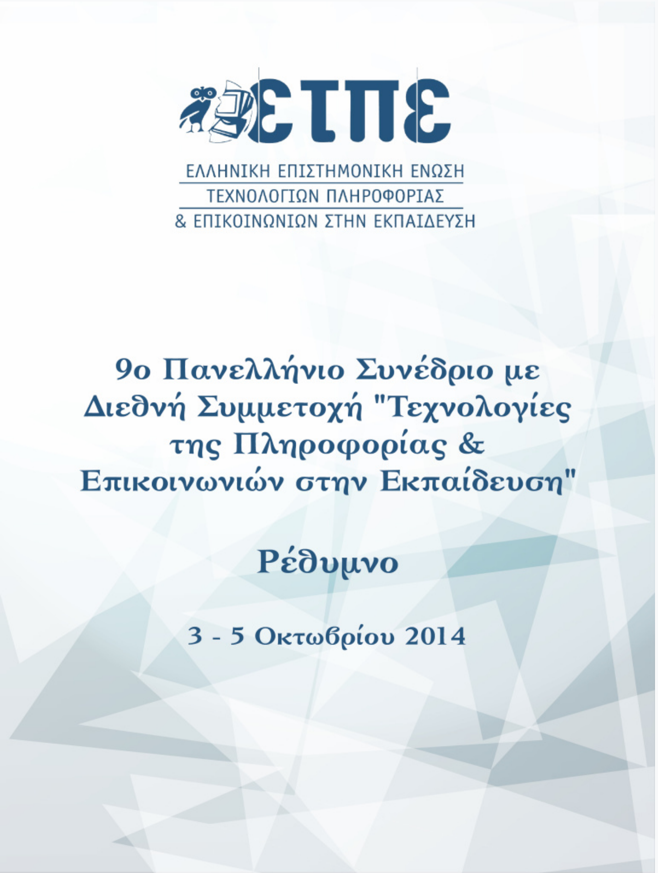
Συνέδρια της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης Τεχνολογιών Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση

(2014)

9ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή "Τεχνολογίες της Πληροφορίας & Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση"



Η αναλογία στην Τριγωνομετρια

Δήμητρα Τζούμπα, Σπύρος Μαυρουδής

Η αναλογία στην Τριγωνομετρια

Τζούμπα Δήμητρα[1], Μαυρουδής Σπύρος[2]
dtzoumpa@gmail.com, smayroudis@sch.gr
[1]Καθηγήτρια Μαθηματικών, MSc Ρομποτική & Αυτόματος Έλεγχος, Υ/δντρια Γυμνασίου Αμπελακίων Σαλαμίνας
[2] Μαθηματικός Επιμορφωτής ΚΣΕ

Περίληψη

Σε ένα συνεργατικό πλαίσιο στην Γ΄ Τάξη του Γυμνασίου Αμπελακίων Σαλαμίνας, διασυνδέονται και συσχετίζονται έννοιες από την Τριγωνομετρία με έννοιες από την Άλγεβρα και την Γεωμετρία. Οι μαθητές που συμμετείχαν, πειραματίστηκαν με την μελέτη των ιδιοτήτων του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζεται από μια οξεία γωνία [σταθερή σε θέση και μέγεθος] και μια μεταβαλόμενου μήκους υποτείνουσας. Ανακάλεσαν απ΄την μνήμη τους τον ορισμό των ανάλογων ποσών. Ασχολήθηκαν με την έννοια και τα χαρακτηριστικά της ομοιότητας δύο τριγώνων. Διερεύνησαν τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών του τριγώνου καθώς και την ύπαρξη εξάρτησής τους από την σταθερή γωνία. Τέλος, εφάρμοσαν τα συμπεράσματα από την προηγούμενη διερεύνηση στο ορθογώνιο τρίγωνο, οδηγούμενοι στην κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών. Στην εργασία αυτή, ενεπλάκησαν οι μαθητές σε δραστηριότητες, κατά τις οποίες εξασκήθηκαν με στόχο να παρατηρούν, να συνεργάζονται, να εικάζουν, να επαληθεύουν και να συνδέουν συμμεταβολές και αναλλοίωτα με μαθηματικές έννοιες.

Λέξεις - κλειδιά: Ποσά ανάλογα, Συνάρτηση y = ax, Ομοιότητα Τριγώνων, Τριγωνομετρικοί Αριθμοί.

Εισαγωγή

Οι τρόποι αξιοποίησης των ψηφιακών εργαλείων στη σχολική τάξη των Μαθηματικών, και ιδιαίτερα η φύση και τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν μαθητές και εκπαιδευτικοί, έχουν αποτελέσει εδώ και χρόνια κεντρικό σημείο αιχμής στο πλαίσιο του ευρύτερου προβληματισμού που αφορά την ένταξη της ψηφιακής τεχνολογίας στο σχολείο (diSessa, Hoyles & Noss, 1995; Goldenberg, 1999; Hoyles, 2001).

Η προοπτική χρήσης της τεχνολογίας στο μάθημα, σε αντίθεση με την ευρέως θεωρούμενη αυταπόδεικτη αξία της, φέρνει στο προσκήνιο όλες τις παραμέτρους που σχετίζονται με τους ρόλους και τις δραστηριότητες των συμμετεχόντων στη διδακτική πράξη (Κυνηγός & Δημαράκη, 2002), την ανάγκη μελέτης των μαθηματικών εννοιών που ευνοεί ένα υπολογιστικό περιβάλλον (Sutherland & Balacheff, 1999), το είδος των ανατιθέμενων στους μαθητές έργων (Hoyles, 2001) και, γενικότερα, το πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία (Nardi, 1996). Η προσέγγιση αυτή υπαγορεύεται από την καταλυτική επιρροή της χρήσης της τεχνολογίας σε όλα τα επίπεδα της σχεδίασης και της εξέλιξης του μαθήματος στην τάξη, στα οποία συμπεριλαμβάνονται στοιχεία όπως η συνεργατική μάθηση σε ομάδες, η αλλαγή των παραδοσιακών ρόλων δασκάλων και μαθητών και η ενίσχυση της ανάπτυξης μαθητοκεντρικών διδακτικών μοντέλων, όπου ο δάσκαλος έχει τη δυνατότητα να παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία ενεργά, ως σύμβουλος και συνεργάτης των παιδιών (Hoyles & Noss, 1992).

Τα ερωτήματα που αναδύονται είναι πολλά και κρίσιμα: Ποια μορφή είναι σκόπιμο να έχουν οι δραστηριότητες στις οποίες θα κληθούν να εμπλακούν οι μαθητές στη διάρκεια ενός μαθήματος με χρήση ψηφιακών εργαλείων στην τάξη; Ποιες είναι οι παράμετροι με βάση τις οποίες καθορίζεται ο ρόλος της υπολογιστικής τεχνολογίας στη μαθησιακή διαδικασία σε αυτή την περίπτωση; Τι αλλάζει στο μάθημα, όταν αυτό περιλαμβάνει τη χρήση υπολογιστών; Τι μπορεί να κάνει ο μαθητής και ο εκπαιδευτικός με την τεχνολογία αυτή που είτε είναι αδύνατο είτε πολύ δύσκολο πρακτικά, όταν δεν την διαθέτει; Τι είδους δραστηριότητες λαμβάνουν χώρα και πώς αυτό επηρεάζει τους ρόλους των συμμετεχόντων στη διδακτική πράξη;

Καθώς η εκμάθηση των Μαθηματικών αποτελεί μια εμπειρική, υποθετικο - παραγωγική διαδικασία, ζητούμενο είναι η δημιουργία και ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα και συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2007). Για την περίπτωση των Μαθηματικών η ψηφιακή τεχνολογία μπορεί να αξιοποιηθεί ακριβώς σε αυτό το πλαίσιο, όταν χρησιμοποιούνται ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εκφραστικά εργαλεία σε συνδυασμό με εργαλεία υποστήριξης συλλογικού διαλόγου και επιχειρηματολογίας (Ματσαγγούρας, 1987; Κουτσελίνη & Θεοφιλίδης 2002). Τα εργαλεία αυτά επίσης, υποστηρίζουν την διασύνδεση μεταξύ μαθηματικών περιοχών που είναι κατακερματισμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα, όπως η Άλγεβρα και η Γεωμετρία. Με τα εργαλεία αυτά οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες εμπλοκής με τη λογικο-μαθηματική σκέψη, τις οποίες είναι αδύνατον να έχουν χωρίς τα δυναμικά αυτά μέσα. Ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλοεξαρτώμενες παραστάσεις, είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν τη Διδακτική των Μαθηματικών (Κυνηγός 2007). Με αυτό το σκεπτικό, θελήσαμε να δοκιμάσουμε σε σχολική τάξη μαθητών μια εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, στον χώρο της Γεωμετρίας με άμεση συσχέτιση με την Άλγεβρα.

Μεθοδολογία

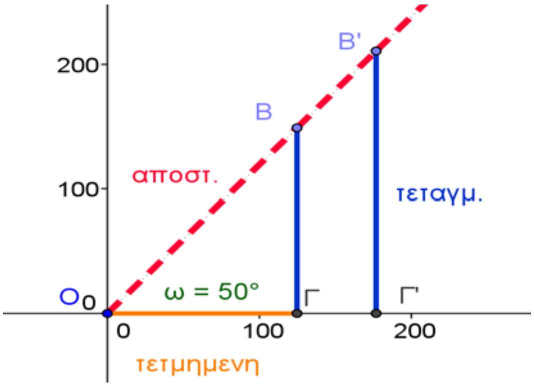
Η εργασία αυτή διεξάχθηκε στην σχολική αίθουσα με την χρήση υπολογιστή που εκτελούσε το πρόγραμμα Geogebra, διασυνδεδεμένο με διαδραστικό πίνακα και έντυπων φύλλων εργασίας. Ο χρόνος υλοποίησής της ήταν τρεις (3) διδακτικές ώρες. Οι είκοσι μαθητές (έντεκα αγόρια και εννέα κορίτσια), εργάστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων και καθοδηγούμενοι από το φύλλο εργασίας, τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν και να εξερευνήσουν συγκεκριμένα σχήματα, καθώς και να απαντήσουν σε συγκεκριμένες ερωτήσεις. Κατά αυτόν τον τρόπο, έγινε προσπάθεια να ελεγχθούν διακριτικά τα συμπεράσματά τους και να καθοδηγηθούν έτσι, ώστε μέσα από αυτά να αντιληφθούν καλύτερα κανόνες και έννοιες. Καθόλη την διάρκεια, ενθαρρύνονταν συνεχώς να επεκτείνουν την διερεύνηση τους.

Στόχοι

Σε αυτή την εργασία, τέθηκαν συγκεκριμένοι στόχοι. Ο πρώτος εξ αυτών ήταν σε κοινωνικό – πολιτισμικό επίπεδο, να μάθουν οι μαθητές να συνεργάζονται μεταξύ τους, να λειτουργούν ως μέλη μιας ομάδας και να τοποθετούνται με τεκμηριωμένες απόψεις. Ο επόμενος στόχος ήταν διδακτικός, δηλαδή, να μπορούν οι μαθητές να κάνουν εικασίες – πειραματισμούς και να επαληθεύουν ή και όχι, τις εικασίες τους, χρησιμοποιώντας μικρόκοσμους με την βοήθεια του λογισμικού Geogebra. Τέλος, σε γνωστικό επίπεδο, στόχος είναι αν μπορούν οι μαθητές να διαπιστώνουν ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι ανεξάρτητοι από τα μήκη των πλευρών της γωνίας, αλλά εξαρτώνται μόνο από την περιεχόμενη γωνία. Επιπλέον να οπτικοποιήσουν την σχέση δύο ανάλογων μεγεθών μέσα από αλγεβρική αναπαράσταση του σημείου που τα συνδέει (μέγιστη προστιθέμενη αξία).

1η Δραστηριότητα

Σε φύλλο εργασίας, δόθηκε στους μαθητές, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, γωνία ω = 50^0 με κορυφή το σημείο Ο (0, 0), την μια πλευρά της πάνω στον άξονα Οx, και τυχαίο σημείο Β πάνω στην άλλη πλευρά, σχηματίζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ. Ζητήθηκε να κατασκευάσουν ένα άλλο τρίγωνο, με κορυφή το σημείο Ο (0, 0), την μία πλευρά πάνω στον άξονα Οx και ένα άλλο τυχαίο σημείο Β′ έτσι ώστε η περιεχόμενη γωνία Β′Οx να είναι 50^0, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1 Οι γωνίες ΒΟx & Β′Οx

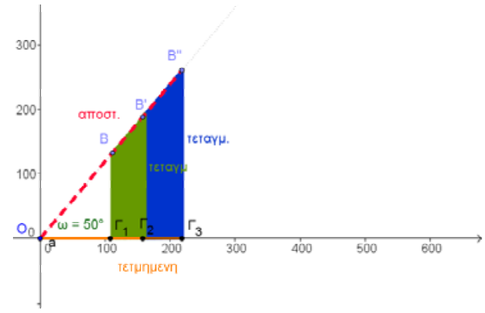
Οι μαθητές, κατηγοριοποίησαν τις παραμέτρους σε σταθερές και μεταβαλλόμενες. Ως παράμετροι ορίστηκαν: η τετμημένη του τυχαίου σημείου Β, η τεταγμένη του τυχαίου σημείου Β, η απόσταση του τυχαίου σημείου Β από το σημείο Ο(0, 0), η γωνία ΒΟΓ, ΟΒΓ, ΟΓΒ, καθώς και του νέου σημείου Β’. Σκοπός εδώ ήταν να ενεργοποιηθούν όλοι ανεξαιρέτως οι μαθητές, παρατηρώντας το σχήμα και καταγράφοντας τις σκέψεις τους, ώστε να συνειδητοποιήσουν την απλότητα της παρατήρησης αλλά και την απαραίτητη διαδικασία καταγραφής των παρατηρήσεων. Ενθαρρύνθηκαν θετικά από το πρώτο τους βήμα, για να συνεχίσουν έστω και δειλά. Όταν μοιράστηκαν τελικά τις απαντήσεις τους με τους υπόλοιπους μαθητές, τους επισημάνθηκε η ευκολία με την οποία κατέληξαν σε αυτές.

Στην δραστηριότητα αυτή, ένα μέλος από κάθε ομάδα, χρησιμοποίησε το πρόγραμμα Geogebra, ώστε να προσδιορίσει το «δικό τους» νέο σημείο Β’. Από την τρίτη ομάδα και μετά, ήταν φανερό πως το νέο τυχαίο σημείο Β’ ο μαθητής το περίμενε να βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα της πλευράς ΟΒ που τους είχε δοθεί αρχικά από την άσκηση.

Οι μαθητές θυμήθηκαν από την ύλη της Β’ Γυμνασίου ότι ένα σημείο που κινείται πάνω σε μια ευθεία της μορφής y = αx έχει συντεταγμένες με σταθερό πηλίκο, άρα τα ποσά αυτά είναι ανάλογα.

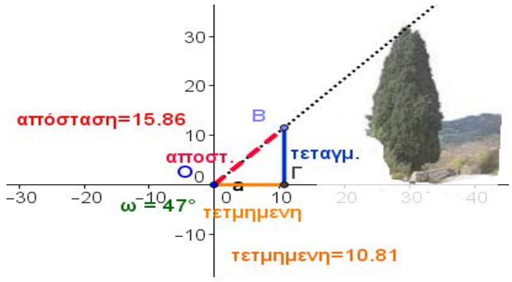
2η Δραστηριότητα

Σ’ αυτό το σημείο ξεκινά η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία, καθώς αναμένεται ο μαθητής να ανακαλέσει από τη μνήμη του μέσα από τη διαδικασία της παρατήρησης, την σύνδεση της έννοιας του σταθερού λόγου με την ομοιότητα τριγώνων. Οι μαθητές με την βοήθεια του Geogebra μετακίνησαν το σημείο Β πάνω στην ευθεία y=αx και δίνοντας ίχνος στην κίνηση του σημείου, διαπίστωσαν ότι δημιουργούνται όμοια τρίγωνα, όπως φαίνονται και στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2 Όμοια τρίγωνα

Για να εμπεδώσουν οι μαθητές την πρακτική χρησιμότητα του σταθερού λόγου, τους δόθηκε ως εφαρμογή η μέτρηση του ύψους ενός δέντρου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3



Σχήμα 3 Υπολογισμός ύψους δέντρου

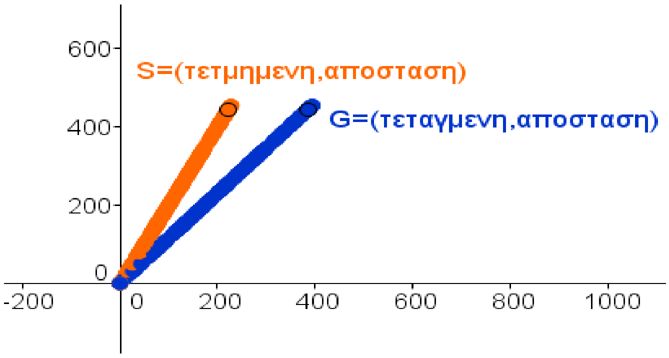
Μέσα από την ομοιότητα των τριγώνων, προέκυψε και η αναλογία των πλευρών τους. Προκύπτει λοιπόν για τους μαθητές, η μαθηματική αιτιολόγηση αυτού που ανακάλεσαν από την μνήμη τους στο τέλος της 1ης Δραστηριότητας. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να δημιουργήσουν τον λόγο $\frac{\text{τεταγμένη}}{\text{τετμημένη}} = \frac{y(B)}{x(B)}$, ο οποίος για τις διάφορες θέσεις του B παραμένει σταθερός. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ρωτήθηκαν οι μαθητές τί θα συμβεί με τον λόγο των συντεταγμένων του σημείου B, αν αλλάξει η γωνία ω. Το μεγαλύτερο ποσοστό απάντησε ότι θα αλλάξει και ο λόγος αυτός. Κάνοντας χρήση του λογισμικού (Geogebra) το δεύτερο μέλος της κάθε ομάδας, έλεγξε την ορθότητα του ισχυρισμού του.

Η εφαρμογή αυτή, προβλημάτισε την τάξη ως προς τον τρόπο επίλυσης του ζητήματος αλλά οι πρώτες σκέψεις έλεγαν να βρεθεί η γωνία που σχηματίζεται από την κορυφή του δέντρου στο σημείο που πέφτει η σκιά της στο έδαφος. Με τη βοήθεια του Σχήματος 3 υπολόγισαν τους λόγους του σημείου B και μετά τους αντίστοιχους λόγους του σημείου B′ καταλήγοντας στο ύψος τους δέντρου. Η σχετική διαδικασία εφαρμόσθηκε με την βοήθεια του λογισμικού Geogebra στις μετρήσεις και τους αναγκαίους υπολογισμούς. Η διαδικασία αυτή ήθελε να αλλάξει το γνωστικό δυναμικό των μαθητών και είχε ως αποτέλεσμα την ποικιλία των εμπειριών, τις οποίες το κάθε άτομο μέσα από την ομάδα επεξεργάστηκε κατά μοναδικό τρόπο.

Για την ιδιαιτερότητα αυτού του λόγου, τέθηκε στους μαθητές το ερώτημα αν αξίζει να δοθεί κάποια ιδιαίτερη ονομασία σε αυτόν, «βαπτίζοντάς τον» εφαπτομένη.

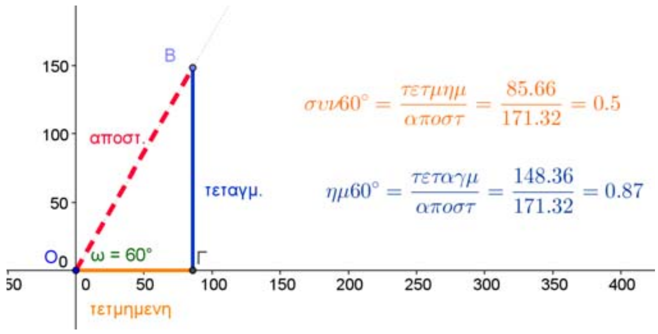
3η Δραστηριότητα

Το επόμενο βήμα ήταν να συνδεθούν τα μεγέθη x(B) και η απόσταση d σε ένα σημείο S(x(B), d) και να μετακινηθεί το B (με γωνία σταθερή π.χ. 600). Τότε παρατηρήθηκε ότι η πορεία του S(x(B), d) είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 4), άρα τα ποσά (x(B), d) οφείλουν να είναι ανάλογα.



Σχήμα 4 Τα ποσά x(B), d οφείλουν να είναι ανάλογα

Στην συνέχεια επιβεβαιώθηκε η διατήρηση του σταθερού λόγου με το λογισμικό, οπότε και αποφασίστηκε να δοθεί και όνομα δηλαδή συν(ω) = $\frac{\text{τεταγμένη}}{\text{απόσταση}} = \frac{x(B)}{d}$ = σταθερό (Σχήμα 5). Όμοια, συνδέθηκαν τα μεγέθη y(B) και η απόσταση d σε ένα σημείο G(y(B), d) (Σχήμα 4) από τα οποία προκύπτει το ημ(ω)=$\frac{\text{τετμημένη}}{\text{απόσταση}} = \frac{y(B)}{d}$ = σταθερό (Σχήμα 5)



Σχήμα 5 Οι τριγωνεμετρικοί αριθμοί

Χρησιμοποιώντας το Geogebra, ορίστηκαν οι τύποι του ημιτόνου και συνημιτόντου της γωνίας ω, με σκοπό όλες οι ομάδες που συμμετείχαν να παρατηρήσουν τους υπολογισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μεταβάλλοντας το άνοιγμα της γωνίας ω. Ένας μαθητής από κάθε ομάδα, άλλαζε το άνοιγμα της γωνίας ω στον διαδραστικό πίνακα με την γραφίδα. Με τη βοήθεια του Geogebra σχεδιαζόταν για τις διάφορες θέσεις του σημείου B, η κίνηση των σημείων S, G ενώ διαπίστωνε την ύπαρξη της σταθερής αναλογίας μεταξύ των δύο ποσοτήτων που σχηματίζονταν ζωντανά μπροστά του.

4η Δραστηριότητα

Στην τελευταία δραστηριότητα, οι μαθητές επαλήθευσαν τους υπολογισμούς που έκαναν για την εύρεση της τιμής των τριγωνομετρικών αριθμών, με τις τιμές του σχολικού τους βιβλίου. Επιλέχθηκαν καταρχήν οι συνηθισμένες γωνίες των 0ο, 30ο, 45ο, 60ο, 90ο, 180ο & 270ο και στη συνέχεια μερικές τυχαίες. Κατά τη διαδικασία αυτή, παρατήρησαν ότι η τιμή των τριγωνομετρικών αριθμών δεν ήταν πάντα θετικός αριθμός, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις κάποιες ήταν αρνητικές και κάποιες θετικές. Πειραματιζόμενες οι ομάδες με το Geogebra, μεταβάλλανε σειριακά την γωνία ω και παρατηρούσαν την εναλλαγή των προσήμων και τα κατέγραφαν, όπως φαίνεται στον Πίνακα 1.

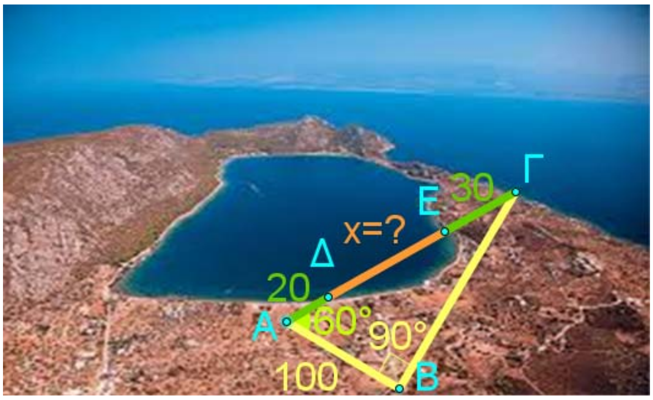
Πίνακας 1. Πρόσημα τριγωνομετρικών

	1ο Τεταρτημόριο	2ο Τεταρτημόριο	3ο Τεταρτημόριο	4ο Τεταρτημόριο
Ημίτονο	+	+	-	-
Συνημίτονο	+	-	-	+
Εφαπτομένη	+	-	+	-

Αξιολόγηση

Επιδίωξη της εργασίας ήταν η διασύνδεση των εξής εννοιών: ανάλογα ποσά, ομοιότητα τριγώνων και τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Για την επιβεβαίωση των στόχων της εργασίας μετά το πέρας του μαθήματος, δόθηκε στους μαθητές ένα νέο φύλλο εργασίας, όπου ζητούμενο ήταν η «γεφύρωση της λίμνης». Βάσει της Εικόνας 1, οι μαθητές θα έπρεπε να βρουν το μήκος της υποτείνουσας που υπολειπόταν και βρισκόταν άνωθεν της λίμνης.



Εικόνα 1 Η γεφύρωση της λίμνης

Το 80% των μαθητών απάντησε σωστά, το 15% έδωσε λάθος απάντηση, ενώ το υπόλοιπο 5% δεν έφτασε σε αποτέλεσμα. Η αξιολόγηση της τάξης δεν εμφανίζει τέτοια κατανομή απόδοσης στα Μαθηματικά. Ως αξιολόγηση, δεν λαμβάνουμε υπόψιν μας μόνο την βαθμολογία των γραπτών, αλλά και τη δυνατότητα αφομοίωσης και αντίληψης των εννοιών που παρουσιάστηκαν. Αυτό επηρεάζεται από την παρατηρητικότητα και τη συνδυαστική σκέψη των μαθητών που έχει ως αποτέλεσμα την καταγραφή των συμπερασμάτων τους.

Η ευκολία που παρείχε το λογισμικό, τόσο κατά την μετακίνηση των σημείων όσο και στον υπολογισμό των τριγωνομερικών τιμών για τις διάφορες γωνίες ω, έδινε στο διδάσκοντα τη μέγιστη διευκόλυνση. Οι μαθητές δεν ενεπλάκησαν σε τυποποιημένες μετρήσεις και επαναϋπολογισμούς τιμών. Κάθε μεταβολή στο σχήμα αποτυπώνονταν άμεσα και αριθμητικά. Η αλληλεπίδραση μεταξύ της μετακίνησης του σημείου και της αλλαγής των μετρίσιμων μεγεθών, προσέλκυε την προσοχή των μαθητών. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα που διαισθανόταν ο μαθητής, επιβεβαιωνόταν άμεσα χωρίς να του αποσπά δυνάμεις η διαδικασία των αριθμητικών πράξεων.

Οι μαθητές στο τέλος, εξέφρασαν και την άποψή τους σχετικά με την διαδικασία που ακολουθήθηκε, για αυτό το είδος μαθήματος που βίωναν για πρώτη φορά. Στο σχετικό ερωτηματολόγιο, οι απόψεις τους έδειχναν ότι η προσέγγιση που ακολουθήθηκε βάδισε με τρόπο που τους ήταν αρεστός. Προτίμησαν τη συνεργασία μεταξύ τους στην εργασία που έπρεπε να κάνουν αντί να εργάζονται κατά μόνας. Το τελευταίο ενισχύεται από το γεγονός ότι, μέσω την ομαδικότητας, υπήρξε βελτίωση στην επιθυμία του συνεργάτη – συμμαθητή να ασχοληθεί ουσιαστικά και με ενδιαφέρον για τον τρόπο, ανακάλυψης – διδασκαλίας. Το ίδιο όμως, παρατήρησαν και οι ίδιοι για το εαυτό τους. Ουσιαστικά, η μάθηση μετατράπηκε από την «ανακάλυψη», σε μια εν γένει εμπειρία του μαθητή.

Για την επαλήθευση της αποτελεσματικότητα του εγχειρήματος, η εργασία παρουσιάστηκε και σε ένα άλλο τμήμα της Γ΄ Τάξης του σχολείου. Προέκυψαν τα ίδια αποτελέσματα που οδήγησαν στα ίδια συμπεράσματα.

Συμπεράσματα

Οι μαθητές με τη βοήθεια του φύλλου εργασίας, του διαδραστικού πίνακα και του λογισμικού Geogebra μπόρεσαν να απαντήσουν και να κατανοήσουν τα ερωτήματα που τους τέθηκαν και στη συνέχεια να γενικεύσουν σε κανόνες και τύπους.

Ήταν εμφανής η μεγάλη ευκολία μέσω ενός λογισμικού να οπτικοποιείται άμεσα η διασύνδεση μεταξύ δύο μεγεθών, μέσω της διαδραστικής αλληλεπίδρασης αιτίας και αιτιατού. Λόγω του ότι έχει θεωρηθεί ότι ένας τρόπος υπέρβασης της δυσκολίας κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων και παραστάσεων είναι η επίλυση προβλημάτων, η οποία συνδέει τον αλγεβρικό συμβολισμό με πραγματικές καταστάσεις, στην εργασία αυτή συνδέθηκε ένα γεωμετρικό πρόβλημα με ένα αλγεβρικό. Έτσι περιορίστηκε η αποστήθιση κανόνων και μεθόδων από τους μαθητές μας με το να κατανοήσουν τις έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν. Τα ψηφιακά εργαλεία για την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών, καθώς διαθέτουν ικανότητες επικοινωνίας με τον χρήστη, κατάφεραν να μετασχηματίσουν την διδακτική διαδικασία. Η διάδραση και ο δυναμικός χαρακτήρας της τεχνολογίας στην περίπτωση αυτή, άλλαξαν κατά το καλύτερο αυτά που η Διδακτική μπορεί να προσφέρει στην μαθησιακή διαδικασία. Με την εφαρμογή αυτή ο μαθητής μπαίνει στο ρόλο του επιστήμονα που κάνει εικασίες, υποθέσεις, πειράματα, διατυπώνει δικά του θεωρήματα και ενδεχομένως τα αναθεωρεί μέσα από την διάψευσή τους. Επιπρόσθετα, η διασύνδεση συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού με επίκεντρο την έννοια της μεταβλητής προσφέρει ένα παραγωγικό πεδίο διασύνδεσης μεταξύ εννοιών της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας.

Αναφορές

Κυνηγός, Χ. (2007). *Το Μάθημα της Διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση της Σύγχρονης τεχνολογίας για την διδακτική των μαθηματικών*. Από την Έρευνα στην Σχολική Τάξη. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Κυνηγός, Χ. & Δημαράκη, Ε. (επιμ.) (2002) *Νοητικά Εργαλεία και Πληροφοριακά Μέσα*. Αθήνα: Καστανιώτης.

Ματσαγγούρας, Η. (1987). *Ομαδοκεντρική διδασκαλία και μάθηση*. Αθήνα: Γρηγόρης.

Κουτσελίνη, Μ. & Θεοφιλίδης, Χρ. (2002). *Διερεύνηση και συνεργασία για μια αποτελεσματική διδασκαλία.* Αθήνα: Γρηγόρης.

Goldengerg, P. (1999). Principles, art and craft in curriculum design: The case of Connected Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4Q191-224, Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C. (2001). From describing to designing mathematical activity: The next step in developing the social approach to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 273-286.

Hoyles, C. & Noss, R. (1992). A pedagogy for mathematical microworlds. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 31-57.

Nardi, B. (1996) (Ed.) *Context and Consciousness: Activity Theory and Human-Computer Interaction*. MIT Press.

diSessa, A., Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.) (1995). *Computers and Exploratory Learning*. Berlin: Springer-Verlag.

Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 1-26.