

# Πανελλήνιο Συνέδριο της Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση

(2023)

13ο Πανελλήνιο Συνέδριο Διδακτικής των Φυσικών Επιστημών και Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση: Πρακτικά Εκτεταμένων Συνόψεων των Εργασιών



Μελέτη της εμφάνισης της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής στο Γενικό Λύκειο

Αντώνιος Ματσίγκος, Γεώργιος Κρητικός

doi: [10.12681/codiste.5281](https://doi.org/10.12681/codiste.5281)

# ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΤΗΣ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Αντώνιος Ματσίγκος<sup>1</sup>, Γεώργιος Κρητικός<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπ/σης, <sup>2</sup>ΕΔΙΠ ΤΕΠΑΕΣ Παν. Αιγαίου

[matsigkosa@gmail.com](mailto:matsigkosa@gmail.com)

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εστιάζει στη μελέτη της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Γενικού Λυκείου. Σκοπός είναι να καταγραφούν συστηματικά οι εμφανίσεις των αναπαραστάσεων της συνάρτησης και να διερευνηθούν οι μετασχηματισμοί της σε επίπεδο επεξεργασίας, μετατροπής και σύνθετου μετασχηματισμού. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν πως η ημιτονοειδής συνάρτηση στα Μαθηματικά εμφανίζεται κυρίως μονό-λειτουργικά σε δραστηριότητες επιπέδου διαδικαστικής γνώσης και τυποποιημένης προσέγγισης. Στη Φυσική και στις δραστηριότητες που εμπλέκεται η συνάρτηση, φαίνεται να εμφανίζεται σε μεγαλύτερο βαθμό, πολύ-λειτουργικά, όπου ενεργοποιούνται περισσότερα από ένα μητρώα αναπαράστασης, ευνοώντας τον γνωστικό τους συντονισμό.

Λέξεις κλειδιά: ημιτονοειδής συνάρτηση, αναπαραστάσεις, μετασχηματισμοί

## STUDY OF THE APPEARANCE OF THE SINE FUNCTION IN MATHEMATICS AND PHYSICS TEXTBOOKS IN HIGH SCHOOL

Antonios Matsigkos<sup>1</sup>, Georgios Kritikos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Secondary School Teacher, <sup>2</sup>Faculty member, University of the Aegean

[matsigkosa@gmail.com](mailto:matsigkosa@gmail.com)

## ABSTRACT

*This paper focuses on the study of the sine function in the textbooks of Mathematics and Physics of the General High School. The aim is to systematically document the appearances of representations of the function and investigate its transformations at the level of processing, transformation, and complex transformation. The results of the research show that the sinusoidal function in Mathematics appears mainly mono-functionally in procedural knowledge and standardized approach level activities. In Physics and in the activities where the function is involved, it seems to appear to a greater extent, multi-functionally, where more than one representational register is activated, favouring their cognitive coordination.*

**Keywords:** sine function, representations, transformations

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία εστιάζει στις εμφανίσεις της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια, οι οποίες δεν φαίνεται να ευνοούν τη διεπιστημονική διάσταση της διδασκαλίας μέσα στο εκπαιδευτικό πλαίσιο και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών. Ως αποτέλεσμα, εμφανίζονται διδακτικές ασυνέχειες που παρεμποδίζουν την ανάδυση των νοημάτων της συνάρτησης, δημιουργώντας επιστημολογικά και μαθησιακά εμπόδια (Μαναρίδης & Κολλάρας, 2014). Κατά τον Duval (2006) αυτό που έχει σημασία δεν είναι οι αναπαραστάσεις, αλλά ο μετασχηματισμός τους.

Η παρούσα εργασία εστιάζει, αρχικά, στην καταγραφή των εμφανίσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης, τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική του Γενικού Λυκείου. Η εστίαση, όμως, γίνεται στους μετασχηματισμούς των αναπαραστάσεων της συνάρτησης, βασισμένη στη σημαντική θεωρία του Duval (2006), σύμφωνα με την οποία υπάρχουν δύο τύποι μετασχηματισμών. Ο πρώτος τύπος είναι η επεξεργασία και περιλαμβάνει μετασχηματισμούς που συμβαίνουν εντός του ίδιου μητρώου, ενώ ο δεύτερος είναι η μετατροπή μέσα από την οποία οι μαθητές είναι δυνατόν να αγγίζουν τη γνωστική πολυπλοκότητα της κατανόησης των Μαθηματικών (Duval, 2006).

## ΜΕΘΟΔΟΣ

Για τη διερεύνηση της δυναμικής της παρουσίας της ημιτονοειδούς συνάρτησης στη σχολική διδακτική πραγματικότητα, στην παρούσα εργασία έγινε, αρχικά, καταγραφή των εμφανίσεων των αναπαραστάσεων της συνάρτησης ημίτονο και, στη συνέχεια, ακολούθησε γνωστική ανάλυση των εμφανίσεων της στα εγχειρίδια των Μαθηματικών και της Φυσικής του Λυκείου. Λέγοντας γνωστική ανάλυση εννοούμε την καταγραφή των διαδικασιών μετασχηματισμού στις οποίες εμπλέκεται η συνάρτηση ημίτονο. Το δείγμα της έρευνας είναι τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών και Φυσικής του Λυκείου, με εστίαση στις τάξεις της Β' και Γ' Λυκείου στις οποίες εμφανίζεται η συνάρτηση ημίτονο. Μονάδα ανάλυσης ορίστηκε κάθε είδους εμφάνιση της ημιτονοειδούς συνάρτησης μέσα στα θεωρητικά τμήματα των εγχειριδίων, αλλά και μέσα στις δραστηριότητες που αφορούν λυμένα παραδείγματα, ερωτήσεις, ασκήσεις, προβλήματα.

Πίνακας 1. Διαστάσεις και υποδιαστάσεις ανάλυσης των εμφανίσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης.

Διαστάσεις ανάλυσης	Υποδιαστάσεις
<b>A. Εμφανίσεις αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης</b>	Λεκτική
	Αλγεβρική
	Γραφική
	Αριθμητική/Συμβολική/Εικονιστική
<b>B. Πλαίσιο</b>	Αόριστο
	Επιστημονικό
	Καθημερινό
<b>Γ. Τύπος γνωστικής απαίτησης μετασχηματισμού</b>	Επεξεργασία
	Μετατροπή
	Σύνθετος μετασχηματισμός

## Παράδειγμα εμφάνισης της ημιτονοειδούς συνάρτησης στα Μαθηματικά

Εικόνα 1. Λυμένο παράδειγμα 1. Άλγεβρας Β' Λυκείου (Ανδρεαδάκης et al., 2022:80).

**1° Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu x$ .**

### ΛΥΣΗ

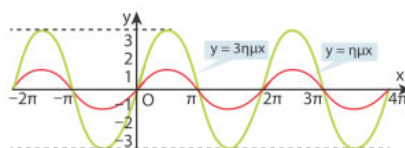
Οι τιμές της συνάρτησης  $f(x) = 3\eta\mu x$  είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$ . Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , αφού ισχύει:

$$f(x + 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu(x + 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu x = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

$$\text{και } f(x - 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu(x - 2\pi) = 3 \cdot \eta\mu x = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έχοντας υπ' όψιν τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της  $f(x) = 3\eta\mu x$ .

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu x$	0	3	0	-3	0



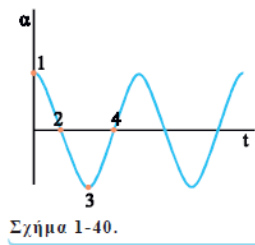
Το κείμενο της συγκεκριμένης δραστηριότητας περιέχει τη συνάρτηση ημίτονο, η οποία εμφανίζεται με την αλγεβρική της μορφή. Ως εκφώνηση δεν έχει πλαίσιο, καθώς η περιγραφή του ερωτήματος αφορά ξεκάθαρο μαθηματικό μετασχηματισμό. Η γνωστική απαίτηση στο επίπεδο του μετασχηματισμού αφορά μετατροπή από το αλγεβρικό μητρώο στο μητρώο των καρτεσιανών γραφικών παραστάσεων. Τόσο το μητρώο πηγή (αλγεβρική αναπαράσταση), όσο και το μητρώο στόχος (γραφική αναπαράσταση), εμφανίζονται ως μονό-λειτουργικά, καθώς για την επίλυση δεν απαιτούνται σύνθετες διαδικασίες επεξεργασίας στα μητρώα. Κατά την επίλυση της μετατροπής το σχολικό βιβλίο κάνει χρήση του πίνακα τιμών ως μεταβατικό σημειωτικό σύστημα κατά τον Duval (2006), όπου φαίνονται τα μέγιστα, τα ελάχιστα και η περίοδος της συνάρτησης. Στη δραστηριότητα αυτή δίδεται έμφαση στον σταθερό συντελεστή που βρίσκεται εκτός της συνάρτησης και είναι ο αριθμός 3. Ο σταθερός αυτός συντελεστής διαμορφώνει το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης. Η περίοδός τους καθορίζεται από το περιεχόμενο της ημιτονοειδούς συνάρτησης και παρατηρούμε πως είναι ίδια και για τις δυο συναρτήσεις.

## Παράδειγμα εμφάνισης της ημιτονοειδούς συνάρτησης στη Φυσική

Εικόνα 2. Κεφ. 1, Ερ. 1.7, Φυσική Γ' Τάξη Γενικού Λυκείου, Τεύχος Γ' (Ιωάννου et al., 2022:32).

**1.7** Το διάγραμμα του σχήματος 1.40 παριστάνει την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, σε συνάρτηση με το χρόνο.

- Ποιο σημείο του διαγράμματος αντιστοιχεί σε απομάκρυνση  $-A$ ;
- Στο σημείο 4 του διαγράμματος η ταχύτητα της ταλάντωσης είναι θετική, αρνητική ή μηδέν;
- Σε ποια απομάκρυνση αντιστοιχεί το σημείο 4 του διαγράμματος;



Σχήμα 1-40.

Η δραστηριότητα είναι ερώτηση στο κεφάλαιο των μηχανικών ταλαντώσεων, η οποία περιέχει τρία υπό-ερωτήματα. Η ημιτονοειδής συνάρτηση εμφανίζεται με την καρτεσιανή γραφική αναπαράσταση. Η δραστηριότητα έχει επιστημονικό πλαίσιο, καθώς περιγράφει την κίνηση που εκτελεί ένα σώμα στο αυστηρό πλαίσιο του φαινομένου της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Ως προς τις γνωστικές απαιτήσεις μετασχηματισμού, είναι επεξεργασία, καθώς οι μαθητές πρέπει να εξετάσουν τα διάφορα σημεία του διαγράμματος, να τα αναλύσουν και να απαντήσουν στα ερωτήματα. Ενέχει σύνθετο συλλογισμό, καθώς τα

ερωτήματα δε συνδέονται αποκλειστικά με το μέγεθος της επιτάχυνσης που αναπαρίσταται στο γράφημα, αλλά με τα άλλα δυο κινηματικά μεγέθη, την ταχύτητα και την απομάκρυνση. Συνεπώς, ευνοείται ο σύνθετος συλλογισμός, ο οποίος επιτρέπει την ενεργοποίηση ποικίλων μητρώων αναπαράστασης που σχετίζονται με τη συνάρτηση και είναι εφικτές οι εννοιολογικές συνδέσεις που αφορούν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από επεξεργασίες αλλά και μετατροπές, μεταξύ των διαφορετικών μητρώων αναπαράστασης, όπως το αλγεβρικό, το γραφικό, το πρότυπο του τριγωνομετρικού κύκλου με τα περιστρεφόμενα διανύσματα και τη θεωρία των προβολών, στα οποία αναπαρίστανται τα υπό μελέτη κινηματικά μεγέθη (μεταβλητές). Η γνωστική συνέργεια των μητρώων αναπαράστασης και οι νοητικές αλληλεπιδράσεις που γίνονται σε ένα τέτοιο πλαίσιο, παρέχουν κάτι σαν επέκταση της νοητικής ικανότητας (Duval, 2006). Το σημείο αυτό είναι βαρύτατης σημασίας, καθώς πρέπει κανείς να διερευνήσει στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών και των Φυσικών επιστημών κατά πόσον ένας τέτοιος συντονισμός μητρώων έρχεται φυσικά στους/στις μαθητές/τριες τόσο μέσα από τα εγχειρίδια, όσο και μέσα από τις διδακτικές πρακτικές και τη διδασκαλία συνολικά.

## **ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Η έρευνα έδειξε πως οι αναπαραστάσεις της συνάρτησης ημίτονο που κυριαρχούν είναι οι αλγεβρικές και οι γραφικές, τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Επιπλέον, τόσο στα εγχειρίδια των Μαθηματικών όσο και της Φυσικής δεν υπάρχουν δραστηριότητες βασισμένες στο πλαίσιο. Ως προς τη διάσταση που σχετίζεται με τους μετασχηματισμούς της συνάρτησης ημίτονο, στα Μαθηματικά κυριαρχεί η μετατροπή μονοδιάστατα από την αλγεβρική στη γραφική αναπαράσταση. Επιπλέον, δεν παρατηρήθηκαν δραστηριότητες στις οποίες να δίδεται έμφαση στην αλλαγή κατεύθυνσης των μετατροπών που, σύμφωνα με τον Duval (2006), είναι ένα πολύ σημαντικό σημείο για την εννοιολογική κατανόηση. Δραστηριότητες υψηλής γνωστικής απαίτησης που απαιτούν σύνθετο συλλογισμό για χρήση και επεξεργασία της συνάρτησης στην επίλυση προβλήματος (Sierpiska, 1992), δεν παρατηρήθηκαν. Ως προς τις ιδιότητες της συνάρτησης, αναδεικνύονται η περίοδος, τα μέγιστα και τα ελάχιστα, αλλά όχι η μονοτονία.

Σε ό,τι αφορά τα εγχειρίδια Φυσικής, καταγράφηκε μεγαλύτερη ποικιλία εμφανίσεων των αναπαραστάσεων της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Παρατηρήθηκαν, κυρίως, μετασχηματισμοί επεξεργασίας, ακολούθως μετατροπής αλλά και σύνθετοι μετασχηματισμοί οι οποίοι ενεργοποιούν περισσότερα από ένα σημειωτικά συστήματα αναπαράστασης (διαφορετικά μητρώα), διαμορφώνοντας προϋποθέσεις γνωστικού συντονισμού μεταξύ τους (Duval, 2006).

## **ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

- Μαναρίδης, Α., & Κολλάρας, Ν. (2014). Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων: Η περίπτωση της  $\eta\mu x = a$ . Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 1<sup>ου</sup> Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες»*, (σσ. 977–986). Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103–131.
- Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational psychology*, 24(5), 645–657.
- Jacobson, N. S., & Truax, P. (1991). Clinical significance: A statistical approach to defining change in psychotherapy research. *Journal of Consulting and Clinical Psychology*, 59, 12–19.
- Sierpiska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23–58.