άλγεβρας. Για παράδειγμα ο Rivera (2013) αναφέρει την πρόταση και αιτιολόγηση n + (n + 1) ενός μαθητή για το μοτίβο στο προηγούμενο σχήμα. Ο Rivera (2015:169-187) αναφέρει, επίσης, τους εξής παράγοντες που διαμορφώνουν τη διαδικασία γενίκευσης των μοτίβων: *φύση και πηγές, τύποι των δομών, προσοχή και επίγνωση, αναπαραστάσεις και τα πλαίσια*.

Η Stacey (1989:151) αναφέρει, παρουσιάζοντας αρκετά παραδείγματα τις εξής στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για τη γενίκευση μοτίβων: μέτρησης, διαφοράς, ολόκληρου αντικειμένου (whole object), γραμμικές και αταξινόμητες. Ο Lannin (2005) επεκτείνοντας την κατηγοριοποίηση της Stacey (1989) περιγράφει τις στρατηγικές γενίκευσης μοτίβων όπως στον πίνακα 2.

Πίνακας 2: Στρατηγικές γενίκευσης (Lannin, 2005)

Στρατηγικές	**Περιγραφή**
Μη σαφείς	
Μέτρησης	Ζωγραφίζοντας μια εικόνα ή κατασκευάζοντας ένα μοντέλο για να αναπαραστήσουν μια κατάσταση, για να μετρούν το επιθυμητό χαρακτηριστικό.
Αναδρομής	Χτίζοντας πάνω στον προηγούμενο όρο ή όρους της ακολουθίας για να προσδιοριστεί ο επόμενος.
Σαφείς	
Ολόκληρου αντικειμένου (whole-object)	Χρησιμοποιώντας ένα τμήμα ως μονάδα για την κατασκευή μιας μεγαλύτερης μονάδας μέσω πολλαπλασιασμού.
Εικασίας και δοκιμής	Μαντεύοντας ένα κανόνα χωρίς τη συνειδητοποίηση του γιατί αυτός ο κανόνας ισχύει.
Βάση των συμφραζόμενων – περιστασιακή (contextual)	Κατασκευάζοντας έναν κανόνα βασισμένο στις παρεχόμενες πληροφορίες από την δεδομένη κατάσταση. Συσχέτιση του κανόνα με μια τεχνική μέτρησης

Κατά τους El Mouhayar & Jurdak (2015) οι στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για την επίλυση μοτίβων μπορεί να είναι απλές όπως η στρατηγική της μέτρησης που εστιάζει στη μέτρηση βήμα-βήμα, προοδευτικής πρόσθεσης (όπως η στρατηγική της αναδρομής) αλλά και πιο σύνθετες διατρέχοντας ένα πιο υψηλό επίπεδο μαθηματικής αιτιολόγησης όπως πολλαπλασιαστικές, ή/και στρατηγικές που συσχετίζουν ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές όπως η συναρτησιακή στρατηγική. Μια διδακτική παρέμβαση για την ανάπτυξη προαλγεβρικών εννοιών μέσω της μελέτης μοτίβων είναι φανερό ότι χρειάζεται να λαμβάνει υπόψη της τόσο το εξελικτικό μοντέλο των μαθητικών στρατηγικών όσο και τους παράγοντες που επιδρούν στην προσπάθεια γενίκευσης αυτών. Ειδικότερα οι παρεμβάσεις είναι λογικό να έχουν στόχο να συστηματικοποιήσουν την εφαρμογή των συλλογιστικών μηχανισμών της γενίκευσης από τους μαθητές, να ανιχνεύσουν και να εξελίξουν τις στρατηγικές τους (π.χ. από το πραγματολογικό επίπεδο στο συμβολικό επίπεδο) και τέλος να λαμβάνουν υπόψη τους παράγοντες που επιδρούν στην διαδικασία γενίκευσης ώστε να ευνοείται αυτή κατά τις μαθησιακές δραστηριότητες. Τα παραπάνω λαμβάνονται υπόψη στον σχεδιασμό του προτεινόμενου μαθησιακού σεναρίου ενώ χρησιμοποιούνται και για την συζήτηση των αποτελεσμάτων της εφαρμογής του.

Διδασκαλία και μάθηση αλγεβρικής γενίκευσης μοτίβων με ΤΠΕ

Από την πληθώρα των εκπαιδευτικών ερευνών σχετικά με τα μοτίβα στις ηλικίες του Δημοτικού διαπιστώνουμε ότι η ανάπτυξη της ικανότητας έκφρασης της γενίκευσης των μοτίβων με συμβατική αλγεβρική γραφή παραμένει χαμηλού ενδιαφέροντος. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Dörfler (2008:145) από τις έρευνες λείπουν τα στοιχεία και τα επιχειρήματα που να αποδεικνύουν ότι οι δραστηριότητες γενίκευσης παρέχουν έναν αποτελεσματικό δρόμο που οδηγεί στην άλγεβρα ακόμα και αν ερμηνεύονται με διαφορετικούς τρόπους αλγεβρικής σκέψης. Επιπλέον, ενώ πιστεύει πως η ανάγνωση αλγεβρικών όρων όπως η γενική δομή στα μοτίβα είναι σημαντικό να αποκτηθεί, θεωρεί πως η αλγεβρική γραφή δεν αναπτύσσεται απλά γενικεύοντας μοτίβα. Δεδομένου ότι το ενδιαφέρον της εργασίας αφορά στην σύνδεση της γενίκευσης μοτίβων με την αλγεβρική έκφραση με την αξιοποίηση των ΤΠΕ, εστιάζουμε επιλεκτικά σε εργασίες που αφορούν στην αναπαράσταση της γενίκευσης με αλγεβρικές παραστάσεις. Οι Cho et al (2012) μελέτησαν μαθησιακές δραστηριότητες γενίκευσης μοτίβων με το μικρόκοσμο JavaMAL. Οι μαθητές κατασκεύασαν μοτίβα με κύβους ενώ τους παρέχονταν εργαλεία έκφρασης προς υποστήριξη της διαδικασίας γενίκευσής τους. Οι ερευνητές ανέλυσαν τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης των μαθητών με βάση τις συμβολικές τους εκφράσεις και τις απαντήσεις τους σε pre-test και post-test. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συλλογιστική των μαθητών με τη χρήση του μικρόκοσμου έγινε πιο δομημένη και υποστηρίχθηκε η αλγεβρική σκέψη τους. Ωστόσο, ενώ κάποιοι μαθητές κατασκεύασαν γενικευμένες εκφράσεις με τέλεια χρήση της μεταβλητής (n), παρατηρήθηκε πως πολλοί μαθητές δεν κατανοούν την έννοια των μεταβλητών. Παρόμοια, οι Geraniou & Mavrikis (2015) μέσα από τα παραδείγματα που παρουσιάζουν υποστηρίζουν ότι η μεταφορά από την «άλγεβρα» του ειδικά σχεδιασμένου μικρόκοσμου eXpresser στην τυπική άλγεβρα είναι εφικτή. Αναφέρουν επίσης ότι υπάρχει η ανάγκη ύπαρξης δραστηριοτήτων διασύνδεσης οι οποίες έχουν στόχο τη ρητή σύνδεση με την άλγεβρα. Προς την κατεύθυνση αυτή στην παρούσα εργασία μελετάται η επίδραση ενός ειδικά σχεδιασμένου μαθησιακού σεναρίου για την ρητή σύνδεση της γενίκευσης εικονιστικών μοτίβων, κατασκευασμένων από τους ίδιους τους μαθητές, με την αλγεβρική έκφραση των ιδιοτήτων τους, με την βοήθεια των ΤΠΕ. Ειδικότερα, στην έρευνα επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί ο μικρόκοσμος eXpresser επειδή θεωρούμε ότι είναι αναπτυξιακά κατάλληλος, προσεκτικά σχεδιασμένος και πειραματικά μελετημένος για την ενασχόληση των μαθητών με τα μοτίβα.

Ο μικρόκοσμος eXpresser

Ο ανοικτός διερευνητικός μικρόκοσμος eXpresser (http://expresser.lkl.ac.uk/) αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του project MiGen (http://www.lkl.ac.uk/projects/migen/) το οποίο σχεδιάστηκε στο London Knowledge Lab για υποστήριξη των μαθηματικών γενικεύσεων μαθητών 11-14 χρονών (Noss et al., 2009).

Στον eXpresser, οι μαθητές κατασκευάζουν μοτίβα με χρωματιστά τετραγωνάκια και καλούνται να βρουν αλγεβρικές εκφράσεις που στηρίζουν τα μοντέλα τους (πίνακας 4). Επίσης μπορούν να χρησιμοποιούν αριθμητικές ιδιότητες του μικρόκοσμου που λειτουργούν ως μεταβλητές για να εκφράσουν αλγεβρικά τις γενικεύσεις των μοτίβων που μελετούν. Μια τυπική δραστηριότητα στο eXpresser είναι να προσπαθήσουν οι μαθητές να αναπαράγουν το μοτίβο που εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά του χώρου εργασίας. Ο μικρόκοσμος δίνει στους μαθητές μεγάλη ελευθερία να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα σε ένα πλήθος διαφορετικών αλλά ισοδύναμων τρόπων. Πρόσφατα (2015) ο eXpresser έγινε διαθέσιμο μέσω του διαδικτύου.

Ερευνητικές συνθήκες

Στόχος της έρευνας είναι η μελέτη της επίδρασης ενός ειδικά σχεδιασμένου μαθησιακού σεναρίου στην ανάπτυξη προ-αλγεβρικών εννοιών και δεξιοτήτων με την βοήθεια του μικρόκοσμου eXpresser. Σύμφωνα με το σενάριο οι μαθητές ορίζουν επαναλαμβανόμενα εικονιστικά μοτίβα της επιλογής τους και στη συνέχεια καλούνται να εκφράσουν αλγεβρικά σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των μοτίβων αυτών. Ειδικότερα, μελετάται η μέσω της κατάλληλης διδακτικής διαχείρισης, δυνατότητα ανάπτυξης προ-αλγεβρικών εννοιών (μεταβλητή, συνάρτηση) και δεξιοτήτων (περιγραφή φαινομένων με γραμμικές αλγεβρικές εκφράσεις $y=ax+b$) καθώς και η ανάπτυξη της ικανότητας γενίκευσης. Η ερευνητική μεθοδολογία που εφαρμόστηκε είναι η μελέτη περίπτωσης επειδή επιτρέπει τη διερεύνηση σε βάθος καταστάσεων διδασκαλίας και μάθησης των μαθητών σε πραγματικές συνθήκες (Cohen et al, 2000). Ως μονάδα ανάλυσης επιλέχθηκε η δυάδα μαθητών. Για την συλλογή ερευνητικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό καταγραφής της οθόνης εργασίας και των διαλόγων των παιδιών (Camtasia Studio 8), καθώς και οι σημειώσεις του ερευνητή και των μαθητών. Στην έρευνα έλαβαν μέρος 8 μαθητές της Ε΄ και της ΣΤ΄ τάξης ενός τετραθέσιου δημόσιου Δημοτικού Σχολείου σε χωριό της Ρόδου οι οποίοι επιλέχθηκαν τυχαία. Οι μαθητές οργανώθηκαν σε τέσσερις ομάδες όπως φαίνονται στον πίνακα 3 :

Πίνακας 3: Τα ονόματα, οι συντομεύσεις και οι τάξεις των μαθητών ανά ομάδα

Ομάδα	Ονόματα μαθητών	Συντόμευση	Τάξη
1η	Βαλάντης & Δήμητρα	Β&Δ	Ε/Ε
2η	Γαλήνη & Τριαντάφυλλος	Γ&Τ	Ε/ΣΤ
3η	Βερενίκη & Σταμάτης	Β&Σ	Ε/ΣΤ
4η	Κυριακή & Σάββας	Κ&Σ	Ε/ΣΤ

Για την έρευνα έχουν τηρηθεί οι κανόνες της δεοντολογίας και στο πλαίσιο των κανόνων αυτών τα ονόματα των παιδιών δεν είναι πραγματικά. Μια εβδομάδα περίπου πριν την πραγματοποίηση της κύριας έρευνας προηγήθηκε παρουσίαση του μικρόκοσμου eXpresser με την ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης σε ολόκληρη την τάξη με τη χρήση βιντεοπροβολέα και ασύρματων συσκευών εισόδου (πληκτρολόγιο και ποντίκι).

Αποτελέσματα

Την ημέρα των βιντεοσκοπήσεων όλες οι ομάδες, με συνεργασία και ιδιαίτερη προσήλωση στη δραστηριότητα, αρχικά, σύμφωνα με το σενάριο, έφτιαξαν ένα δικό τους σχέδιο. Όρισαν, είτε ολόκληρο το σχέδιο, είτε μέρος αυτού, ως πυρήνα και κατασκεύασαν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο (Φάση 1η). Στη συνέχεια μέτρησαν τα τετραγωνάκια που έβλεπαν στην οθόνη τους για κάθε χρώμα. Μετά με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού και του μικρόκοσμου «ξεκλείδωσαν» (ορολογία του eXpresser) τον αριθμό των επαναλήψεων καθιστώντας τον μεταβλητή (Φάση 2η). Στο τέλος, με καθοδηγούμενη, από τον εκπαιδευτικό, διερεύνηση έφτιαξαν, μέσα στον μικρόκοσμο, ένα γενικό κανόνα μέτρησης τόσο του αριθμού των τετραγώνων για κάθε χρώμα (Φάση 3η), όσο και του συνολικού αριθμού τετραγώνων για το σχέδιό τους, σε αλγεβρική μορφή (Φάση 4η). Ο πίνακας 4 δείχνει το χρόνο υλοποίησης της κάθε φάσης, το συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης όλης της δραστηριότητας, τους κανόνες μέτρησης που κατασκεύασαν τα παιδιά για κάθε χρώμα, τις λανθασμένες προσπάθειες εξεύρεσης του γενικού κανόνα και τον επιτυχημένο αλγεβρικό τύπο έκφρασης του γενικού κανόνα μέτρησης όλων των τετραγώνων που προέκυψε από κάθε ομάδα.

Συγκεντρώνονται στοιχεία του ερευνητικού ερωτήματος τα οποία αναλύονται παρακάτω όπου ακολουθεί η ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων σύμφωνα με την αποδελτίωση του βίντεο καταγραφής της πειραματικής εφαρμογής του μικρόκοσμου ανά ομάδα.

Πίνακας 4: Στοιχεία ερευνητικού ερωτήματος από όλες τις ομάδες

Ομάδα	**Φάση 1η**	**Φάση 2η**	**Φάση 3η**	**Φάση 4η**	**Συνολικός χρόνος**	**Κανόνες μέτρησης κάθε χρώματος (3η φάση)**	**Μορφές λανθασμένων προσπαθειών**	**Γενικός κανόνας μέτρησης όλων των τετραγώνων (4η φάση)**
1η	6'45''	10'53''	12'05''	14'59''	44'02''	Κόκκινο: 18a Πράσινο: 28a Μπλε: 11 Κίτρινο: 6	63 63a 46+a	46a+17
2η	1' 44''	4'12''	7' 24''	1' 34''	14' 54''	Πράσινο: 2a Μπλε: 2a Κόκκινο: a Κίτρινο: a	--	6a
3η	4'18''	6'50''	16'08''	2'35''	29'51''	Μπλε: 7a Κόκκινο: 8a Πράσινο: 11a Κίτρινο: 10a	-	36a
4η	2'25''	1'35''	19'10''	19'25''	42'35''	Πράσινο: 9l Κόκκινο: 4l Κίτρινο: 1l	14l 23l	14l +9

1η ομάδα: Βαλάντης και Δήμητρα (Β & Δ)

Το σχέδιο που κατασκεύασε η 1η ομάδα αποτελείται από σπίτι, γρασίδι, ουρανό και ήλιο (πίνακας 5). Ο πυρήνας του μοτίβου που επιλέχθηκε από τους μαθητές ήταν το σπίτι με το γρασίδι. Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας οι μαθητές προσπαθώντας να εκφράσουν το γενικό κανόνα μέτρησης όλων των τετραγώνων δοκίμασαν να βάλουν στο μικρόκοσμο τις εκφράσεις 63, 63a και 46+a. Το 63 προέκυψε υπολογίζοντας τα τετράγωνα που αντιστοιχούν σε ένα σπίτι με γρασίδι, τον ήλιο και τον ουρανό. Αφού έλαβαν την ανατροφοδότηση από το μικρόκοσμο δοκίμασαν το 63a υπολογίζοντας τον ήλιο και τον ουρανό στις επαναλήψεις. Στη συνέχεια ενώ προηγουμένως είχαν σκεφτεί να βάλουν 46a βάζουν 46+a. Τελικά με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού κατασκεύασαν τον αλγεβρικό τύπο 46a+17 που εκφράζει σωστά τον αριθμό όλων των τετραγώνων για κάθε επανάληψη.

Η υποστήριξη του εκπαιδευτικού (Ε) στις φάσεις 3 και 4 σε πρώτο επίπεδο είναι με καθοδηγούμενη ανακάλυψη να οδηγήσει του μαθητές να βρουν τον αριθμό των τετραγώνων για 1 επανάληψη, για 2, 3, 4, 5, 10, 100, ν επαναλήψεις. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα:

Δ: Για τα 2 τα σπίτια είναι 36 τα κόκκινα.
Β: Ναι όμως πρέπει να βρούμε ένα αριθμό που να κάνει για όλα.
Ε: Αυτό είναι, ένας αριθμός που να κάνει για όλα. Για 1 είπες Δέσποινα 18, για 2…
Δ: Για 2 36
Ε: Για γυρίστε σελίδα και δείτε ένα πινακάκι, θα σας βοηθήσει να το συμπληρώσετε… Γυρίστε σελίδα… Ωραία. Εδώ πέρα έχουμε ένα πινακάκι που έχει επαναλήψεις και αριθμό τετραγώνων. Για 1 επανάληψη πόσα τετράγωνα χρειάζεστε;
Β: 1. Για μια;
Ε: Για μια επανάληψη, δηλαδή το α να είναι 1, πόσα τετράγωνα θέλετε;
Δ: Εε (ψιθυριστά) 18.
Ε: 18. Για 2;
Δ: Για 2 36.
Ε: Για 3;
Δ: 36 και 18;
Β: 54
Δ: 54
Ε: Άρα τι κάνετε κάθε φορά;
Β & Δ: Προσθέτουμε.
Ε: Πόσα;
Β & Δ: 18
Ε: Για να βρείτε τα κόκκινα έτσι;
Β & Δ: Ναι
Ε: Πολύ ωραία. Κάθε φορά προσθέτετε 18. Για 1, για 2, για 3 το βρίσκεις. Για 10; (Προβληματίζονται και οι δύο)
Β: (Ψιθυρίζει στον εαυτό του κάνοντας μια χειρονομία με την οποία είναι σαν να λέει που να το βρει όλο αυτό;)
Ε: Για 1 είπες 18. Για 2; 18 και 18.
Β & Δ: 36.
Ε: Για 3;
Β & Δ: 54.
Ε: Πώς το βρήκατε;
Β & Δ: Προσθέτουμε άλλο ένα 18.
Ε: Προσθέτατε ή αλλιώς τι κάνατε; Ή προσθέτετε ή;
Β: Πολλα… (διστάζει).
Ε: Για 4;
Β: Κάνουμε 4 επί 18.
Ε: Ορίστε;
Β: Κάνουμε 4 επί 18;
Ε: Ωραία. Για 5;
Β & Δ: 5 επί 18.
Ε: Για 10;
Δ: 10 επί 18.
Ε: Για 100;

Δ: 100 επί 18.
Ε: Για α;
Β: 18 επί α;
Ε: Άψογος.

Στον παραπάνω διάλογο με καθοδηγούμενη ανακάλυψη από τον εκπαιδευτικό και την εικονιστική συμβολή του μικρόκοσμου, οι μαθητές μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα οδηγούνται από το πραγματολογικό επίπεδο αλγεβρικών γενικεύσεων, στο σχετικό με τα συμφραζόμενα και τέλος στο αλγεβρικό επίπεδο (Radford, 2010; Rivera, 2013). Οι στρατηγικές γενίκευσης (Lannin, 2005) που ακολουθούν οι μαθητές με την παρέμβαση του εκπαιδευτικού αλλάζουν από μέτρησης, σε αναδρομής, ολόκληρου αντικειμένου και τέλος σε εικασίας και δοκιμής (πίνακας 2). Η επιλογή για καθοδηγούμενη ανακάλυψη ενδεχομένως σε μεταγενέστερη παρέμβαση να μην επαναλαμβάνονταν αφήνοντας πολύ περισσότερο χρόνο στους μαθητές να συνεργαστούν και να διερευνήσουν μέσα από το μικρόκοσμο.

2η ομάδα: Γαλήνη και Τριαντάφυλλος (Γ & Τ)

Το σχέδιο που έφτιαξε η 2η ομάδα αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο αποτελεί και τον πυρήνα του επαναλαμβανόμενου μοτίβου που κατασκεύασαν με τη βοήθεια του μικρόκοσμου (πίνακας 5). Παρατηρούμε πώς ο χρόνος ολοκλήρωσης της 4ης φάσης είναι πολύ μικρός όπως και ότι δεν υπήρξαν λανθασμένες προσπάθειες εισαγωγής του γενικού κανόνα μέτρησης όλων των τετραγώνων και αυτό πολύ πιθανό να οφείλεται στην απλότητα του σχεδίου που δημιουργήθηκε από τα παιδιά αλλά και στην ομοιότητα του αλγεβρικού τύπου με αυτούς που δημιουργήθηκαν για κάθε χρώμα στην 3η φάση.

3η ομάδα: Σταμάτης και Βερενίκη (Σ & Β)

Το σχέδιο που κατασκεύασε η 3η ομάδα αποτελείται από ένα σπίτι το οποίο αποτέλεσε και τον πυρήνα του μοτίβου που κατασκεύασαν. (πίνακας 5). Και σε αυτή την περίπτωση της 3ης ομάδας όπως και με την 2η ομάδα παρατηρούμε πώς ο χρόνος ολοκλήρωσης της 4ης φάσης είναι πολύ μικρός όπως και ότι δεν υπήρξαν λανθασμένες προσπάθειες εισαγωγής του γενικού κανόνα μέτρησης όλων των τετραγώνων και αυτό πολύ πιθανό να οφείλεται στην απλότητα του σχεδίου που δημιουργήθηκε από τα παιδιά αλλά και στην ομοιότητα του αλγεβρικού τύπου με αυτούς που δημιουργήθηκαν για κάθε χρώμα στην 3η φάση.

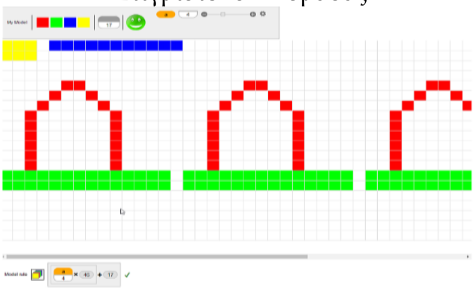
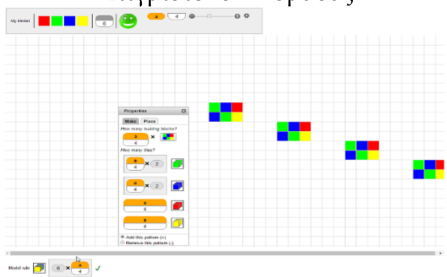
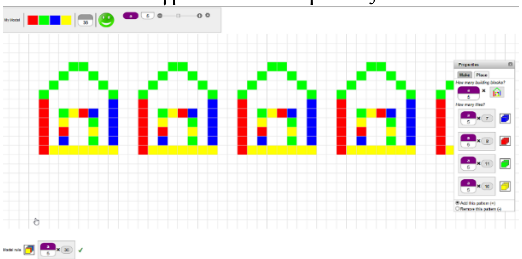
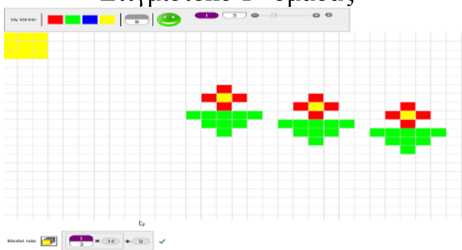
4η ομάδα: Σάββας και Κυριακή (Σ & Κ)

Το σχέδιο που κατασκεύασε η 4η ομάδα αποτελείται από λουλούδι και ήλιο. Ο πυρήνας του μοτίβου που επιλέχθηκε από τους μαθητές ήταν το λουλούδι (πίνακας 5). Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας οι μαθητές προσπαθώντας να εκφράσουν το γενικό κανόνα μέτρησης όλων των τετραγώνων δοκίμασαν να βάλουν στο μικρόκοσμο τις εκφράσεις 14l και 23l. Ο αλγεβρικός τύπος 14l κατασκευάστηκε υπολογίζοντας τον κανόνα μέτρησης για τα λουλούδια, αψηφώντας τα τετράγωνα του ήλιου. Ο αλγεβρικός τύπος 23l δημιουργήθηκε αφού συνυπολόγισαν τον ήλιο αλλά αυτή τη φορά εντάσσοντάς τον μέσα στο μοτίβο της επανάληψης ενώ δεν επαναλαμβάνεται. Τελικά με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού κατασκεύασαν τον αλγεβρικό τύπο 14l+9 που εκφράζει σωστά τον αριθμό όλων των τετραγώνων για κάθε επανάληψη.

Συγκεντρωτικά, βλέποντας τον πίνακα 4 παρατηρούμε πως η 2η και η 3η ομάδα, οι οποίες επέλεξαν όλο το αρχικό σχέδιό τους ως πυρήνα του μοτίβου τους, τελείωσαν σε λιγότερο χρόνο. Αυτό οφείλεται και στην ομοιότητα των τύπων της 4ης φάσης με αυτούς της 3η φάσης.

Στην 3η φάση όλοι οι τύποι για όλες τις ομάδες είναι απλές αναλογίες (y=ax) όπου a οι επαναλήψεις του μοτίβου (ένας αριθμός από το 1-10, λόγω προεπιλογής του μικρόκοσμου ώστε να μπορούν να φαίνονται οι επαναλήψεις στην πλατφόρμα) και x ο αριθμός των τετραγώνων κάθε χρώματος του πυρήνα του μοτίβου. Επίσης, παρατηρούμε πως στην πρώτη και στην τέταρτη ομάδα που επέλεξαν να υπάρχει έξω από το μοτίβο τους κάποιο σταθερό σημείο όπως ο ουρανός με τον ήλιο στην 1η ομάδα και ο ήλιος στην 4η ομάδα, σε αντίθεση με τη 2η και 3η ομάδα που ολόκληρο το σχέδιό τους αποτέλεσε τον πυρήνα του μοτίβου τους, χρειάστηκε περισσότερος χρόνος στην 4η φάση και πως σε αυτές τις ομάδες έχουμε λανθασμένες προσπάθειες εξεύρεσης του γενικού κανόνα μέτρησης όλων των τετραγώνων. Οι ομάδες φαίνεται να δυσκολεύονται να εκφράσουν γενικεύσεις με σταθερό όρο (y=ax+b) περισσότερο από τις απλές αναλογίες (y=ax). Στον πίνακα 5 υπάρχουν στιγμιότυπα από τα σχέδια που κατασκεύασαν συγκεντρωτικά και οι 4 ομάδες.

Πίνακας 5: Στιγμιότυπα των σχεδίων που κατασκεύασαν και οι 4 ομάδες

Στιγμιότυπο 1ης ομάδας	Στιγμιότυπο 2ης ομάδας
	
Στιγμιότυπο 3ης ομάδας	Στιγμιότυπο 4ης ομάδας
	

Σύνοψη-Συζήτηση

Οι εκπαιδευτικές διαστάσεις της μελέτης των μοτίβων απασχολεί πολλούς ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών επειδή εκτός από κεντρική μαθηματική έννοια αποτελεί και σημαντικό εκπαιδευτικό μέσο. Πολλοί αποκαλούν τα ίδια τα μαθηματικά επιστήμη των μοτίβων. Η ενασχόληση με τα μοτίβα, μεταξύ πολλών, μπορεί να οδηγήσει σε κατάκτηση πολλών αφηρημένων γνωστικών δεξιοτήτων (Papic, 2007), σε γενίκευση και αφαίρεση σχέσεων (Threlfal, 2004), σε στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (Stacey, 1989) και θέτει τις βάσεις ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης (Lannin, 2005; Clements & Sarama, 2009). Παρά το γεγονός ότι η μελέτη των μοτίβων θεωρείται σήμερα ευρέως ως βασική για την οικοδόμηση των αλγεβρικών εννοιών, το πέρασμα από τα μοτίβα στις αλγεβρικές συμβολικές παραστάσεις παραμένει ένα σημαντικό διδακτικό πρόβλημα. Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μελέτη περίπτωσης, με την αξιοποίηση του μικρόκοσμου eXpresser, ειδικά για το πρόβλημα της σύνδεσης της γενίκευσης των μοτίβων με την ανάπτυξη της ικανότητας αλγεβρικής περιγραφής σχέσεων μέσω κατάλληλου μαθησιακού σεναρίου και διδακτικής διαχείρισης. Από την έρευνα φάνηκε ότι, και οι τέσσερις ομάδες με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού και τη χρήση του μικρόκοσμου, μπόρεσαν να εκφράσουν με αλγεβρικό τύπο ένα γενικό κανόνα μέτρησης των τετραγώνων του μοτίβου που κατασκεύασαν. Κατά την διάρκεια της μαθησιακής δραστηριότητας έδειξαν προσήλωση, αλληλεπίδρασαν και συνεργάστηκαν προκειμένου να επιτύχουν τον στόχο τους. Ο μικρόκοσμος eXpresser φαίνεται να νοηματοδοτεί ως ένα βαθμό, για τα παιδιά, την αλγεβρική έκφραση των ιδιοτήτων του μοτίβου επειδή με τον τρόπο αυτό μπορεί να επαληθεύει την γενίκευση του αρχικού μοτίβου. Οι μαθητές εμφάνισαν σκέψη και στα τρία επίπεδα του Rivera (2013). Από πλευράς στρατηγικών έχουμε ενδείξεις για μέτρηση, αναδρομή, ολόκληρου αντικειμένου και εικασία και δοκιμή (Lannin, 2005). Από πλευράς ειδών σκέψης για γενίκευση έχουμε ενδείξεις για απαγωγή και δοκιμή, μέσω σύνταξης ελέγχου αλγεβρικών εκφράσεων στο λογισμικό, καθώς και αναγωγή η οποία πυροδοτήθηκε κυρίως μέσω της ανατροφοδότησης του λογισμικού. Δεν έχουμε δηλαδή απόδειξη μέσω επαγωγής εφόσον την διαδικασία της εξαντλητικής δοκιμής την αναλαμβάνει, τρόπον τινά, το λογισμικό. Ο εκπαιδευτικός επηρεασμένος από την προτεινόμενη παιδαγωγική στρατηγική των ερευνητών του eXpresser διαχειρίστηκε την μαθησιακή κατάσταση προσανατολίζοντας τους μαθητές στο στόχο, διευκολύνοντας τους στην χρήση του λογισμικού, επισημαίνοντας τους τις δυνατότητες του για έκφραση και έλεγχο των αλγεβρικών παραστάσεων της γενίκευσης και υποστηρίζοντας τη σκέψη των μαθητών. Συνεκτιμώντας τα ευρήματα της έρευνας είναι δυνατό να υποστηριχθεί ότι η κατάλληλη χρήση του eXpresser είναι δυνατό να βοηθήσει στην ανάπτυξη μαθησιακά πλούσιων εμπειριών και να διευκολύνει την σύνδεση της γενίκευσης μοτίβων με την αλγεβρική έκφραση σχέσεων, όπως υποστηρίζουν και οι ερευνητές της ομάδας ανάπτυξης του Geraniou & Mavrikis (2015). Οι μαθητές φαίνεται ότι δυσκολεύονται όμως να κατανοήσουν και να εκφράσουν αλγεβρικά αριθμητικές σχέσεις σε μοτίβα και να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής παρά την υποστήριξη της νοηματοδότησής της από το λογισμικό. Ενδεχόμενα μια πιο προγραμματιστική σύνδεση της παραγωγής μοτίβων μέσα από εκπαιδευτικά περιβάλλοντα προγραμματισμού να βοηθούσε περισσότερο για την κατάκτηση της έννοιας αυτής διεπιστημονικά. Η εικασία αυτή αποτελεί πρόταση για μελλοντική έρευνα όπως και η πιο συστηματική μελέτη του περάσματος από τις υπολογιστικές γενικεύσεις με αλγεβρική γραφή στις συμβατικές συμβολικές εκφράσεις με μολύβι και χαρτί, εφόσον κάτι τέτοιο παραμένει ακόμα ζητούμενο.

Αναφορές

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135-142. Oslo: PME.

Burton, G. M. (1982). Patterning: powerful play. *School Science and Mathematics*, 82(1), 39-44.

Cho, H., Kim, H., Shin, D., & Lee, J. (2012). Exploring Pattern Generalization in the Logo-based Microworld. In *Proceedings of the Seventeenth Asian Technology Conference in Mathematics*, December, 16-20. Bangkok, Thailand: Mathematics & Technology, LLC

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education.* 5th Ed, London: Routledge Falmer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM*, 40(1), 143-160.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2015). Variation in strategy use across grade level by pattern generalization types. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(4), 553-569.

Fujita, T., & Yamamoto, S. (2011). The development of children's understanding of mathematical patterns through mathematical activities. *Research in Mathematics Education*, 13(3), 249–267. http://doi.org/10.1080/14794802.2011.624730

Geraniou, E., & Mavrikis, M. (2015). Building Bridges to Algebra through a Constructionist Learning Environment. *Constructivist Foundations*, 10(3), 321-330.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium, 25-26. National Research Council*, National Academy Press Washington, DC.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 390-419. New York: Macmillan.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, 7(3), 231-258.

Loewenberg, D. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Rand Corporation.

Mason, J. (1998). Researching from the inside in mathematics education, in A. Sierpinska and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain*: A Search for Identity, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 357-377.

National Council of Teachers of Mathematics – NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: NCTM.

Noss, R., C. Hoyles, M. Mavrikis, E. Geraniou, S. Santos and D. Pearce. (2009). Broadening the sense of `dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *Special Issue of the International Journal on Mathematics Education (ZDM)*: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies 41(5), 493-503.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer Science & Business Media

Rivera, F. (2015). The Distributed Nature of Pattern Generalization. *PNA*, 9(3), 165-191.

Schoenfeld, A. (1995). Report of Working Group 1. In C. B. Lacampagne (Ed.), *The algebra initiative colloquium*: Vol. 2: Working group papers, 11–18. Washington: US Department of Education, OERI.

Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance levels on patterning. *International Journal for Mathematics in Education*, HMS i JME, 5, 108-131.

Skoumpourdi, C. (2016). Patterns for kindergartners: a developmental framework. *In B. Maj-Tatsis, M Pytlak & E. Swoboda (Eds.) CME Inquiry Based Mathematical Education*, (pp. 107-116). University of Rzeszow, Rzeszow, Poland.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(29), 616.

Threlfall, J. (2004). Repeating patterns in the early primary years. *In A. Orton (Ed.), Patterns in the teaching and learning of mathematics*, 18–30. London, England: Cassell.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Williams, J. M. B. (2007). *Elementary and middle school mathematics. Teaching development.* Boston: Pearson.

ΔΕΠΠΣ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών.* Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Ανακτήθηκε στις 15 Δεκεμβρίου 2016 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps

Κολέζα Ευγενία (2006), *Μαθηματικά και σχολικά Μαθηματικά*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Σκουμπουρδή, Χ. (2014). Μοτίβα στην καθημερινότητα και στο νηπιαγωγείο. *5ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (ΕνΕΔιΜ): Τα Μαθηματικά στο σχολείο και στην καθημερινή ζωή*, Φλώρινα. (CD-ROM).